

Pierre Bernard | Mathieu Mansuy
Anne-Charline Chalmin | Oscar Devys | Marie Virat
Julien Freslon | Sylvain Gugger | Daniel Fredon | Jérôme Poineau



MATHS

MP-MPI

EXERCICES INCONTOURNABLES

4^e édition

DUNOD

Couverture : création Hokus Pokus, adaptation Studio Dunod

Retrouvez nos ouvrages pour les prépas scientifiques ici



<http://dunod.link/prepassc>

Table des matières

Algèbre

1 Algèbre linéaire	19
1.1 : Utilisation des polynômes de Lagrange	19
1.2 : Somme de projecteurs	20
1.3 : Calcul par blocs	22
1.4 : Propriétés de la trace	24
1.5 : Réduction des matrices de trace nulle	26
1.6 : Racines carrée de $-I_n$	29
1.7 : Matrices de rang 1	31
1.8 : Utilisation d'un polynôme annulateur	34
1.9 : Intersection de p hyperplans	36
1.10 : Déterminant et polynômes de Tchebychev	38
2 Structures algébriques usuelles	41
2.1 : Centre d'un groupe	41
2.2 : Conjugaison	44
2.3 : Sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$	46
2.4 : Anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$	49
2.5 : Groupe multiplicatif d'un corps fini	53
2.6 : Radical d'un idéal	56
2.7 : Une congruence	58
2.8 : Systèmes de congruences	59
2.9 : Autour du théorème chinois	62
2.10 : Nombres de Fermat	63
2.11 : Codage RSA	65
2.12 : Polynôme et racines n -ièmes	67
2.13 : PGCD de P et P'	69
2.14 : Exemples de polynômes irréductibles	71

3 Réduction	73
3.1 : Éléments propres d'un endomorphisme d'un espace de polynômes	73
3.2 : Éléments propres d'un endomorphisme d'un espace de fonctions	76
3.3 : Réduction d'une matrice de taille 3	79
3.4 : Réduction	82
3.5 : Trigonalisation	85
3.6 : Diagonalisation simultanée	88
3.7 : Étude d'un endomorphisme d'un espace d'endomorphismes	90
3.8 : Diagonalisabilité et sous-espaces stables	93
3.9 : Une caractérisation des endomorphismes nilpotents	96
3.10 : Théorème de Cayley-Hamilton	99
3.11 : Décomposition de Dunford	105
3.12 : Dimension du commutant	113
4 Espaces euclidiens	117
4.1 : Famille de polynômes orthogonaux	117
4.2 : Un problème de minimisation	121
4.3 : Adjoint d'endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$	123
4.4 : Une caractérisation des isométries antisymétriques	127
4.5 : Centre de $O(E)$	128
4.6 : Partie génératrice du groupe orthogonal	131
4.7 : Composantes connexes par arcs de $O_n(\mathbb{R})$	134
4.8 : Formes quadratiques	137
4.9 : Quotients de Rayleigh	139
4.10 : Décomposition polaire	141

Topologie

5 Topologie des espaces vectoriels normés	149
5.1 : Réunion et intersection de boules	149
5.2 : Projection d'un ouvert, d'un fermé de $\mathbb{R}^2$	152
5.3 : Comparaison de normes	154
5.4 : Normes équivalentes	156
5.5 : Parties denses dans un ensemble de matrices	158
5.6 : Partie dense dans un ensemble de polynômes	160
5.7 : Caractérisation des normes euclidiennes	161
5.8 : Caractérisation de la continuité d'une application linéaire en dimension infinie	165
5.9 : Fonction uniformément continue	166
5.10 : Application linéaire non continue	168
5.11 : Un théorème de point fixe	169

5.12 : Valeurs d'adhérence	171
5.13 : Compacité de $O_n(\mathbb{R})$	172
5.14 : Un fermé borné non compact	174
5.15 : Compact et fermé	176
5.16 : Connexité par arcs	179
5.17 : Norme subordonnée	180
6 Rappels d'analyse et fonctions vectorielles	183
6.1 : Inégalité arithmético-géométrique	183
6.2 : Inégalités de Hölder et de Minkowski	185
6.3 : Continuité des fonctions convexes	188
6.4 : Approximation d'une fonction par interpolation	190
6.5 : Une application des formules de Taylor	192
6.6 : Majoration d'un $\vec{o}$	194
6.7 : Calcul d'un déterminant par dérivation	196
6.8 : Réflexion sur une ellipse	198
6.9 : Existence de nombres transcendants	201
6.10 : Points de discontinuité d'une fonction monotone	202

Analyse

7 Séries numériques et vectorielles	207
7.1 : Série avec terme général défini par récurrence	207
7.2 : Équivalents de sommes et de restes	209
7.3 : Développement asymptotique	211
7.4 : Transformation d'Abel	214
7.5 : Utilisation d'un produit de Cauchy	217
7.6 : Équivalent d'une suite récurrente	219
7.7 : Perturbation de l'identité inversible	220
8 Intégrales généralisées	223
8.1 : Un premier calcul d'intégrale	223
8.2 : Développement asymptotique de arcsin	226
8.3 : Deux intégrales trigonométriques	228
8.4 : Changement de variable	231
8.5 : Convergence de l'intégrale de Dirichlet	233
8.6 : Calcul de l'intégrale de Dirichlet	237
8.7 : Convergence et calcul d'une famille d'intégrales	241
8.8 : Étude d'une suite d'intégrales	243
8.9 : Équivalent d'une intégrale	245
9 Suites et séries de fonctions	249
9.1 : Convergence uniforme de suites de fonctions	249

9.2 : Interversion limite et intégrale impossible	252
9.3 : Une suite de fonctions définie par récurrence	254
9.4 : Convergence uniforme d'une série de fonctions	257
9.5 : Fonction ζ de Riemann	261
9.6 : Régularité d'une série de fonctions	266
9.7 : Calcul d'intégrales à l'aide de séries de fonctions	268
9.8 : Une interversion « à la main »	272
9.9 : Intégration et convergence uniforme	275
9.10 : Utilisation du théorème de Weierstrass	279
10 Séries entières	283
10.1 : Calculs de sommes de séries numériques	283
10.2 : Calculs de rayons de convergence à l'aide de la règle de d'Alembert	286
10.3 : Calculs de rayons de convergence avec la définition	287
10.4 : Domaine de convergence	289
10.5 : Théorème d'Abel radial	291
10.6 : Détermination d'une somme	294
10.7 : Développement d'une fonction en série entière	296
10.8 : Calcul de la somme d'une série numérique	297
10.9 : Nombres de Catalan	301
10.10 : Étude du comportement au bord	305
10.11 : Théorème de Liouville	308
10.12 : Dénombrement	310
10.13 : Étude d'une somme	312
11 Équations différentielles	315
11.1 : Utilisation d'un changement de fonction	315
11.2 : Utilisation d'un changement de variable	319
11.3 : Utilisation de séries entières (cas régulier)	320
11.4 : Utilisation de séries entières (cas singulier)	323
11.5 : Système différentiel d'ordre 2 (A diagonalisable)	327
11.6 : Système différentiel d'ordre 3 (A trigonalisable)	329
11.7 : Variation des constantes	333
11.8 : Utilisation du Wronskien	334
11.9 : Zéros de solutions	336
11.10 : Lemme de Grönwall	338
11.11 : Limite d'une exponentielle de matrices	339
12 Intégrales à paramètres	343
12.1 : Calcul d'une intégrale à paramètre	343
12.2 : Fonction Γ d'Euler	347
12.3 : Une formule d'Euler	350

12.4 : Transformée de Laplace du sinus cardinal	357
12.5 : Calcul de l'intégrale de Dirichlet	360
12.6 : Intégrale de Gauss	364
12.7 : Théorème de d'Alembert-Gauss	367
13 Fonctions de plusieurs variables	373
13.1 : Étude de continuité	373
13.2 : Dérivée directionnelle	374
13.3 : Différentiabilité d'une fonction	375
13.4 : Différentielle du déterminant	378
13.5 : Inégalité des accroissements finis	380
13.6 : Fonctions homogènes	382
13.7 : À propos du théorème de Schwarz	385
13.8 : Une équation aux dérivées partielles	387
13.9 : Équation des cordes vibrantes	390
13.10 : Recherche d'extremum	393
13.11 : Extremums sur un compact	395
13.12 : Extremum sur un compact d'intérieur vide	397
13.13 : Tangente à une hyperbole	399
13.14 : Courbe définie de manière implicite	400

Probabilités

14 Espaces probabilisés	407
14.1 : Loi de succession de Laplace	407
14.2 : Ruine du joueur	409
14.3 : Apparition de mots dans une suite de piles ou faces	412
14.4 : Probabilité de survie d'une espèce	415
14.5 : Lemmes de Borel-Cantelli	418
14.6 : Produit eulérien	421
15 Variables aléatoires discrètes	423
15.1 : Natalité	423
15.2 : Cartes à collectionner	424
15.3 : Nombre de poussins	427
15.4 : Compétition d'athlétisme	428
15.5 : Un jeu de pile ou face	431
15.6 : Temps de jeu à la roulette	433
15.7 : Loi conjointe et lois marginales	438
15.8 : Matrice aléatoire	441
15.9 : Processus de Galton-Watson	444
15.10 : Lois généralisées de Bernoulli	449

15.11 : Une inégalité de concentration	455
15.12 : Théorème de Weierstrass	459

Index	463
--------------	------------

Avant-propos

Cet ouvrage est conçu pour les élèves de deuxième année de classes préparatoires scientifiques en filières MP et MPI. Il pourra également intéresser les préparationnaires au CAPES et à l'agrégation de mathématiques.

Il propose de mettre en pratique les notions abordées en cours de mathématiques par le biais d'exercices. Chacun est assorti d'une correction détaillée, dans laquelle l'accent est mis sur la méthode qui mène à la solution. Comme l'indique le titre, l'objectif a été de couvrir, pour l'ensemble des chapitres du programme, non seulement toutes les notions à connaître, mais encore les techniques, astuces essentielles, ainsi que quelques exercices-types, classiques ou de synthèse : en particulier, on progresse, au sein de chaque chapitre, des techniques les plus fondamentales d'application du cours vers des techniques plus avancées pouvant ressembler à des exercices d'oral de concours.

Cette 4^e édition tient compte de toutes les nouveautés et modifications du nouveau programme, valable à partir de l'année 2022-2023. Au-delà d'une mise à jour nécessaire liée au changement de programme, nous avons cherché à améliorer et approfondir l'édition précédente. Il en résulte une centaine de pages supplémentaires, dédiées pour moitié à l'approfondissement des exercices existants, et pour moitié au traitement des nouveaux exercices.

Bien entendu, nous avons veillé à ce que ces apports respectent les principes qui ont fait le succès de cette collection :

- fournir un panel le plus représentatif possible des exercices-types, compétences et notions, sur chaque chapitre ;
- donner, pour chaque exercice, d'une part une rédaction exemplaire conforme aux attendus des épreuves écrites – tout en mettant en relief les canevas susceptibles de resservir –, d'autre part une explicitation des démarches inductives et déductives sous-jacentes – afin d'entraîner l'esprit des lecteurs à aborder des exercices originaux.

Enfin, nous souhaitons ici remercier les auteurs historiques, sur le travail desquels nous nous sommes fondés pour cette édition : Julien Freslon, Sylvain Gugger, Jérôme Poineau et Daniel Fredon.

Les auteurs,

Pierre BERNARD
(coordonnateur, référent $\text{T}_\text{E}_\text{X}$)

Mathieu MANSUY
(référent PC et probabilités)

Oscar DEVYS
(référent MP)

Anne-Charline CHALMIN
(référente PSI)

Marie VIRAT
(référente PT)

Structure de l'ouvrage

Le livre est divisé en 15 chapitres, chacun étant consacré à une partie du programme. Nous avons regroupé les chapitres selon les thèmes classiques : Algèbre, Topologie, Analyse et Probabilités. Au sein d'un même chapitre, les exercices, classés par ordre croissant de difficulté, ont été choisis de façon à passer en revue les notions à connaître, mais aussi à présenter les techniques susceptibles d'être utilisées.

En ce qui concerne les corrections, nous avons choisi de séparer clairement la réflexion préliminaire, comprenant analyse du problème et tâtonnements, de la rédaction finale, rigoureuse et précise. Cette dernière étape est signalée, dans le texte, par la présence d'un liseré gris sur la gauche et du pictogramme . Insistons sur le fait que nous ne prétendons nullement présenter l'unique cheminement permettant d'aboutir à la solution d'un exercice donné, ni la seule rédaction acceptable. Dans les deux cas, bien des possibilités existent.

Par ailleurs, lorsque nous avons souhaité mettre en lumière un point important, nous l'avons rédigé sur un fond grisé et indiqué par . De même, la présence d'un piège dont il faut se méfier est signalée par .

Cet ouvrage a été rédigé en vue d'une utilisation thématique, c'est-à-dire non linéaire :

- De manière intuitive, un étudiant qui veut approfondir un chapitre particulier s'attellera aux exercices du chapitre en question. Parfois, un exercice utilisera des notions d'autres chapitres pas encore étudiés ; dans ce cas l'énoncé de l'exercice le rappellera.
- De manière plus précise, il se référera à l'index en fin d'ouvrage, afin d'aller directement travailler les notions de son choix. Ainsi, un étudiant qui voudrait travailler spécifiquement l'utilisation du *lemme des coalitions* en probabilités n'aura pas besoin de feuilleter tous les exercices de la quatrième partie, mais pourra se contenter de chercher l'entrée « coalitions (lemme des) » de l'index qui le renverra directement aux exercices mentionnant cette notion.

Remerciements

Pierre BERNARD et Anne-Charline CHALMIN souhaitent remercier leurs collègues du lycée Saliège :

- Mathieu LEROY-LERÊTRE, pour ses conseils sur T_EX,
- Emmanuel ROBIN, pour son expertise sur les programmes.

Mathieu MANSUY souhaite remercier Amandine POLET pour ses nombreux conseils, et a une pensée pour sa grand-mère Françoise.

Marie VIRAT souhaite remercier Dédé, Steph, Émeraude, Caro, Nicolas et Pierre pour leur soutien, leurs encouragements et leurs réflexions dans la réalisation de cet ouvrage.

Partie 1

Algèbre

Algèbre linéaire

Exercice 1.1 : Utilisation des polynômes de Lagrange

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tels que, pour tout $x \in [0, n]$, $|P(x)| \leq 1$.
Montrer que :

$$|P(-1)| \leq 2^{n+1} - 1 \quad \text{et} \quad |P(n+1)| \leq 2^{n+1} - 1.$$

Les polynômes de Lagrange sont au programme de MPSI. C'est un outil puissant qu'il faut savoir invoquer sans qu'on vous le demande. Le point essentiel qu'il convient de souligner dans la rédaction est que les $n+1$ réels sont distincts.

On peut alors exprimer P en fonction des $P(i)$ (de valeur absolue plus petite que 1) et des L_i . Il ne reste plus qu'à majorer les $|L_i(-1)|$ et $|L_i(n+1)|$.



Considérons la famille $(a_0, a_1, \dots, a_n) = (0, 1, \dots, n)$. Ces $n+1$ réels sont distincts deux à deux, donc on peut leur associer les polynômes $L_0, \dots, L_n$ d'interpolation de Lagrange. Il vient alors :

$$P = \sum_{i=0}^n P(a_i) L_i = \sum_{i=0}^n P(i) L_i.$$

Soit $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Alors, on obtient :

$$\begin{aligned} |L_i(-1)| &= \left| \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{-1-j}{i-j} \right| = \prod_{j=0}^{i-1} \frac{j+1}{i-j} \prod_{j=i+1}^n \frac{j+1}{j-i} \\ &= \prod_{j=0}^{i-1} (j+1) \prod_{j=0}^{i-1} \frac{1}{i-j} \prod_{j=i+1}^n (j+1) \prod_{j=i+1}^n \frac{1}{j-i} \\ &= i! \times \frac{1}{i!} \times \frac{(n+1)!}{(i+1)!} \times \frac{1}{(n-i)!} = \frac{(n+1)!}{(i+1)!(n-i)!} \\ &= \binom{n+1}{i+1}. \end{aligned}$$

Ainsi, par l'inégalité triangulaire, on en déduit :

$$\begin{aligned} |P(-1)| &= \left| \sum_{i=0}^n P(i)L_i(-1) \right| \leq \sum_{i=0}^n |P(i)L_i(-1)| \leq \sum_{i=0}^n \binom{n+1}{i+1} \\ &\leq \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n+1}{i} = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} - 1 = 2^{n+1} - 1. \end{aligned}$$

De même, on trouve :

$$\begin{aligned} |L_i(n+1)| &= \left| \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{n+1-j}{i-j} \right| = \prod_{j=0}^{i-1} \frac{n+1-j}{i-j} \prod_{j=i+1}^n \frac{n+1-j}{j-i} \\ &= \prod_{j=0}^{i-1} (n+1-j) \prod_{j=0}^{i-1} \frac{1}{i-j} \prod_{j=i+1}^n (n+1-j) \prod_{j=i+1}^n \frac{1}{j-i} \\ &= \frac{(n+1)!}{(n+1-i)!} \times \frac{1}{i!} \times (n-i)! \times \frac{1}{(n-i)!} \\ &= \frac{(n+1)!}{i!(n+1-i)!} = \binom{n+1}{i}. \end{aligned}$$

Puis, par l'inégalité triangulaire, on obtient :

$$\begin{aligned} |P(n+1)| &= \left| \sum_{i=0}^n P(i)L_i(n+1) \right| \leq \sum_{i=0}^n |P(i)L_i(n+1)| \\ &\leq \sum_{i=0}^n \binom{n+1}{i} = 2^{n+1} - 1. \end{aligned}$$



On aurait également pu appliquer le résultat concernant $P(-1)$ au polynôme $Q(X) = P(n-X)$, qui satisfait les mêmes hypothèses que P .

Exercice 1.2 : Somme de projecteurs

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et $p_1, \dots, p_n$ des projecteurs de E tels que $p_1 + \dots + p_n = \text{Id}_E$.

1. Montrer que, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\text{rg}(p_i) = \text{tr}(p_i)$.
2. Montrer que $E = \text{Im}(p_1) \oplus \dots \oplus \text{Im}(p_n)$.

1. L'idée immédiate pour calculer la trace de l'un des p_i est de déterminer sa matrice dans une base de E . On choisit une base adaptée à la décomposition $E = F_i \oplus G_i$, si p_i projette sur F_i parallèlement à G_i .



Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Notons F_i et G_i les sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F_i \oplus G_i$, et tels que p_i projette sur F_i parallèlement à G_i .

Soit $q \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ tel que $(e_1, \dots, e_q)$ est une base de F_i et $(e_{q+1}, \dots, e_n)$ une base de G_i . Alors $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E .

D'une part, pour $k \in \llbracket 1, q \rrbracket$, $p_i(e_k) = e_k$. D'autre part, pour $k \in \llbracket q+1, n \rrbracket$, $p_i(e_k) = 0$. Par conséquent, la matrice de p_i dans la base $(e_1, \dots, e_n)$ est :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(p_i) = \begin{pmatrix} I_q & O_{q, n-q} \\ O_{n-q, q} & O_{n-q, n-q} \end{pmatrix}.$$

Il en découle que $\text{tr}(p_i) = q = \dim(F_i) = \dim(\text{Im}(p_i)) = \text{rg}(p_i)$.



Il est toujours utile de se souvenir que, si p est un projecteur, il projette sur $F = \text{Im}(p)$ parallèlement à $G = \text{Ker}(p)$.

2. La question précédente nous donne immédiatement une information sur les dimensions : la somme des rangs de p_i est la somme de leur trace, qui est $\text{tr}(\text{Id}_E)$ (par linéarité de la trace) donc qui vaut $d = \dim(E)$.

Il suffit donc de montrer que la somme est directe, ou qu'elle vaut E . L'hypothèse nous permettra de montrer plus facilement le fait qu'elle vaut E .



Soit $x \in E$. Alors $x = p_1(x) + \dots + p_n(x)$ par hypothèse. Ceci se traduit par :

$$x \in \text{Im}(p_1) + \dots + \text{Im}(p_n).$$

Comme $\text{Im}(p_1) + \dots + \text{Im}(p_n)$ est clairement inclus dans E , on en déduit que :

$$\text{Im}(p_1) + \dots + \text{Im}(p_n) = E.$$



De manière générale, seule l'inclusion directe est vraie :

$$\text{Im}(p_1 + \dots + p_n) \subset \text{Im}(p_1) + \dots + \text{Im}(p_n).$$



D'autre part, comme tr est linéaire, on obtient :

$$\text{tr}(p_1) + \dots + \text{tr}(p_n) = \text{tr}(p_1 + \dots + p_n) = \text{tr}(\text{Id}_E) = \dim(E).$$

Or, d'après la question précédente, $\text{rg}(p_1) + \dots + \text{rg}(p_n) = \dim(E)$. Par conséquent, l'égalité suivante est vérifiée :

$$\dim(\text{Im}(p_1) + \dots + \text{Im}(p_n)) = \dim(\text{Im}(p_1)) + \dots + \dim(\text{Im}(p_n)).$$

Donc cette somme est directe. En conclusion, on obtient bien :

$$E = \text{Im}(p_1) \oplus \dots \oplus \text{Im}(p_n).$$

Exercice 1.3 : Calcul par blocs

Soit $(n, r) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang r , décomposée par blocs sous la forme :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad \text{où } A \in GL_r(\mathbb{K}).$$

1. Montrer que, pour tout vecteur colonne $Y \in \mathcal{M}_{n-r,1}(\mathbb{K})$, il existe un vecteur colonne $X \in \mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{K})$ tel que :

$$M \begin{pmatrix} O_{r,1} \\ Y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} X \\ O_{n-r,1} \end{pmatrix}.$$

2. En déduire que $D = CA^{-1}B$.

1. Notons tout d'abord que comme A est de taille $r \times r$, nécessairement B est de taille $r \times (n - r)$, C est de taille $(n - r) \times r$ et D est de taille $(n - r) \times (n - r)$.

On peut commencer par chercher X de manière pratique, en effectuant les produits par blocs. On se rend cependant vite compte que le calcul sera utile dans la question suivante, pour montrer que $D = CA^{-1}B$, mais ne permettra pas de répondre à cette première question. Il faut ici montrer l'existence de X de manière théorique.

Pour Y donné, le premier produit est une combinaison linéaire des $n - r$ dernières colonnes de M . Le second produit correspond à une combinaison linéaire des r premières. Il faut donc montrer que toute combinaison linéaire de colonnes de A peut s'exprimer comme combinaison linéaire des r premières.

Par hypothèse, la matrice A est inversible. Ainsi, ses colonnes forment une famille libre dans $\mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{K})$. Il en est donc de même des r premières colonnes de M . Comme M est de rang r , cette famille libre est en fait une base de l'espace vectoriel engendré par les colonnes de M .



Notons $M_1, \dots, M_n$ les n colonnes de M , $A_1, \dots, A_r$ celles de A et $C_1, \dots, C_r$ celles de C .

Comme A est inversible, $(A_1, \dots, A_r)$ est libre dans $\mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{K})$. Montrons que la famille $(M_1, \dots, M_r)$ est libre dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$: soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{K}^r$ tel que $\lambda_1 M_1 + \dots + \lambda_r M_r = O_{n,1}$.

En calculant par blocs, il vient :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_r A_r \\ \lambda_1 C_1 + \dots + \lambda_r C_r \end{pmatrix} = O_{n,1}.$$

En particulier $\lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_r A_r = O_{r,1}$ donc, comme $(A_1, \dots, A_r)$ est libre, $\lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0$.

Ainsi la famille $(M_1, \dots, M_r)$ est libre dans l'espace $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, donc dans l'espace $F = \text{Vect}(M_1, \dots, M_n)$. Comme $\dim(F) = \text{rg}(M) = r$, $(M_1, \dots, M_r)$ est une base de F .

Soit $Y \in \mathcal{M}_{n-r,1}(\mathbb{K})$ tel que $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{n-r} \end{pmatrix}$. Alors, on trouve :

$$M \begin{pmatrix} O_{r,1} \\ Y \end{pmatrix} = y_1 M_{r+1} + \cdots + y_{n-r} M_n \in F.$$

Le vecteur $M \begin{pmatrix} O_{r,1} \\ Y \end{pmatrix}$ admet donc des coordonnées dans la base $(M_1, \dots, M_r)$. Notons-les $(x_1, \dots, x_r)$. Il vient alors :

$$M \begin{pmatrix} O_{r,1} \\ Y \end{pmatrix} = x_1 M_1 + \cdots + x_r M_r = M \begin{pmatrix} X \\ O_{n-r,1} \end{pmatrix} \text{ en notant } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}.$$

2. On exploite ici la question précédente en effectuant le calcul par blocs.



Notons que le nombre de lignes de X est égal au nombre de colonnes de A et aussi égal au nombre de colonnes de C , et que le nombre de lignes de Y est égal au nombre de colonnes de B et aussi égal au nombre de colonnes de D . Cette remarque essentielle rend licite le calcul par blocs.



Soit $Y \in \mathcal{M}_{n-r,1}(\mathbb{K})$. D'après la question précédente, il existe $X \in \mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{K})$ tel que :

$$M \begin{pmatrix} O_{r,1} \\ Y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} X \\ O_{n-r,1} \end{pmatrix}.$$

En calculant par blocs, on obtient :

$$M \begin{pmatrix} O_{r,1} \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} BY \\ DY \end{pmatrix} \text{ et } M \begin{pmatrix} X \\ O_{n-r,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AX \\ CX \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, $BY = AX$ et $DY = CX$. Comme A est inversible, la première relation donne $X = A^{-1}BY$. On en déduit que $DY = (CA^{-1}B)Y$.

Soit $i \in \llbracket 1, n-r \rrbracket$. Considérons le vecteur $Y_i \in \mathcal{M}_{n-r,1}(\mathbb{K})$ qui a tous ses coefficients nuls, sauf celui de position i qui vaut 1. En appliquant l'égalité précédente à Y_i , il vient $DY_i = (CA^{-1}B)Y_i$, ce qui implique que les matrices D et $CA^{-1}B$ ont même i -ème colonne. En conclusion $D = CA^{-1}B$.

Exercice 1.4 : Propriétés de la trace

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On se place dans le $\mathbb{K}$ -espace vectoriel $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. En s'aidant des matrices élémentaires, déterminer une base de $\text{Ker}(\text{tr})$.
2. En déduire que $\text{Ker}(\text{tr}) = \text{Vect}(\{AB - BA \mid (A, B) \in E^2\})$.
3. Soit $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ une forme linéaire vérifiant :

$$\forall (A, B) \in E^2, \quad \varphi(AB) = \varphi(BA).$$

Montrer que φ est colinéaire à tr .

1. La trace étant une forme linéaire non nulle, son noyau est un hyperplan, donc de dimension $n^2 - 1$. Il suffit donc de trouver une famille libre composée de $n^2 - 1$ matrices pour en avoir une base.

L'énoncé nous invite à utiliser les matrices élémentaires $E_{i,j}$, dont tous les coefficients valent 0 sauf celui en position (i, j) qui vaut 1. Si $i \neq j$, il est clair que $\text{tr}(E_{i,j}) = 0$. Ceci nous fait déjà $n^2 - n$ matrices. Il en manque $n - 1$, que l'on construit comme combinaison linéaire des $E_{i,i}$ (pour que la famille obtenue soit libre), par exemple les $E_{i,i} - E_{n,n}$ pour i entre 1 et $n - 1$.



L'application tr est une forme linéaire non nulle de E , par conséquent son noyau est un hyperplan de E . Donc $\dim(\text{Ker}(\text{tr})) = n^2 - 1$.

D'une part, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ tel que $i \neq j$, $\text{tr}(E_{i,j}) = 0$. Ainsi, la famille $\bigcup_{1 \leq i \neq j \leq n} \{E_{i,j}\}$ est incluse dans $\text{Ker}(\text{tr})$ et comporte $n^2 - n$ éléments.

D'autre part, pour tout $i \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$, $\text{tr}(E_{i,i} - E_{n,n}) = 0$. Ainsi, la famille $\bigcup_{1 \leq i \leq n-1} \{E_{i,i} - E_{n,n}\}$ est incluse dans $\text{Ker}(\text{tr})$ et comporte $n - 1$ éléments.

Notons $\mathcal{F}$ la réunion des deux familles précédentes. Alors $\mathcal{F}$ est une famille de $n^2 - 1$ éléments de $\text{Ker}(\text{tr})$. Montrons qu'elle est libre dans E .

Soient $(\lambda_{i,j})_{1 \leq i \neq j \leq n} \in \mathbb{K}^{n^2 - n}$ et $(\mu_1, \dots, \mu_{n-1}) \in \mathbb{K}^{n-1}$ tels que :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \lambda_{i,j} E_{i,j} + \sum_{k=1}^{n-1} \mu_k (E_{k,k} - E_{n,n}) = 0.$$

Alors :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \lambda_{i,j} E_{i,j} + \sum_{k=1}^{n-1} \mu_k E_{k,k} - \left(\sum_{k=1}^{n-1} \mu_k \right) E_{n,n} = 0.$$

La famille $(E_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ étant une base de E , elle est libre. Donc tous les $\lambda_{i,j}$ sont nuls, ainsi que tous les μ_i pour $i \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$. Ainsi $\mathcal{F}$ est libre. Comme elle contient $n^2 - 1 = \dim(\text{Ker}(\text{tr}))$ éléments, c'est donc une base de $\text{Ker}(\text{tr})$.

2. Nous devons montrer que $\text{Ker}(\text{tr})$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de matrices de la forme $AB - BA$. Il s'agit d'une égalité d'ensembles, on peut donc montrer deux inclusions.

La première vient du fait que $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ pour tout $(A, B) \in E^2$. Par linéarité de tr , il vient alors $\text{tr}(AB - BA) = 0$.

Pour la seconde, on utilise la question précédente en montrant que tous les éléments de la base de $\text{Ker}(\text{tr})$ qu'on a trouvée peuvent s'écrire sous la forme $AB - BA$. Pour ce faire, il faut se souvenir de la formule $E_{i,j}E_{k,l} = \delta_{j,k}E_{i,l}$ où $\delta_{j,k}$ est le symbole de Kronecker, qui vaut 0 si $j \neq k$, 1 si $j = k$.



Procédons par double inclusion.

- Soit $(A, B) \in E^2$. Alors $\text{tr}(AB - BA) = \text{tr}(AB) - \text{tr}(BA) = 0$.

Ainsi $AB - BA \in \text{Ker}(\text{tr})$. Comme $\text{Ker}(\text{tr})$ est stable par combinaison linéaire, on en déduit que :

$$\text{Vect}(\{AB - BA \mid (A, B) \in E^2\}) \subset \text{Ker}(\text{tr}).$$

- Réciproquement :

Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, tel que $i \neq j$. Alors $E_{i,j} = E_{i,i}E_{i,j} - E_{i,j}E_{i,i}$.

Soit $k \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$. Alors $E_{k,k} - E_{n,n} = E_{k,n}E_{n,k} - E_{n,k}E_{k,n}$.

Ainsi tous les éléments de la base de $\text{Ker}(\text{tr})$ déterminée dans la question précédente peuvent s'écrire sous la forme $AB - BA$, avec $(A, B) \in E^2$.

Tout élément de $\text{Ker}(\text{tr})$ est donc combinaison linéaire de matrices de cette forme ; par conséquent :

$$\text{Ker}(\text{tr}) \subset \text{Vect}(\{AB - BA \mid (A, B) \in E^2\}).$$

En conclusion, $\text{Ker}(\text{tr}) = \text{Vect}(\{AB - BA \mid (A, B) \in E^2\})$.

3. Si φ est nulle, alors $\varphi = 0 \text{ tr}$. Sinon, elle vérifie $\varphi(AB - BA) = 0$ par linéarité et $\text{Ker}(\varphi)$ contient tous les éléments de la forme $AB - BA$, donc leurs combinaisons linéaires, donc $\text{Ker}(\text{tr})$. Comme $\text{Ker}(\text{tr})$ est de dimension $n^2 - 1$, un supplémentaire de $\text{Ker}(\text{tr})$ dans E est de dimension 1. On peut prendre par exemple $\mathbb{K}E_{1,1}$. On détermine alors la valeur de λ telle que $\varphi = \lambda \text{ tr}$ en comparant $\varphi(E_{1,1})$ et $\text{tr}(E_{1,1}) = 1$.



Si $\varphi = 0$, alors $\varphi = 0 \text{ tr}$, et le résultat est atteint.

Sinon, par linéarité de φ , pour tout $(A, B) \in E^2$, on obtient :

$$\varphi(AB - BA) = \varphi(AB) - \varphi(BA) = 0.$$

$\text{Ker}(\varphi)$ contient donc toutes les matrices de la forme $AB - BA$, donc toutes leurs combinaisons linéaires. D'après la question précédente, on en déduit que $\text{Ker}(\text{tr}) \subset \text{Ker}(\varphi)$. Or, φ est une forme linéaire non nulle de E , donc son noyau est un hyperplan de E , tout comme celui de tr . Ils sont donc de même dimension, et comme l'un est inclus dans l'autre, ils sont égaux.

Comme $\text{tr}(E_{1,1}) = 1$, $E_{1,1} \notin \text{Ker}(\text{tr})$ et $\text{Ker}(\text{tr}) \cap (\mathbb{K}E_{1,1}) = \{O_n\}$. Comme $\dim(\text{Ker}(\text{tr})) + \dim(\mathbb{K}E_{1,1}) = n^2 = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$, on en déduit que :

$$\text{Ker}(\text{tr}) \oplus \mathbb{K}E_{1,1} = \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$