Julien Bernis
Laurent Bernis

Analyse pour l'agrégation de mathématiques

40 développements



2e édition
augmentée

ellipses

Analyse pour l'agrégation de mathématiques

40 développements

Références sciences

Analyse pour l'agrégation de mathématiques

40 développements

2e édition augmentée

Julien Bernis

Laurent Bernis

ellipses

Collection Références sciences

dirigée par Paul de Laboulaye
paul.delaboulaye@editions-ellipses.fr

Retrouvez tous les livres de la collection et des extraits sur www.editions-ellipses.fr

ISBN 9782340-094413
© Ellipses Édition Marketing S.A., 2024
8/10 rue la Quintinie 75015 Paris

DANGER LE PHOTOCOPILLAGE TUE LE LIVRE

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5.2° et 3°a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

῾Ο μὲν Θεὸς γεωμετρικῶς, ὁ δὲ διάβολος ἀναλυτικῶς

Ce livre est dédié à la mémoire de
Jean-Marie Chevallier,
qui nous avait fait l'honneur de préfacer la
première édition de cet ouvrage.

Son dévouement et son engagement sans
faille firent de lui, pendant des décennies,
l'un des piliers du concours
de l'agrégation externe.

Changements de la 2de édition

Voici une liste non exhaustive des changements apportés à la seconde édition par rapport à la première.

▶ Développements ajoutés, retirés et modifiés

• Développements ajoutés

- Moyenne circulaire sur le cercle unité
- Contrôlabilité d'un système linéaire
- Caractérisation de Γ par log-convexité (théorème de Bohr-Molerup-Artin)
- Stabilité des systèmes newtoniens
- Une suite de Fibonacci aléatoire
- Fonctions continues nulle part dérivables
- Principe d'incertitude suédois
- Applications de la formule des compléments
- Formule d'inversion de Fourier en valeur principale
- Comportement des intégrales de Borwein
- Théorème de Carathéodory et applications
- Égalité des accroissements finis vectorielle

• Développements retirés

- Étude de la convergence faible dans $\ell^1(\mathbb{N})$
- Théorème de Cauchy-Lipschitz
- Un système hyperbolique linéaire
- Dynamique symbolique
- Convergence de la méthode de relaxation
- Lemme de Morse et application
- Différentielle de la limite et application
- Étude asymptotique de la solution de l'équation de Bessel
- Ensembles de vecteurs presque orthogonaux
- Convergence vers la loi de Gumbel

• **Développements modifiés**
- Compacts dans les espaces de Banach : une application a été ajoutée
- Théorème d'Hadamard-Lévy : le résultat et la preuve ont été améliorés
- Théorèmes de point fixe compact : la preuve a été simplifiée
- Limite de variables aléatoires gaussiennes : la preuve a été améliorée
- Ellipsoïde de John-Loewner : un point sur les hypothèses a été ajouté et cas du centre quelconque rejeté en annexe
- Sommation d'Abel des séries de Fourier : a été rejeté en annexe

▶ Résultats complémentaires ajoutés et retirés

• **Résultats complémentaires ajoutés**
- Théorème de Lax-Milgram
- $H^1(]0,1[)$, $H^1_0(]0,1[)$ et inégalité de Poincaré
- Prolongement des applications uniformément continues
- Applications du théorème de Bohr-Molerup
- Stabilité des systèmes différentiels linéaires

• **Résultats complémentaires retirés**
- Théorème de relèvement $\mathcal{C}^1$
- Un complément sur la méthode de relaxation

▶ Divers

• **Mise en page améliorée**
La mise en page a été remaniée dans tout l'ouvrage afin de mieux structurer les preuves et faciliter la lecture.

• **Ajout d'un index en fin d'ouvrage**
Permettra à l'agrégatif de rechercher les occurences dans cet ouvrage de résultats au programme, et plus généralement, de se repérer rapidement dans le livre.

• **Autonomie renforcée**
Les énoncés de nombreux résultats utilisés dans la preuve des développements ont été ajoutés dans le livre, dans le but de fluidifier la lecture et limiter le besoin de recourir à d'autres références.

• **Recyclage des développements dans les leçons d'algèbre**
Les développements qui peuvent être recasés dans les leçons d'algèbre portent maintenant une mention explicite en début d'exposé.

• **Illustrations**
Les illustrations de la première édition ont été améliorées. Les nouveaux développements sont plus richement illustrés.

• **Développements « version tableau »**
Ajouts de *Limite de variables aléatoires gaussiennes* et *Théorème de Bohr-Molerup-Artin*. Retrait de *Formules de Poisson et Shannon*.

Table des matières

Changements de la seconde édition **5**

I Introduction **9**
1 La préparation de l'oral . . . 9
2 De l'importance du développement . . . 10
3 Utilisation du livre . . . 11
4 Passage au tableau . . . 13
5 Des développements « version tableau » . . . 14
6 Couplages des leçons et développements . . . 21
7 Notations employées . . . 27

II Les développements **29**
1 Théorème d'Ascoli . . . 29
2 Théorèmes de Banach-Alaoglu . . . 33
3 Théorème de Montel et application . . . 37
4 Moyenne circulaire sur le cercle unité . . . 42
5 Compacts dans les espaces de Banach . . . 50
6 Théorème d'Hadamard-Lévy . . . 57
7 Théorèmes d'Abel et de Tauber faible . . . 63
8 Théorème de Bernstein-Valiron . . . 69
9 Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire . . . 73
10 Contrôlabilité d'un système linéaire . . . 78
11 Caractérisation de Γ par log-convexité . . . 89
12 Formule des compléments . . . 96
13 Inégalité isopérimétrique . . . 103
14 Inégalité de Hardy . . . 108
15 Équation de la chaleur sur un segment . . . 114
16 Résolution d'une É.D.P.E. . . . 120
17 Espace de Bergman . . . 126
18 Théorème de Grothendieck . . . 131

19 Théorème de Chudnovsky . . . 136
20 Théorèmes de point fixe compact . . . 143
21 Suites définies par récurrence . . . 150
22 Méthode du gradient à pas optimal . . . 159
23 Stabilité des systèmes newtoniens . . . 166
24 Théorème de Cartan-von Neumann . . . 173
25 Une suite de Fibonacci aléatoire . . . 179
26 Problème de la fortune du joueur . . . 186
27 Limite de variables aléatoires gaussiennes . . . 193
28 Théorème central limite . . . 200
29 Inégalité de Hoeffding . . . 209
30 Séries de Fourier des fonctions continues . . . 218
31 Formules de Poisson et Shannon . . . 225
32 Principe d'incertitude suédois . . . 231
33 Fonctions continues nulle part dérivables . . . 241
34 Applications de la formule des compléments . . . 253
35 Méthodes de calcul de l'intégrale de Dirichlet . . . 261
36 Inversion de Fourier en valeur principale . . . 267
37 Comportement des intégrales de Borwein . . . 276
38 Nombre de relations d'équivalence . . . 285
39 Ellipsoïde de John-Loewner . . . 290
40 Théorème de Carathéodory et applications . . . 300
41 Égalité des accroissements finis vectorielle . . . 310

III Résultats complémentaires **321**
1 Procédé d'extraction diagonale . . . 321
2 Théorème de Heine, cas équicontinu . . . 322
3 Topologie de la convergence compacte . . . 323
4 Polynômes de Tchebychev . . . 325
5 Lemmes de Borel-Cantelli . . . 327
6 Existence de partitions continues de l'unité . . . 330
7 Un résultat « vitrine » de l'analyse . . . 331
8 Compléments sur Cartan-von Neumann . . . 332
9 Théorème de Lax-Milgram . . . 338
10 $H^1(]0,1[)$, $H^1_0(]0,1[)$ et inégalité de Poincaré . . . 340
11 Prolongement d'applications uniformément continues . . . 346
12 Des applications du théorème de Bohr-Mollerup . . . 350
13 Stabilité de systèmes différentiels linéaires . . . 355
14 Ellipsoïde de John de centre libre . . . 359
15 Sommation d'Abel des séries de Fourier . . . 363

Références bibliographiques **371**

Traductions des citations **375**

Index **377**

Partie I

Introduction

1. La préparation de l'oral

L'AGRÉGATION externe est le concours de recrutement le plus difficile et le plus gratifiant que peuvent passer les étudiants français qui souhaitent enseigner les mathématiques. Composé d'épreuves écrites et orales conçues pour évaluer l'étendue des connaissances mathématiques du candidat, ce concours éprouve également sa capacité à les communiquer et les enseigner efficacement. Jean-Pierre Serre, Jean-Christophe Yoccoz, Cédric Villani, Laurent Lafforgue sont tant de lauréats illustres qui ont contribué au développement et à la diffusion des mathématiques. Sans chercher à se comparer à ces virtuoses, le candidat pourra garder à l'esprit qu'être admis à l'agrégation est un accomplissement qui s'inscrit dans une tradition d'excellence et dont il pourra s'enorgueillir. C'est précisément l'objectif de ce livre que d'aider les agrégatifs à obtenir le concours, en les accompagnant plus particulièrement durant les oraux d'analyse.

L'agrégation se déroule en deux temps : l'écrit en mars, qui conditionne l'admissibilité, et quelques mois après, l'oral, qui détermine l'admission et le rang du candidat.
La stratégie la plus naturelle consiste à concentrer ses efforts sur la préparation des écrits tout en repoussant celle des oraux, et ce afin de maximiser ses chances d'admissibilité.
C'est une tactique chaque année perdante pour de nombreux candidats...

Nous conseillons plutôt à l'agrégatif qui estime avoir atteint un niveau suffisant pour l'admissibilité de se consacrer principalement à la préparation de ses oraux, qui inclut le travail de repérage bibliographique, la constitution des plans de leçons, le travail spécifique à l'épreuve de modélisation, le choix et l'apprentissage des développements. En effet, toutes ces tâches chronophages nécessitent une grande force de travail et ne sauraient donc être menées à bien dans le laps de temps qui sépare les écrits des oraux.

Deux raisons pragmatiques supplémentaires incitent à agir dans cet ordre.

Tout d'abord, le travail de fond fourni pour préparer les oraux aura des répercussions significatives sur le niveau à l'écrit du candidat, en l'amenant à accomplir un travail transversal sur tout le programme du concours. En revanche, la préparation aux écrits ne bénéficiera que dans une moindre mesure à la qualité des prestations orales.

Ensuite, pour le candidat moyen, la quantité de points pouvant être récoltés à l'oral est nettement supérieure à celle des écrits. Il en est ainsi, évidemment, par le truchement des coefficients attribués aux épreuves qui donnent à l'oral un poids une fois et demi plus important que celui de l'écrit, mais aussi pour une raison de difficulté des épreuves. Par nature, les oraux évaluent en effet d'autres qualités et compétences que les seules connaissances académiques, ce qui permet d'obtenir des notes brillantes même avec un niveau mathématique relativement modeste. Décrocher de très bonnes notes à l'écrit exige en revanche un excellent niveau en mathématiques, qui seul permet de traiter les parties les plus difficiles des sujets.

2. De l'importance du développement

Le rôle joué par le développement dans la réussite des épreuves orales de mathématiques est fondamental. Non seulement il occupe une partie considérable du temps de passage au tableau, mais il présente aussi la particularité de pouvoir être préparé à l'avance. C'est le moment de l'épreuve durant lequel le candidat a la main et peut facilement faire bonne impression.

Véritable vitrine du savoir-faire mathématique du candidat et de sa pédagogie, le développement intervient assez tôt durant l'oral. Ainsi une prestation de qualité influera favorablement sur le déroulement de l'épreuve. En revanche, une piètre performance est susceptible de mettre le jury dans de très mauvaises dispositions, ce qui conduit en général à une note médiocre.

Insistons sur un point. Connaître d'un développement sa seule preuve n'est que le service minimum. Le jour du passage, il faudra avoir en tête, dans la mesure du possible, des conséquences théoriques mais aussi des applications pratiques du résultat. Le candidat devrait aussi toujours prendre de la hauteur par rapport à l'énoncé qu'il présente. Cette hypothèse est-elle nécessaire ? suffisante ? nécessaire et suffisante ? Il est impératif qu'il ait en tête (ou sur son plan) des contre-exemples pouvant attester qu'il a déjà réfléchi à ces questions. Ces exigences sont conséquentes, certes, mais l'agrégatif a le temps nécessaire pour s'y préparer durant toute l'année.

3. Utilisation du livre

Ce livre est un recueil de développements d'analyse adaptés au format de l'oral de l'agrégation, présentés avec des conseils d'exposition. Les preuves y sont rédigées et détaillées avec le niveau d'exigence propre au concours, en vue d'éviter au candidat de commettre certaines erreurs classiques.
L'agrégatif pourra y puiser jusqu'à trouver, s'il le souhaite, l'intégralité des développements nécessaires. Le jour de l'oral, il pourra donc préparer ses deux développements sans recourir à une multitude d'autres références, évitant ainsi de perdre un temps précieux dans la bibliothèque.
Néanmoins ce livre ne peut aider que ceux qui auront fait l'effort de s'en approprier le contenu, par un travail régulier, tout au long de l'année. Il est totalement vain d'espérer faire une bonne prestation le jour du concours en le feuilletant à la dernière minute.

Le candidat doit commencer par choisir ses développements tout en ayant en tête qu'il lui en faut deux par leçon. Pour l'aider dans ce choix, il trouvera à la page 21 une liste des leçons d'analyse de l'année 2023-2024 pour l'agrégation externe (options A, B et C), avec des suggestions de développements de cet ouvrage. Notons que les listes des leçons pour les candidats de l'option D et les candidats au concours spécial docteurs sont incluses dans cette liste.
Inversement, au début de chaque développement, nous avons indiqué dans quelles leçons il peut trouver sa place. Certains résultats peuvent également être présentés lors des oraux d'algèbre. Par exemple, en début de développement, le symbole 

signifie qu'il est loisible de présenter ce résultat dans les leçons 161 et 181.

L'année de préparation à l'agrégation pousse inéluctablement les candidats à dépasser leurs limites, cognitives comme conatives. Nous conseillons néan-

moins à nos lecteurs de choisir leurs développements judicieusement en adéquation avec le niveau qu'ils espèrent atteindre le jour de l'oral (à l'issue d'une année intense de travail). Il faut garder à l'esprit qu'un développement de niveau élémentaire présenté avec brio assurera une meilleure note qu'un développement difficile mais bâclé ou mal maîtrisé. Pire, un fossé trop grand entre le niveau du développement et celui du candidat peut s'avérer catastrophique pour la note. Sauf à être dos au mur[1], il ne faut pas s'aventurer à présenter un développement sans avoir suffisamment travaillé pour obtenir, le jour du passage, le bagage théorique et technique qu'il exige. La moyenne des admis et la moyenne à l'oral des admis qui restent assez modestes (< 12 et < 13 en 2023), encouragent d'ailleurs à ne pas prendre de risques inconsidérés. Insistons enfin sur le fait que le jury de lui-même n'interrogera pas le candidat sur des résultats hors programme, mais qu'il est fondé à le faire si c'est le candidat qui a introduit dans son plan ou son développement les résultats en question. Donc à chaque fois qu'un candidat fait appel à des théorèmes qui ne sont pas au programme il devra en maîtriser au minimum l'énoncé et avoir une idée de la preuve.

Nous avons, à titre indicatif, classé les développements en trois niveaux de difficulté identifiés par les symboles suivants :

● ○ ○ Développement de niveau élémentaire qui ne présente pas de difficultés majeures. Il ne va pas forcément enthousiasmer le jury, mais on peut tout à fait espérer une bonne note si l'on en soigne la présentation. Ces exposés sont ceux qui nécessitent le moins de travail de préparation.

● ● ○ Développement de niveau intermédiaire qui peut présenter des difficultés théoriques et/ou calculatoires. La plupart des développements de l'ouvrage rentrent dans cette catégorie. Ces résultats vont permettre au candidat de montrer qu'il dispose d'un bon niveau en mathématiques et ils seront appréciés du jury pour peu qu'ils aient été bien présentés.

● ● ● Développement de niveau difficile qui nécessite des connaissances théoriques et/ou du savoir-faire. Choisir un tel développement nécessite du travail et une affinité avec le thème traité. Il a plus de chance d'impressionner le jury mais il faut néanmoins bien mesurer le rapport bénéfice/risque allant avec le choix d'un tel exposé.

Le développement est un exercice de style en temps limité, ce qui impose de répéter dans les conditions du concours, c'est-à-dire en écrivant sur un

1. Dans l'absolu, il vaut mieux proposer un développement plutôt qu'aucun, et deux plutôt qu'un seul.

tableau, tout en exposant oralement. Une telle prestation doit durer entre 13 et 15 minutes. Passé ce délai, le jury vous accordera quelques secondes pour conclure brièvement, souvent à l'oral. C'est donc une bonne idée durant les sessions d'entraînement que de se préparer au désagréable exercice qui consiste à donner rapidement les éléments essentiels qui auraient permis de conclure si l'allure avait été plus rapide.
Là aussi, nous avons à titre indicatif classé les exposés en trois niveaux de longueur :

 Développement court qui laisse au candidat une marge d'erreur et lui permet de prendre son temps. Il peut en profiter pour exposer de façon détaillée et très pédagogique.

 Développement raisonnablement long mais qui laisse peu de place à des hésitations ou à des erreurs.

 Développement long qui doit être connu sur le bout des doigts et exposé avec vivacité. Certains passages choisis doivent être éludés ou expliqués uniquement à l'oral. Le défi consistera à ne pas pour autant fixer le tableau sans jamais se retourner vers le jury.

4. Passage au tableau

Afin de rendre compte du débit de parole considérable dont doit faire preuve le candidat pendant les 15 minutes de sa présentation, nous avons favorisé un style mathématique littéraire. Il est évidemment irréaliste de vouloir tant écrire au tableau en si peu de temps, même à l'issue d'un an d'entraînement intensif.

Le candidat doit donc être capable de maintenir un débit oral soutenu, en n'inscrivant en revanche que les mots et les calculs clefs ainsi que les étapes décisives de la preuve. Il veillera à écrire dynamiquement et lisiblement, et à bien occuper l'espace de son tableau. Le recours aux dessins doit être systématique chaque fois que c'est possible, mais il faudra prendre garde à ne pas griffonner de minuscules croquis illisibles. Il vaut mieux que le candidat fasse tenir l'intégralité de son développement sur les tableaux à sa disposition, sans avoir à les effacer.

L'agrégation est un concours de recrutement de professeurs, et à ce titre, le jury s'attachera à évaluer la pédagogie dont fait preuve le candidat, et plus

généralement sa présence et sa prestance à l'oral. Le candidat doit retenir l'attention du jury, voire même attiser sa curiosité. Parmi les dizaines de candidats que les membres du jury interrogent chaque semaine, parfois dans un état de lassitude avancé, l'enjeu est de se démarquer du lot et de se distinguer !

5. Des développements « version tableau »

Nous avons conscience que les agrégatifs qui parcourraient ce livre pour la première fois sans être déjà rompus à la préparation de développements pourraient être intimidés par le nombre de pages consacrées à chaque exposé. Il est légitime d'éprouver une certaine forme d'inquiétude lorsque l'on voit des résultats étalés sur une dizaine de pages qu'il s'agit de présenter en une quinzaine de minutes le jour du passage.
Évidemment, et c'est en particulier vrai pour les développements les plus longs de ce livre, une bonne partie du contenu sert avant tout à ce que le lecteur puisse travailler l'exposé le plus efficacement possible, et n'a pas vocation à être présentée. À force de préparation, et de répétitions, le candidat gagnera en aisance et apprendra à extraire le cœur de la démonstration.

Afin de l'y aider, nous donnons maintenant deux exemples de « tableaux » à l'issue d'un développement.
Nous avons choisi le développement sur la limite de variables aléatoires gaussiennes, page 193, ainsi que celui sur la caractérisation réelle de la fonction Γ (théorème de Bohr-Mollerup-Artin), page 89. Pour chaque développement, le lecteur portera une attention toute particulière à la différence significative de taille entre les deux versions, qui permet d'évaluer la proportion de détails à présenter à l'oral d'une part, et à l'écrit d'autre part.

Une dernière remarque anecdotique avant de poursuivre. Le recours à la couleur est un outil extrêmement puissant pour rendre le tableau plus lisible et vivant, et donc nous recommandons donc au lecteur de ne pas se priver de cet outil si jamais il a la chance d'y avoir accès.

Limite de variables aléatoires gaussiennes

Soient $(m_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(\sigma_n^2)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N},\ X_n \sim \mathcal{N}(m_n, \sigma_n^2) \text{ et } X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathscr{L}} X,$$

où X est une v.a. **réelle**.

Alors $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel m, $(\sigma_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel positif σ^2, et $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

Si $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} X$, alors $\forall r \geq 1$, $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{L}^r} X$.

Rmq. On considère que $\mathcal{N}(m, 0) \overset{\mathscr{L}}{=} \delta_m$.

• **Convergence des suites $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\sigma_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ et loi de X**

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R},\ \varphi_{X_n}(t) = \mathrm{e}^{itm_n}\mathrm{e}^{-\frac{\sigma_n^2 t^2}{2}}.$$

On a $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathscr{L}} X$, donc (**théorème de Paul Lévy**),

$$\varphi_{X_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{c.s.}} \varphi_X.$$

Donc :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^{-\frac{\sigma_n^2 t^2}{2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} |\varphi_X(t)|.$$

Or φ_X est continue et $\varphi_X(0) = 1$, donc il existe $t_0 \neq 0$ tel que $|\varphi_X(t_0)| \in]0, 1]$. Donc :

$$\sigma_n^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\frac{2}{t_0^2}\ln(|\varphi_X(t_0)|).$$

Donc $\sigma_n^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sigma^2 \geq 0$.

Montrons que $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Supposons $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non bornée, et même, sans perte de généralité, non majorée. Soient $m_{n_k} \underset{k\to+\infty}{\nearrow} +\infty$ et $A \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{P}(X = A) = 0$. Comme $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathscr{L}} X$, $F_{X_{n_k}}(A) \xrightarrow[k\to+\infty]{} F_X(A)$ et donc,

$$\mathbb{P}(X > A) = \lim_{k\to+\infty} \mathbb{P}(X_{n_k} > A).$$

Si k est assez grand, $m_{n_k} > A$, donc $\mathbb{P}(X_{n_k} > A) \geq \mathbb{P}(X_{n_k} > m_{n_k}) = \frac{1}{2}$, car $X_{n_k} \sim \mathcal{N}(m_{n_k}, \sigma_{n_k}^2)$, puis en laissant tendre k vers $+\infty$:

$$\mathbb{P}(X > A) \geq \frac{1}{2}.$$

Soit $(A_N)_{N\in\mathbb{N}}$ telle que $A_N \underset{N\to+\infty}{\nearrow} +\infty$ et $\mathbb{P}(X = A_N) = 0$ pour tout $N \in \mathbb{N}$. Par continuité monotone de $\mathbb{P}$:

$$\mathbb{P}(X = +\infty) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{N\in\mathbb{N}} \{X > A_N\}\right) = \lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}(X > A_N) \geq \frac{1}{2}.$$

Absurde car X v.a. réelle.

Donc $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

La suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a donc au moins une valeur d'adhérence. Supposons que $\hat{m}$ et $\tilde{m}$ soient deux valeurs d'adhérences distinctes.

On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^{itm_n} = \mathrm{e}^{\frac{\sigma_n^2 t^2}{2}} \varphi_{X_n}(t).$$

On considère deux sous-suites de $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui convergent vers $\hat{m}$ et $\tilde{m}$. Par passage à la limite :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^{it\hat{m}} = \mathrm{e}^{it\tilde{m}} \left(= \mathrm{e}^{\frac{\sigma^2 t^2}{2}} \varphi_X(t).\right)$$

Donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{it(\hat{m}-\tilde{m})} = 1$ et pour $t = \frac{\pi}{2(\hat{m}-\tilde{m})}$ on a $i = 1$: aburde.

Donc $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a qu'une seule valeur d'adhérence.

Donc $m_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} m$.

Finalement, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\varphi_X(t) = \mathrm{e}^{itm}\mathrm{e}^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$, donc :

$$\boxed{X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2).}$$

• Convergence $\mathbb{L}^r$

Lemme. Soient $Y \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ et $q \in \mathbb{N}^*$ un entier **pair**. Si $\sigma^2 = 0$ alors on a $\mathbb{E}[Y^q] = 0$. Si $\sigma^2 > 0$, alors $\mathbb{E}[Y^q] = c_q \sigma^q$, où $c_q \in \mathbb{R}_+^*$.

Idées de la preuve du lemme : Si $\sigma = 0$ alors $Y \overset{\mathscr{L}}{=} \delta_0$ et $\mathbb{E}[Y^q] = 0^q = 0$. Si $\sigma > 0$ on utilise une récurrence, la formule de transfert, et l'intégration par parties.

Preuve du théorème. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $Y_n = X_n - m_n \sim \mathcal{N}(0, \sigma_n^2)$. Pour tout $q \in \mathbb{N}$:

$$|X_n|^q = |Y_n + m_n|^q \leq 2^q \left(|Y_n|^q + |m_n|^q\right). \tag{1}$$

Supposons $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} X$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. D'après (1) et le lemme :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{E}[|X_n|^{2p}] \leq 2^{2p} \left(\mathbb{E}[Y_n^{2p}] + |m_n|^{2p}\right) \leq 2^{2p}(c_{2p}\sigma_n^{2p} + |m_n|^{2p}). \tag{2}$$

Comme $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} X$ on a $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathscr{L}} X$, donc $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\sigma_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent donc sont bornées. Donc d'après (2), $\sup_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{E}[|X_k|^{2p}] < +\infty$.

Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\mathbb{1}_{[a,+\infty[}(|X_n|^p) = 1 \times \mathbb{1}_{\{|X_n|^p \geq a\}} \leq \frac{|X_n|^p}{a} \mathbb{1}_{\{|X_n|^p \geq a\}},$$

et donc :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[|X_n|^p \mathbb{1}_{[a,+\infty[}(|X_n|^p)\right] &\leq \mathbb{E}\left[|X_n|^p \frac{|X_n|^p}{a} \mathbb{1}_{\{|X_n|^p \geq a\}}\right] \\
&\leq \frac{1}{a}\,\mathbb{E}\left[|X_n|^{2p} \mathbb{1}_{\{|X_n|^p \geq a\}}\right] \\
&\leq \frac{1}{a}\,\mathbb{E}\left[|X_n|^{2p}\right] \leq a^{-1} \sup_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{E}[|X_k|^{2p}] \xrightarrow[a\to+\infty]{} 0.
\end{aligned}$$

Donc la suite $(X_n^p)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément intégrable.
D'après **le théorème de Vitali (version $\mathbb{L}^p$)**, on a $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{L}^p} X$, donc $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{L}^r} X$, pour $r \leq p$.
Donc

$$\boxed{X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{L}^r} X}$$

pour tout $r \geq 1$. ❑

Théorème de Bohr-Mollerup-Artin

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des applications f définies sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, vérifiant :

i) $f(1) = 1$;

ii) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x+1) = xf(x)$;

iii) f est log-convexe.

Alors $\mathcal{F} = \{\Gamma\}$.

• **Γ est un élément de $\mathcal{F}$**

- On a $\Gamma(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{1-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = 1$, donc Γ vérifie i).

- Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Par intégration par parties :

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = [-t^x\mathrm{e}^{-t}]_0^{+\infty} + x\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = x\Gamma(x),$$

donc Γ satisfait ii).

- Soit $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ et $\lambda \in]0,1[$. On a :

$$\begin{aligned}\ln\big(\Gamma(\lambda x + (1-\lambda)y)\big) \leq \lambda\ln\big(\Gamma(x)\big) + (1-\lambda)\ln\big(\Gamma(y)\big)\\ \Leftrightarrow \ln\big(\Gamma(\lambda x + (1-\lambda)y)\big) \leq \ln\big(\Gamma(x)^\lambda\,\Gamma(y)^{1-\lambda}\big)\\ \Leftrightarrow \Gamma(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \Gamma(x)^\lambda\,\Gamma(y)^{1-\lambda}.\end{aligned}$$

Posons $p := \frac{1}{\lambda}$ et $q = \frac{1}{1-\lambda}$. Puisque l'on a $t \longmapsto t^{\frac{x-1}{p}}\mathrm{e}^{-\frac{t}{p}} \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ et $t \longmapsto t^{\frac{y-1}{q}}\mathrm{e}^{-\frac{t}{q}} \in \mathbb{L}^q(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$, par l'**inégalité de Hölder** :

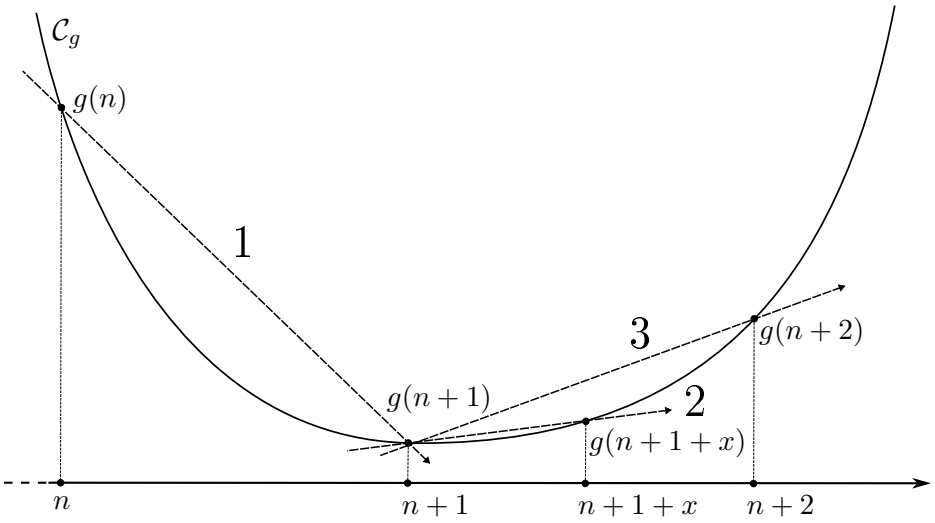
$$\begin{aligned}\Gamma(\lambda x + (1-\lambda)y) = \Gamma\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q}\right) &= \int_0^{+\infty} t^{\frac{x-1}{p}}\mathrm{e}^{-\frac{t}{p}} \times t^{\frac{y-1}{q}}\mathrm{e}^{-\frac{t}{q}}\mathrm{d}t\\ &\leq \left(\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^{+\infty} t^{y-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}}\\ &= \Gamma(x)^\lambda\,\Gamma(y)^{1-\lambda}.\end{aligned}$$

Donc Γ vérifie iii). Ainsi

$$\boxed{\Gamma \in \mathcal{F}.}$$

• **Γ est le seul élément de $\mathcal{F}$**

Soit $f \in \mathcal{F}$. Puisque f et Γ vérifient i) et ii) : $\forall p \in \mathbb{N}, f(p+1) = p! = \Gamma(p+1)$. Ainsi $f_{|\mathbb{N}^*} = \Gamma_{|\mathbb{N}^*}$.



Notons $g := \ln \circ f$. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0,1[$. D'après iii), g est convexe, donc :

$$\underbrace{\frac{g(n+1)-g(n)}{1}}_{1} \leq \underbrace{\frac{g(n+1+x)-g(n+1)}{x}}_{2} \leq \underbrace{\frac{g(n+2)-g(n+1)}{1}}_{3}.$$

Mais

$$g(n+1) - g(n) = \ln(n!) - \ln((n-1)!) = \ln(n),$$

de même $g(n+2) - g(n+1) = \ln(n+1)$, et donc :

$$\ln(n) \leq \frac{g(n+1+x)-g(n+1)}{x} \leq \ln(n+1).$$

Par suite :

$$0 \leq \underbrace{g(n+1+x) - g(n+1) - x\ln(n)}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{\text{thm gendarmes}} 0} \leq x\ln\left(1+\frac{1}{n}\right). \tag{1}$$

Or, f vérifie ii) donc :

$$\begin{aligned} g(n+1+x) = \ln\left(f(n+1+x)\right) &= \ln\left(nf(n+x)\right) \\ &= \ldots = \ln\left(f(x)\prod_{j=0}^{n}(x+n-j)\right) \\ &= g(x) + \ln\left(\prod_{j=0}^{n}(x+j)\right). \end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} g(n+1+x) - g(n+1) - x\ln(n) &= g(x) + \ln\left(\prod_{j=0}^{n}(x+j)\right) - \ln(n!) - \ln(n^x) \\ &= g(x) - \ln\left(\frac{n!n^x}{\prod_{j=0}^{n}(x+j)}\right). \end{aligned}$$

Donc, d'après (1), $g(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\dfrac{n!n^x}{\prod_{j=0}^{n}(x+j)}\right)$, donc (exp est continue) :

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!n^x}{\prod_{j=0}^{n}(x+j)}, \qquad \text{(G)}$$

Or $\Gamma \in \mathcal{F}$ donc Γ vérifie aussi (G). Donc $f_{|]0,1[} = \Gamma_{|]0,1[}$.

Soit $x \in]1,+\infty[\backslash\mathbb{N}$. On écrit $x = \lfloor x \rfloor + (\underbrace{x - \lfloor x \rfloor}_{\neq 0})$. Comme f et Γ vérifient ii) et coïncident sur]0,1[, on a :

$$f(x) \overset{\text{d'après } ii)}{=} \prod_{j=1}^{\lfloor x \rfloor}(x-j)\, f(\underbrace{x - \lfloor x \rfloor}_{\in]0,1[}) = \prod_{j=1}^{\lfloor x \rfloor}(x-j)\, \Gamma(x - \lfloor x \rfloor) \overset{\text{d'après } ii)}{=} \Gamma(x).$$

Ainsi $f_{|\mathbb{R}_+^*\backslash\mathbb{N}^*} = \Gamma_{|\mathbb{R}_+^*\backslash\mathbb{N}^*}$.

Donc $f = \Gamma$, et donc

$$\boxed{\mathcal{F} = \{\Gamma\}.}$$

❑

6. Couplages des leçons et développements



Les couplages qui sont proposés ici sont indicatifs et seront inéluctablement amenés à évoluer avec les changements de programme du concours (voir le site officiel du jury : `https://agreg.org/`). Le candidat doit s'assurer que chaque développement est introduit opportunément au sein de son plan de leçon, mais aussi être capable de défendre, au besoin, la pertinence de son choix en insistant sur l'adéquation entre le résultat et le titre de la leçon.

201. Espaces de fonctions. Exemples et applications.

- Théorème d'Ascoli
- Théorème de Montel et application
- Propriété de la moyenne circulaire sur le cercle unité
- Résolution d'une É.D.P.E.
- Espace de Bergman
- Théorème de Grothendieck
- Divergence des séries de Fourier des fonctions continues
- Principe d'incertitude suédois
- Fonctions continues nulle part dérivables

203. Utilisation de la notion de compacité.

- Théorème d'Ascoli
- Théorèmes de Banach-Alaoglu
- Théorème de Montel
- Propriété de la moyenne circulaire sur le cercle unité
- Caractérisation des compacts dans les espaces de Banach
- Théorèmes de point fixe compact
- Théorèmes de Cartan-von Neumann
- Ellipsoïde de John-Loewner
- Théorème de Carathéodory et applications
- Égalité des accroissements finis vectorielle

204. Connexité. Exemples d'applications.

- Propriété de la moyenne circulaire sur le cercle unité
- Théorème d'Hadamard-Lévy
- Formule des compléments
- Stabilité des systèmes newtoniens

205. Espaces complets. Exemples et applications.

- Théorème d'Ascoli
- Théorèmes de Banach-Alaoglu
- Théorème de Montel et application
- Caractérisation des compacts dans les espaces de Banach
- Inégalité de Hardy
- Théorème de Cauchy-Lipschitz dans le cas linéaire
- Espace de Bergman
- Théorème de Grothendieck
- Divergence des séries de Fourier des fonctions continues

206. Exemples d'utilisation de la notion de dimension finie en analyse.

- Caractérisation des compacts dans les espaces de Banach
- Contrôlabilité d'un système linéaire

208. Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

- Théorèmes de Banach-Alaoglu
- Caractérisation des compacts dans les espaces de Banach
- Inégalité de Hardy
- Résolution d'une É.D.P.E.
- Théorème de Grothendieck
- Divergence des séries de Fourier des fonctions continues

209. Approximation d'une fonction par des fonctions régulières. Exemples d'applications.

- Inégalité de Hardy
- Équation de la chaleur
- Résolution d'une É.D.P.E.
- Théorème de Chudnovsky
- Formules de Poisson et Shannon
- Fonctions continues nulle part dérivables
- Théorème d'inversion de Fourier en valeur principale
- Théorème de Carathéodory et applications

213. Espaces de Hilbert. Exemples d'applications.

- Théorèmes de Banach-Alaoglu
- Inégalité isopérimétrique
- Résolution d'une É.D.P.E.
- Espace de Bergman
- Théorème de Grothendieck

214. Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Illustrations en analyse et en géométrie.

- Théorème d'Hadamard-Lévy
- Stabilité des systèmes newtoniens
- Théorème de Cartan-von Neumann

215. Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications.

- Théorème d'Hadamard-Lévy
- Méthode du gradient à pas optimal
- Stabilité des systèmes newtoniens
- Théorème de Cartan-von Neumann

218. Formules de Taylor. Exemples et applications.

- Théorème central limite
- Théorème de Bernstein-Valiron

219. Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.

- Propriété de la moyenne circulaire sur le cercle unité
- Inégalité isopérimétrique
- Méthode du gradient à pas optimal
- Ellipsoïde de John-Loewner

220. Illustrer par des exemples la théorie des équations différentielles ordinaires.

- Théorème d'Hadamard-Lévy
- Contrôlabilité d'un système linéaire
- Stabilité des systèmes newtoniens

221. Équations différentielles linéaires. Système d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

- Théorème de Cauchy-Lipschitz dans le cas linéaire
- Contrôlabilité d'un système linéaire
- Équation de la chaleur
- Nombre de relations d'équivalences

223. Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.

- Théorèmes de point fixe compact
- Suites définies par récurrence
- Une suite de Fibonacci aléatoire
- Problème de la fortune du joueur
- Limite de variables aléatoires gaussiennes

224. Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions.

- Suites définies par récurrence
- Stabilité des systèmes newtoniens
- Une suite de Fibonacci aléatoire

226. Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples.
Applications à la résolution approchée d'équations.

- Théorème de Chudnovsky
- Théorèmes de point fixe compact
- Suites définies par récurrence
- Méthode du gradient à pas optimal
- Une suite de Fibonacci aléatoire
- Problème de la fortune du joueur

228. Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.

- Théorème d'Ascoli
- Théorème de Bernstein-Valiron
- Divergence des séries de Fourier des application continues
- Fonctions continues nulle part dérivables
- Égalité des accroissements finis vectorielle
- Théorème d'inversion de Fourier en valeur principale

229. Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

- Une caractérisation de la fonction Γ par log-convexité
- Suites définies par récurrence
- Méthode du gradient à pas optimal
- Inégalité de Hoeffding
- Ellipsoïde de John-Loewner

230. Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques.

- Théorèmes d'Abel et de Tauber faible
- Théorèmes de point fixe compact
- Suites définies par récurrence
- Une suite de Fibonacci aléatoire

234. Fonctions et espaces de fonctions LEBESGUE-intégrables.

- Inégalité de Hardy
- Résolution d'une É.D.P.E.
- Espace de Bergman
- Théorème de Grothendieck
- Principe d'incertitude suédois

235. Problèmes d'interversions de symboles en analyse.

- Théorèmes d'Abel et de Tauber faible
- Formule des compléments
- Équation de la chaleur
- Théorème de Grothendieck
- Une suite de Fibonacci aléatoire
- Inégalité de Hoeffding
- Formules de Poisson et Shannon
- Principe d'incertitude suédois
- Applications de la formule des compléments
- Méthodes de calcul de l'intégrale de Dirichlet
- Étude du comportement des intégrales de Borwein

236. Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.

- Formule des compléments
- Applications de la formule des compléments
- Théorème d'inversion de Fourier en valeur principale
- Méthodes de calcul de l'intégrale de Dirichlet
- Étude du comportement des intégrales de Borwein

239. Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

- Une caractérisation de la fonction Γ par log-convexité
- Formule des compléments
- Formules de Poisson et Shannon
- Applications de la formule des compléments
- Principe d'incertitude suédois
- Méthodes de calcul de l'intégrale de Dirichlet
- Inversion de Fourier en valeur principale
- Étude du comportement des intégrales de Borwein

241. Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.

- Théorèmes d'Abel et de Tauber faible
- Théorème de Bernstein-Valiron
- Équation de la chaleur
- Théorème de Chudnovsky
- Formules de Poisson et Shannon
- Principe d'incertitude suédois
- Fonctions continues nulle part dérivables
- Nombre de relations d'équivalence

243. Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

- Théorèmes d'Abel et de Tauber faible
- Théorème de Bernstein-Valiron
- Nombre de relations d'équivalence

244. Exemples d'études et d'applications de fonctions usuelles et spéciales.

- Une caractérisation de la fonction Γ par log-convexité
- Formule des compléments
- Limite de variables aléatoires gaussiennes
- Formules de Poisson et Shannon
- Applications de la formule des compléments
- Étude du comportement des intégrales de Borwein

245. Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$. Exemples et applications.

- Théorème de Montel et application
- Formule des compléments
- Espace de Bergman
- Méthodes de calcul de l'intégrale de Dirichlet

246. Séries de Fourier. Exemples et applications.

- Inégalité isopérimétrique
- Divergence des séries de Fourier des application continues
- Équation de la chaleur
- Formules de Poisson et Shannon
- Principe d'incertitude suédois

250. Transformation de Fourier. Applications.

- Limite de variables aléatoires gaussiennes
- Théorème central limite
- Formules de Poisson et Shannon
- Principe d'incertitude suédois
- Méthodes de calcul de l'intégrale de Dirichlet
- Théorème d'inversion de Fourier en valeur principale
- Étude du comportement des intégrales de Borwein

253. Utilisation de la notion de convexité en analyse.

- Une caractérisation de la fonction Γ par log-convexité
- Méthode du gradient à pas optimal
- Inégalité de Hoeffding
- Ellipsoïde de John-Loewner
- Théorème de Carathéodory et applications
- Égalité des accroissements finis vectorielle

261. Loi d'une variable aléatoire : caractérisation, exemples, applications.

- Une suite de Fibonacci aléatoire
- Théorème central limite
- Limite de variables aléatoires gaussiennes

262. Convergences d'une suite de variables aléatoires. Théorèmes limites. Exemples et applications.

- Une suite de Fibonacci aléatoire
- Limite de variables aléatoires gaussiennes
- Théorème central limite
- Inégalité de Hoeffding

264. Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.

- Une suite de Fibonacci aléatoire
- Problème de la fortune du joueur

266. Utilisation de la notion d'indépendance en probabilités.

- Une suite de Fibonacci aléatoire
- Problème de la fortune du joueur
- Théorème central limite
- Inégalité de Hoeffding

7. Notations employées

Espaces fonctionnels

- $\mathcal{F}(X,Y)$ ou bien Y^X : Ensemble des fonctions définies sur X à valeurs dans Y.
- $\mathcal{C}(X,Y)$: Ensemble des fonctions continues sur X à valeurs dans Y.
- $\mathcal{C}^k$: Ensemble des fonctions k fois dérivables de dérivée k-ième continue pour un entier $k \geq 1$.
- $\mathcal{C}_{2\pi}$: Ensemble des fonctions continues et 2π-périodiques à valeurs complexes.
- $\mathcal{C}_{\mathrm{pm},\,2\pi}$: Ensemble des fonctions 2π-périodiques et continues par morceaux à valeurs complexes.
- $\mathcal{C}_{\mathrm{c}}(\Omega)$: Ensemble des fonctions continues à support compact définies sur un ouvert Ω (de $\mathbb{R}^n$). Le support d'une fonction f élément de $\mathcal{C}_{\mathrm{c}}$, noté $\mathrm{Supp}(f)$ est défini comme le complémentaire du plus grand ouvert de Ω sur lequel f s'annule.
- $\mathcal{D}(\Omega)$: Espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact sur un ouvert Ω.
- $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$: Espace de Schwartz, ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ à décroissance rapide sur $\mathbb{R}^n$.
- $\mathcal{H}(\Omega)$: Ensemble des fonctions holomorphes sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$.

- λ : Mesure de Lebesgue.
- $\mathbb{L}^1(\mu)$: Ensemble des fonctions intégrables sur $(X,\mathcal{A},\mu)$, espace mesuré.
- $\mathbb{L}^1(X)$: Ensemble des fonctions intégrables sur $X \subset \mathbb{R}^n$ pour la mesure de Lebesgue.
- $\mathbb{L}^1_{\mathrm{loc}}(X)$: Ensemble des fonctions localement intégrables sur $X \subset \mathbb{R}^n$ pour la mesure de Lebesgue.
- $\mathbb{L}^p(X), p \geq 1$: Ensemble des fonctions f définies sur $X \subset \mathbb{R}^n$ qui, selon le contexte, vérifient $|f|^p \in \mathbb{L}^1(X)$ ou $\|f\|^p \in \mathbb{L}^1(X)$.
- $\hat{g}$ ou $\mathcal{F}(g)$: Transformée de Fourier de g sous réserve d'existence de la fonction intégrale à paramètre $\xi \mapsto \hat{g}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\mathrm{e}^{-2i\pi\xi t}\mathrm{d}t$, ou transformée de Fourier-Plancherel de g.

Topologie et calcul différentiel

- $\mathrm{B}(a,r)$: Boule ouverte de centre a et de rayon r.
- $\overline{\mathrm{B}(a,r)}$: Boule fermée[1] de centre a et de rayon r.

1. Cette notation abusive sera suffisante pour le contenu de ce livre. Le lecteur gardera néanmoins à l'esprit que l'adhérence d'une boule ouverte n'est pas toujours la boule fermée. Il suffit de considérer la boule $\mathrm{B}(0,1)$ de $\mathbb{N}$ muni de la distance discrète.

- $\mathrm{B}_E(a,r)$ ou $\overline{\mathrm{B}_E(a,r)}$: Boule ouverte ou fermée de l'espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|_E)$, lorsqu'il est nécessaire de préciser l'espace vectoriel normé.
- $\mathrm{D}(a,r), \overline{\mathrm{D}(a,r)}$: Disque ouvert, fermé de $\mathbb{C}$ de centre a et de rayon r.
- $\mathrm{d}(x,A)$: Dans un espace métrique, désigne la distance de x à un ensemble A, $\mathrm{d}(x,A) = \inf_{y\in A} \mathrm{d}(x,y)$.
- $\|\cdot\|_E$: Norme classique ou prédéfinie sur un espace vectoriel normé E.
- $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{E} x$: Convergence d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers x dans l'espace vectoriel $(E, \|\cdot\|_E)$.
- $\mathscr{L}(E,F)$: Ensemble des applications linéaires (non nécessairement continues) d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F.
- $\mathscr{L}_{\mathrm{c}}(E,F)$: Ensemble des applications linéaires continues entre deux espaces vectoriels normés. Se confond avec $\mathscr{L}(E,F)$ si E est de dimension finie.
- $\|\cdot\|_{\mathscr{L}_{\mathrm{c}}}$: Norme subordonnée à $\|\cdot\|_E$ d'un élément de $\mathscr{L}_{\mathrm{c}}(E,F)$ ($\|\cdot\|_{\mathscr{L}}$ en dimension finie).
- $\mathrm{d}f(x)\cdot h$: Différentielle de f au point x appliquée à un vecteur h.

Probabilités

- $\mathbb{E}[X]$: Espérance d'une variable aléatoire positive ou intégrable.
- L_X : Transformée de Laplace de la variable aléatoire X.
- φ_X : Fonction caractéristique de la variable aléatoire X.
- F_X : Fonction de répartition de la variable aléatoire X.
- $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\square} X$: Convergence de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers X selon les modes

  $\square = $ p.s., presque sûre, $\square = \mathbb{P}$, en probabilité,
  $\square = \mathbb{L}^p(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$, en norme $\mathbb{L}^p$, $\square = \mathscr{L}$, en loi.

Espaces et groupes de matrices

- $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: Ensemble des matrices de taille $n\times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$: Groupe des matrices inversibles à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$: Ensemble des matrices antisymétriques réelles.
- $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$: Ensemble des matrices symétriques réelles.
- $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$: Ensemble des matrices réelles symétriques et positives.
- $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$: Ensemble des matrices réelles symétriques définies positives.
- $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$: Groupe des matrices orthogonales.

Partie II

Les développements

1. Théorème d'Ascoli

Wir müssen wissen – Wie werden wissen.

David Hilbert, 1930.

Leçons concernées : 201, 203, 205, 228.

Niveau de l'exposé : ● ● ● Durée : 

Connaissances requises : *Extraction diagonale, précompacité, séparabilité des espaces métriques compacts, théorème de Heine cas équicontinu.*

Conseils : Ce beau développement plaira à celles et ceux qui aiment les preuves théoriques mais peu calculatoires.

Les connaissances mentionnées ci-dessus sont importantes pour mener à terme la démonstration et le lecteur devrait en prendre connaissance. Il trouvera notamment à la page 321 la preuve du procédé d'extraction diagonale, et à la page 322 la preuve du théorème de Heine dans le cas équicontinu.

Le jury attendra probablement du candidat qu'il sache citer une ou deux applications de ce résultat qui en a tant, et qu'il sache donner un exemple d'ensemble de fonctions continues qui vérifient les hypothèses du théorème (voir les paragraphes à la suite de l'énoncé).

Théorème d'Ascoli

Soient (K, d) un espace métrique compact et $\mathcal{A}$ une partie de l'espace vectoriel normé $(\mathcal{C}(K, \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$ des fonctions continues sur K. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. La partie $\mathcal{A}$ est équicontinue et bornée.
2. La partie $\mathcal{A}$ est relativement compacte.

☞

La preuve que nous donnons ici est la plus classique, nous en donnerons une autre en application de la caractérisation des compacts dans les espaces de Banach (page 50). Il est important de constater dès maintenant que le schéma de preuve sera presque identique pour le théorème de Banach-Alaoglu, page 33, ou même, en dehors de ce livre, pour le théorème de Helly ([Francinou et Gianella, 2012a]).

Le théorème d'Ascoli a de très nombreuses applications théoriques. Il permet de démontrer d'autres théorèmes caractérisant les compacts comme les théorèmes de Montel (page 37) et de Fréchet-Kolmogorov ([Hirsch et Lacombe, 1997]), voir aussi l'exposé page 42, ainsi que le théorème de Cauchy-Peano ([Demailly, 2012]) donnant l'existence de solutions d'équations différentielles. Nous démontrerons aussi grâce à lui un théorème sur les sous-espaces vectoriels fermés des fonctions continues à la page 331. Il permet aussi de montrer la compacité de certains opérateurs à noyau ([Hirsch et Lacombe, 1997]).
Pour terminer, donnons un exemple d'ensemble vérifiant les hypothèses du théorème. Soient $M \in \mathbb{R}_+^*$, $c \in \mathbb{R}_+^*$, et $\alpha \in]0, 1]$ trois réels. Alors

$$\{f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{C}) \mid |f(x) - f(y)| \leq M|x-y|^\alpha, |f(0)| \leq c\}$$

est relativement compact, et même compact car fermé dans l'espace vectoriel $(\mathcal{C}([0,1], \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$.

▶ Supposons que $\mathcal{A}$ soit équicontinue et bornée

• Convergence simple pour une suite dense.

L'espace métrique (K, d) est compact donc **séparable**. On dispose donc d'une suite dense $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ d'éléments de K.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$. La partie $\mathcal{A}$ étant bornée, il existe une constante $M \in \mathbb{R}_+^*$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|f_n\|_\infty \leq M$.

Par définition de la norme infinie, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a :

$$\{f_n(x_p), n \in \mathbb{N}\} \subset \overline{\mathrm{D}(0, M)}.$$

Donc cet ensemble est relativement compact[1] dans $\overline{\mathrm{D}(0, M)}$. Par **le procédé d'extraction diagonale**, il existe donc une extractrice $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $p \in \mathbb{N}$, la suite $(f_{n_k}(x_p))_{k\in\mathbb{N}}$ converge.

• **Convergence uniforme sur K.**

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Comme l'ensemble $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ est équicontinu sur le compact K, d'après **le théorème de Heine**, il est uniformément équicontinu (voir page 322). On dispose donc d'un réel $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\forall (x, y) \in K^2, \mathrm{d}(x, y) \leq \eta \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, |f_n(x) - f_n(y)| \leq \varepsilon.$$

Par densité de la suite $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ dans (K, d), on peut recouvrir K de la manière suivante :

$$K \subset \bigcup_{p=0}^{+\infty} \mathrm{B}(x_p, \eta).$$

Or, K étant compact, d'après la propriété de Borel, on peut extraire un sous-recouvrement fini, c'est-à-dire qu'il existe $y_1, \ldots, y_N$, éléments de l'ensemble $\{x_p,\, p \in \mathbb{N}\}$, tels que :

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{N} \mathrm{B}(y_i, \eta).$$

Soit $i \in [\![1, N]\!]$. La suite $(f_{n_k}(y_i))_{k\in\mathbb{N}}$ converge donc est de Cauchy. Il existe donc $n_i \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $(k, k') \in \mathbb{N}^2$, tel que $k' \geq k \geq n_i$, on ait :

$$|f_{n_k}(y_i) - f_{n_{k'}}(y_i)| \leq \varepsilon.$$

On pose $n_{\max} = \max\{n_i,\, i \in [\![1, N]\!]\}$.
Soient $x \in K$ et $i_0 \in [\![1, N]\!]$ tel que $x \in \mathrm{B}(y_{i_0}, \eta)$. Alors pour tout $(k, k') \in \mathbb{N}^2$ tel que $k' \geq k \geq n_{\max}$, par inégalité triangulaire[2], on a :

$$\begin{aligned} |f_{n_k}(x) - f_{n_{k'}}(x)| &\leq |f_{n_k}(x) - f_{n_k}(y_{i_0})| + |f_{n_k}(y_{i_0}) - f_{n_{k'}}(y_{i_0})| \\ &\quad + |f_{n_{k'}}(y_{i_0}) - f_{n_{k'}}(x)| \\ &\leq 3\varepsilon. \end{aligned}$$

1. Son adhérence, fermée dans le compact $\overline{\mathrm{D}(0, M)}$, est compacte.

2. La majoration du premier et dernier terme est donnée par équicontinuité uniforme, et celle du terme central par choix du rang $n_{\max}$.

☞

Notons que l'entier $n_{\max}$ est indépendant de x. C'était le point délicat de la preuve. Il est donc loisible de passer à la borne supérieure sur x dans cette dernière inégalité.

On en déduit que pour tout $(k,k') \in \mathbb{N}^2$ vérifiant $k' \geq k \geq n_{\max}$, on a :

$$\|f_{n_k} - f_{n_{k'}}\|_\infty = \sup_{y\in K} |f_{n_k}(y) - f_{n_{k'}}(y)| \leq 3\varepsilon.$$

La suite $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est donc de Cauchy dans $(\mathcal{C}(K,\mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$ qui est un espace de Banach, donc converge vers un élément de $\mathcal{C}(K,\mathbb{C})$.

Finalement, $\mathcal{A}$ est relativement compacte.

▶ Supposons que $\mathcal{A}$ soit relativement compacte

D'une part, $\overline{\mathcal{A}}$ est compacte donc bornée et il en va de même pour $\mathcal{A}$.
Soit d'autre part $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Par précompacité de $\overline{\mathcal{A}}$, on dispose d'éléments $f_1, \ldots, f_{N_\varepsilon}$ de $\mathcal{C}(K,\mathbb{C})$ tels que :

$$\overline{\mathcal{A}} \subset \bigcup_{i=1}^{N_\varepsilon} \mathrm{B}\,(f_i, \varepsilon).$$

Soit $i \in [\![1, N_\varepsilon]\!]$. D'après **le théorème de Heine**, la fonction f_i est uniformément continue sur le compact K. Il existe donc $\eta_i \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\forall (x,y) \in K^2, \mathrm{d}(x,y) \leq \eta_i \Rightarrow |f_i(x) - f_i(y)| \leq \varepsilon.$$

Posons alors $\eta = \min\{\eta_i, i \in [\![1, N_\varepsilon]\!]\}$.

Soit $(x,y) \in K^2$ tel que $\mathrm{d}(x,y) \leq \eta$. Soient $f \in \mathcal{A}$ et $i_0 \in [\![1, N_\varepsilon]\!]$ tel que $f \in \mathrm{B}\,(f_{i_0}, \varepsilon)$. Alors on a[1] :

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_{i_0}(x)| + |f_{i_0}(x) - f_{i_0}(y)| + |f_{i_0}(y) - f(y)| \leq 3\varepsilon.$$

Ainsi $\mathcal{A}$ est-elle équicontinue. ❑

1. La majoration du premier et du dernier terme est donnée par le choix de la boule $\mathrm{B}(f_{i_0}, \varepsilon)$ et celle du terme central par le choix de η.

2. Théorèmes de Banach-Alaoglu

Before we begin you must all be warned. Nothing here, is vegetarian. Bon appétit !

Hannibal show, 2014.

Leçons concernées : 203, 205, 208, 213.

NIVEAU DE L'EXPOSÉ : ● ● ○ DURÉE : 

Connaissances requises : *Extraction diagonale, séparabilité, théorème du supplémentaire orthogonal, théorème de réprésentation de Riesz, convergence faible dans un espace de Hilbert.*

CONSEILS : Pour ce développement, il est souhaitable d'avoir des bases solides sur la notion de convergence faible dans le cadre des espaces de Hilbert ([Hirsch et Lacombe, 1997], III.3.2.).

En dehors ce cadre élémentaire, la convergence faible fait partie des sujets qu'il est dangereux d'aborder le jour de l'oral. Le candidat moyen ne s'aventurera pas sur ce terrain miné, se contentant de la définition dans le cadre hilbertien, pouvant éviter jusqu'à prononcer le mot. Les meilleurs candidats pourront se risquer à parler de convergence faible en général, après s'être préparés en lisant, par exemple [Brezis, 2005].

Le candidat doit également savoir énoncer et démontrer le procédé d'extraction diagonale que l'on trouve à la page 321.

Dans la suite $\mathbb{K}$ désignera indifféremment le corps des nombres réels ou complexes. Les espaces vectoriels normés ou de Hilbert rencontrés seront définis sur ce corps. Dans le cas d'un Hilbert sur le corps $\mathbb{C}$, dans ce développement, le produit scalaire sera **linéaire à gauche**.

Théorèmes de Banach-Alaoglu

Cas d'un espace séparable : Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé séparable, et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathscr{L}_c(E,\mathbb{K})$, bornée pour la norme subordonnée. Alors il existe une extractrice $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et T élément de $\mathscr{L}_c(E,\mathbb{K})$ telle que pour tout $x \in E$,

$$\lim_{k\to+\infty} T_{\varphi(k)}(x) = T(x).$$

Cas d'un espace de Hilbert : Soit $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace de Hilbert, et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée d'éléments de H. Alors il existe une suite extraite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge faiblement dans H.

☞

Nous avons choisi de donner deux résultats qui pourraient s'unifier dans un cadre plus théorique. Ceci permet, lors de l'exposition, de mettre en relief les propriétés qui proviennent d'une part de la structure d'espace vectoriel normé (séparable), et d'autre part celles qui découlent de la structure hilbertienne.

Le premier résultat qui permet de montrer le suivant, utilise la structure d'espace vectoriel normé ici dans le cas particulier séparable. Il est dû au seul Banach, Alaoglu et Bourbaki généraliseront ce résultat par la suite.

Le second théorème découle fortement de la structure hilbertienne. Il illustre dans un cadre particulièrement commode (celui des espaces de Hilbert) l'intérêt de la notion de convergence faible. En effet il se reformule ainsi : les parties bornées d'un Hilbert sont faiblement séquentiellement compactes, ce qui n'est évidemment pas le cas pour la topologie liée à la norme en dimension infinie (cf. théorème de Riesz). En définissant une topologie plus faible (la convergence au sens ordinaire impliquant la convergence faible) on augmente le nombre de compacts. Ce théorème a des applications à des problèmes d'optimisation et à la résolution d'équations aux dérivées partielles.

▶ Preuve du premier théorème

– L'espace vectoriel E étant séparable, on dispose d'une **suite dense** $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E. De plus, la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, donc il existe une constante $M \in \mathbb{R}_+^*$ telle que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on ait $\|T_n\|_{\mathscr{L}_c} \leq M$.

Par définition de la norme d'opérateur, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\{T_n(x_p), n \in \mathbb{N}\} \subset \overline{\mathrm{B}(0, M\|x_p\|)},$$

donc $\{T_n(x_p), n \in \mathbb{N}\}$ est une partie de $\mathbb{K}$ relativement compacte. Par **extraction diagonale**, il existe donc une extractrice $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $(T_{\varphi(k)}(x_p))_{k\in\mathbb{N}}$ converge.

– Soient $x \in E$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Par densité, on dispose d'un rang $p_0 \in \mathbb{N}$, tel que $\|x - x_{p_0}\| \leq \varepsilon$. Or la suite $(T_{\varphi(k)}(x_{p_0}))_{k\in\mathbb{N}}$, convergente, est de Cauchy, donc on

dispose de $K \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $(k,k') \in \mathbb{N}^2$ si $k' \geq k \geq K$, alors :

$$|T_{\varphi(k)}(x_{p_0}) - T_{\varphi(k')}(x_{p_0})| \leq M\varepsilon,$$

et donc[1] on a :

$$|T_{\varphi(k)}(x) - T_{\varphi(k')}(x)| \leq |T_{\varphi(k)}(x) - T_{\varphi(k)}(x_{p_0})| + |T_{\varphi(k)}(x_{p_0}) - T_{\varphi(k')}(x_{p_0})| + |T_{\varphi(k')}(x_{p_0}) - T_{\varphi(k')}(x)| \leq 3M\varepsilon.$$

Donc $(T_{\varphi(n)}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ complet, donc converge vers un réel noté $T(x)$.

– Montrons que[2] l'application $T : x \mapsto T(x) \in \mathscr{L}_{\mathrm{c}}(E,\mathbb{K})$.

Soit $(x,y) \in E^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$T_{\varphi(k)}(\lambda x + \mu y) = \lambda T_{\varphi(k)}(x) + \mu T_{\varphi(k)}(y) \text{ et } |T_{\varphi(k)}(x)| \leq M\|x\|.$$

En laissant tendre k vers $+\infty$, on a :

$$T(\lambda x + \mu y) = \lambda T(x) + \mu T(y) \text{ et } |T(x)| \leq M\|x\|.$$

D'où la linéarité et la continuité de T. ❑



La preuve du second point fait appel au théorème de représentation de Riesz dans le cas d'un espace de Hilbert défini sur le corps $\mathbb{C}$. Avec la convention choisie sur le produit scalaire (linéaire à gauche, anti-linéaire à droite), une forme linéaire continue T se représente par un produit scalaire à droite *par un vecteur x, c'est-à-dire $T = \langle \cdot, x \rangle$.*

▶ Preuve du second théorème

• Cas H séparable.

Supposons dans un premier temps que H soit un espace de **Hilbert séparable**[3].

1. La majoration du premier et du dernier terme est donnée par la définition de la norme d'opérateur de $T_{\varphi(n)}$ et $T_{\varphi(n')}$ et celle du terme central par le choix du rang K.

2. De façon plus synthétique on dira : « T est linéaire continue comme limite simple d'applications linéaires continues uniformément bornées ».

3. Au niveau de l'agrégation on ne travaille pas dans des espaces de Hilbert non séparables, mais ils existent. Par exemple $\ell^2([0,1])$.