

S'aventurer au pays des Mathématiques

4^e

Avec un guide
et 40 problèmes originaux à explorer

Matthieu Chiamonte

ellipses



S'aventurer au pays des Mathématiques

Matthieu Chiaramonte

Professeur de mathématiques au collège Denis Diderot (Massy)



Conception graphique intérieur : Sylvie CIOFLAN

Mise en pages : Lise GARREAU

ISBN 9782340-112131

Dépôt légal : janvier 2026

©Ellipses Édition Marketing S.A.

8/10 rue la Quintinie 75015 Paris



Le Code de la propriété intellectuelle et artistique n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article L. 122-5, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite » (alinéa 1^{er} de l'article L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr



SOMMAIRE

Sommaire	3
Préambule	7
L'aventure intellectuelle	7
Comment travailler avec ce livre ?	7
I Représenter pour mieux régner	11
A. Multiplication et division de nombres relatifs	14
a) Notion d'opposé	14
b) Multiplication	15
c) Division	17
B. Dépendance entre deux grandeurs	19
a) Notions d'image et d'antécédent	19
b) Différentes représentations	20
Des interrogations à chronométrer	25
D'autres problèmes à explorer	26
Les corrections pour progresser	29
II L'horizon de Khéops I	39
A. Pourcentages	43
a) Prendre un pourcentage d'une quantité	43
b) Pourcentage d'évolution	44
B. Autres exemples de grandeurs produit	47
a) L'énergie	47
b) Le trafic	47
C. Calculs de volume et repérage dans l'espace	48
a) La pyramide	49
b) Le cône de révolution	50
c) Repérage d'un point dans l'espace	52
Des interrogations à chronométrer	54
D'autres problèmes à explorer	56
Les corrections pour progresser	59
III Le crible d'Ératosthène	69
A. Le crible d'Ératosthène	73
B. Multiplication et division de nombres en écriture fractionnaire	74
a) Qu'est-ce qu'un nombre rationnel ?	74
b) Multiplication	77
c) Division	78

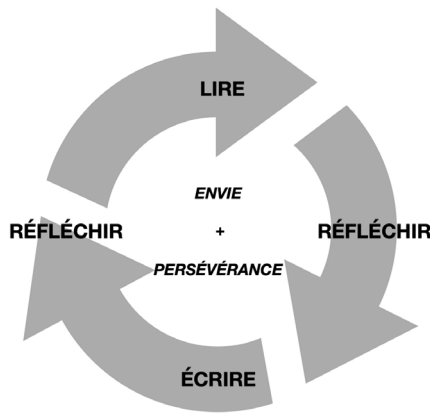
C. Probabilités.....	80
a) Rappels.....	80
b) Notion d'événements contraires.....	81
c) Notion de loi de probabilité.....	82
d) Situation de non-équiprobabilité.....	82
Des interrogations à chronométrer.....	84
D'autres problèmes à explorer.....	85
Les corrections pour progresser.....	88
IV Voyager avec Voyager	105
A. Égalité, identité, formule ou équation ?.....	109
a) Égalité.....	109
b) Identité.....	109
c) Formule.....	110
d) Équation.....	111
B. La proportionnalité.....	113
a) Représentation par une formule.....	113
b) Représentation par un graphique.....	114
c) L'égalité des produits en croix.....	114
Des interrogations à chronométrer.....	115
D'autres problèmes à explorer.....	117
Les corrections pour progresser.....	119
V L'horizon de Khéops II	127
A. Agrandissement et réduction.....	130
B. Le théorème de Thalès.....	133
Des interrogations à chronométrer.....	136
D'autres problèmes à explorer.....	137
Les corrections pour progresser.....	140
VI S'approcher en dichotomie	151
A. Résolution d'équations.....	155
a) Le principe d'équivalence.....	155
b) Cas particulier : les équations du 1er degré.....	156
B. Programmer avec Scratch I.....	159
a) Rappels.....	159
b) La boucle « Tant que ... Faire ... ».....	160
Des interrogations à chronométrer.....	162
D'autres problèmes à explorer.....	163
Les corrections pour progresser.....	164
VII L'enroulement de la vie	177
A. Puissances entières.....	180
a) D'une base quelconque a.....	180
b) Cas particulier : les puissances de 10.....	182
c) Préfixes scientifiques.....	183
B. Écriture scientifique.....	184

C. Statistiques	185
a) Rappels : la moyenne	185
b) La médiane	185
Des interrogations à chronométrer	188
D'autres problèmes à explorer	188
Les corrections pour progresser	191
VIII Le théorème puzzle	199
A. Deux nouvelles transformations du plan	203
a) La translation	203
b) La rotation	205
B. Notion de racine carrée	206
C. Le théorème de Pythagore	208
Des interrogations à chronométrer	211
D'autres problèmes à explorer	212
Les corrections pour progresser	216
IX Là-haut	227
A. Autres exemples de grandeurs quotient	231
a) La masse volumique	231
b) La concentration	231
B. Programmer avec Scratch II	233
a) Les listes	233
Des interrogations à chronométrer	235
D'autres problèmes à explorer	236
Les corrections pour progresser	238
X To be or not to be right	247
A. Rudiments de logique	250
B. Réciproque du théorème de Thalès	251
a) La contraposée du théorème de Thalès	252
b) La réciproque du théorème de Thalès	252
C. Réciproque du théorème de Pythagore	254
a) La contraposée du théorème de Pythagore	254
b) La réciproque du théorème de Pythagore	255
Des interrogations à chronométrer	256
D'autres problèmes à explorer	257
Les corrections pour progresser	259
INDEX	267



L'aventure intellectuelle

L'aventure intellectuelle est un savant mélange entre lecture, réflexion et écriture : on lit pour découvrir de nouvelles choses ; puis on réfléchit pour essayer de les comprendre ou pour en trouver à son tour ; puis on écrit pour les faire siennes, pour continuer de réfléchir ou pour transmettre à son tour ; puis on lit autre chose ; etc.
C'est une roue qui doit tourner sur elle-même :



Pour qu'elle puisse tourner convenablement, il faut y mettre de l'envie et de la persévérance car il y a toujours des moments plus difficiles, mais dites-vous que cela signifie qu'il y a des choses à comprendre ! Il faut alors rester patient et continuer à faire tourner la roue, même si cela demande souvent beaucoup de temps.

Ce livre a été écrit pour vous aider à faire tourner cette roue dans le domaine des mathématiques : lisez bien jusqu'à la fin du préambule afin de comprendre comment l'utiliser et travailler avec !

Comment travailler avec ce livre ?

Ce livre a pour but de recentrer l'apprentissage des mathématiques sur la résolution de problèmes intéressants et consistants (que ce soit des problèmes internes aux mathématiques ou appliqués aux sciences et à la vie courante) sans négliger la rigueur des leçons (avec la recherche de nombreuses démonstrations) et la maîtrise technique à acquérir.

Il est composé de 10 Aventures : elles doivent être faites de préférence dans l'ordre car elles suivent une progression réfléchie des notions et les problèmes réutilisent souvent

des connaissances et savoir-faire des Aventures précédentes.

Chaque Aventure démarre par un problème original à chercher dont la résolution nécessite la maîtrise des connaissances et savoir-faire qui seront travaillés tout au long de l'Aventure en question : c'est donc tout à fait normal de ne pas réussir à le résoudre dès la première recherche ! Cette première recherche permet de se confronter et s'habituer à ne pas toujours réussir en mathématiques et comprendre qu'il est normal de ne pas savoir et faire des erreurs : il ne faut pas en avoir peur, on progresse et comprend en faisant fausse route et des erreurs, et en s'y confrontant, et pour cela il faut de la patience et de la persévérance pour dépasser cette frustration. Ce problème devra ensuite être cherché à nouveau à la fin de l'Aventure, ce qui vous permettra alors de mesurer vos progrès.

Les trois premières Aventures sont plus longues que les autres car elles terminent de mettre en place les bases nécessaires pour les Aventures suivantes : les opérations de multiplication et division de nombres relatifs et de nombres en écriture fractionnaire, et les bases du raisonnement géométrique avec de nombreuses démonstrations.

Chaque aventure possède une feuille de route à suivre afin de rythmer votre travail : **pour travailler avec ce livre, il vous suffit de vous laisser guider par cette feuille de route en cochant les cases au fur et à mesure et en complétant la date du travail effectué.**

Voici, suivant les cases de la feuille de route, ce qu'il vous faudra fournir comme travail personnel pour réussir :

- Pour **chercher un problème** :

1. Le chercher seul pendant au moins 2 jours (pour la première recherche du problème de l'Aventure, s'arrêter à cette étape et passer à la case suivante).
2. Si on ne trouve pas, écrire ses questions au crayon puis regarder la leçon et/ou en discuter avec sa famille et/ou ses amis et/ou ses professeurs.
3. Si on ne trouve toujours pas, commencer à comparer sa recherche au brouillon avec la correction et s'arrêter dès qu'on pense avoir compris là où on bloquait : patienter au minimum quelques heures et essayer de rédiger la solution tout seul.
4. Comparer sa solution avec la correction en l'écrivant entièrement.

(Certains problèmes peuvent être difficiles : il faut prendre le temps d'en discuter et d'essayer de les comprendre.)

- Pour **lire/recopier et apprendre une partie de la leçon** :

1. Lire attentivement plusieurs fois en essayant de tout comprendre.
2. Recopier les parties demandées en regardant le moins possible : essayer de mémoriser ce qu'on est en train d'écrire.
3. Fermer le cahier et, au minimum quelques heures plus tard, essayer de se résumer de tête ou d'expliquer à quelqu'un ce qu'on vient de comprendre et apprendre.
4. Si des points ne sont pas compris, bien les relire puis mettre une croix au crayon à papier à côté et écrire sa question à poser à sa famille, ses amis et/ou ses professeurs.

5. Le soir même avant de s'endormir puis au réveil, essayer à nouveau de se résumer de tête ce qu'on a compris et appris.
6. Répéter les points précédents jusqu'à tout connaître et comprendre.
7. Chercher au fur et à mesure les démonstrations des propriétés (par exemple une par semaine : pour la partie recherche suivre les mêmes conseils que pour la recherche d'un problème et pour la partie apprentissage suivre les conseils ci-dessus).

(L'enchaînement des Aventures est construite pour permettre une répétition sur le long terme nécessaire à tout apprentissage mais se l'organiser si besoin.)

- Pour **chercher un exercice** :

1. Le chercher seul pendant au moins 1 jour sans regarder la leçon.
2. Si on ne trouve pas, écrire ses questions au crayon puis regarder la leçon et/ou en discuter avec sa famille, ses amis et/ou ses professeurs.
3. Si on ne trouve toujours pas, commencer à comparer sa recherche au brouillon avec la correction et s'arrêter dès qu'on pense avoir compris là où on bloquait : patienter au minimum quelques heures et essayer de rédiger la solution tout seul.
4. Comparer sa solution avec la correction en l'écrivant entièrement.

- pour **réviser une interrogation** :

1. Revoir la leçon (savoir réécrire les propriétés importantes), les exemples (pouvoir les expliquer à quelqu'un) et les exercices (savoir refaire les exercices sans regarder la correction).
2. Patienter au minimum quelques heures et essayer de faire l'interrogation dans la limite de temps indiquée (mettre un minuteur).
3. Si on n'y arrive pas c'est qu'on n'est pas assez entraîné : refaire les deux étapes précédentes jusqu'à réussir l'interrogation dans la limite de temps indiquée (remettre un minuteur).
4. Comparer sa solution avec la correction en l'écrivant entièrement.

Pour chacun de ces points, il faut autant que possible ne pas utiliser la calculatrice : essayer de l'utiliser uniquement lorsque les calculs de tête deviennent trop difficiles ou pour trouver des valeurs approchées.

Pour tout votre travail écrit, vous pouvez suivre ce code couleur :

- En rouge : tous les titres et tous les mots/formules en gras.
- En noir : toutes les remarques et tous les panneaux *ATTENTION*.
- En vert : tous les exemples et toutes les corrections.
- Au crayon : toutes les figures/schémas et toutes vos questions à poser.
- En bleu : tout le reste.

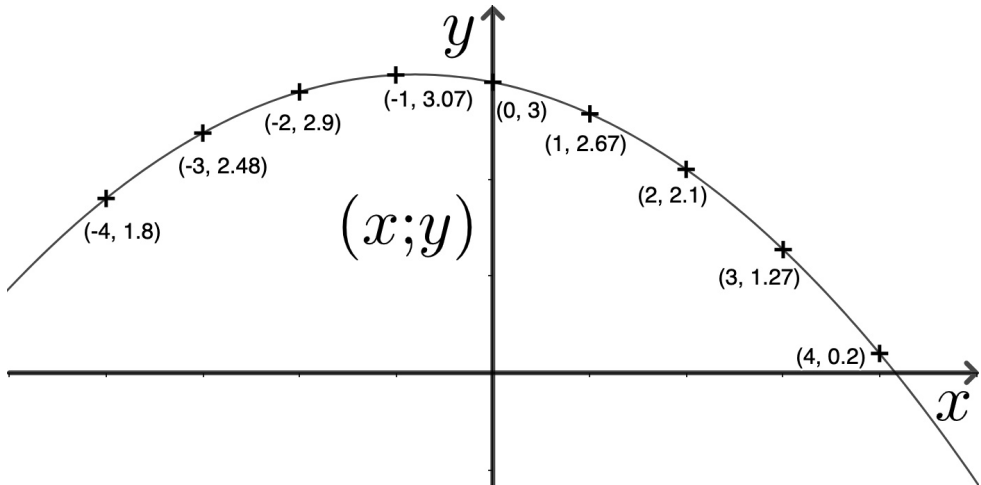
Je vous souhaite une belle aventure au pays des mathématiques de niveau 4^e !

« *Que fais-tu de ton existence ? N'est-elle pas assez inouïe ?* »

Représenter pour mieux régner

« L'art est une représentation, nous ne devons penser qu'à représenter ; il faut que l'esprit de l'artiste soit comme la mer, assez vaste pour qu'on n'en voie pas les bords, assez pur pour que les étoiles du ciel s'y mirent jusqu'au fond. »

Gustave Flaubert, écrivain (1821-1880)



Voici un programme de calcul :

- *Choisir un nombre.*
- *Enlever 1.*
- *Multiplier par -5 .*
- *Diviser par 4.*
- *Ajouter le nombre de départ.*

Quels nombres choisir au départ de ce programme de calcul pour obtenir un résultat entier ?

► *Correction page 33.*

À maîtriser à la fin de cette aventure

- Déterminer l'opposé d'un nombre relatif.
- Multiplier deux nombres relatifs.
- Diviser deux nombres relatifs.
- Connaître la notion d'image.
- Connaître la notion d'antécédent.
- Savoir représenter la dépendance entre deux grandeurs à l'aide d'une formule.
- Savoir représenter la dépendance entre deux grandeurs à l'aide d'un tableau de valeurs.
- Savoir représenter la dépendance entre deux grandeurs à l'aide d'un graphique.

Feuille de route

- ☐ .../... **Chercher** le problème d'introduction de l'Aventure I.
- ☐ .../... **Recopier** la partie A. a) *Notion d'opposé* puis **chercher** l'exercice I.1 puis **comparer** avec la correction.
- ☐ .../... **Lire** la partie A. b) *Démonstration de la propriété de la règle des signes* puis **recopier** la partie b) *Propriété de la règle des signes* puis **chercher** l'exercice I.2 puis **comparer** avec la correction.
- ☐ .../... **Recopier** la partie A. c) *Division* puis **chercher** l'exercice I.3 puis **comparer** avec la correction.
- ☐ .../... **Réviser toute la partie A. puis se tester avec l'interrogation I.1.**
- ☐ .../... **Recopier** la partie B. a) *Notions d'image et d'antécédent.*
- ☐ .../... **Lire** la partie B. b) *Différentes représentations* puis **chercher** l'exercice I.4 puis **comparer** avec la correction.
- ☐ .../... **Réviser toute la partie B. puis se tester avec l'interrogation I.2.**
- ☐ .../... **Chercher à nouveau** le problème de l'Aventure I puis **comparer** avec sa première recherche puis avec la correction.
- ☐ .../... **Chercher** les trois autres problèmes à explorer à la fin de l'Aventure I puis **comparer** avec la correction.

A. Multiplication et division de nombres relatifs

Après l'introduction des nombres négatifs au niveau 5^e et la découverte des règles de calcul pour l'addition et la soustraction, il faut maintenant établir celles pour la multiplication et la division.

Tout comme pour l'écriture fractionnaire, nous déterminons ces règles en cohérence avec les définitions et autres propriétés déjà connues : ici seule la cohérence avec la propriété de la *distributivité de la multiplication sur l'addition* déjà établie pour les nombres positifs va suffire.

Rappel de cette propriété de distributivité que l'on souhaite élargir aux nombres négatifs :

Quels que soient les nombres a , b et k , on a l'égalité suivante :

$$k \times (a + b) = k \times a + k \times b$$

a) Notion d'opposé

La notion d'opposé est incontournable dans l'étude des nombres relatifs, définissons-la plus rigoureusement :

Définition I.1.

Considérons a un nombre relatif.

L'opposé de a est le nombre tel que si on lui ajoute a , on obtient 0 : c'est donc le nombre b tel que $a + b = 0$. On le note $-a$:

L'opposé du nombre a est $-a$.



ATTENTION :

- Si a est négatif alors $-a$ est positif car, puisqu'il s'agit de son opposé, il change de signe : autrement dit **si $a < 0$ alors $-a > 0$** .
- On a l'égalité : $-a = (-1) \times a$.
En effet, d'après la propriété de distributivité :

$$\begin{aligned} a + (-1) \times a &= 1 \times a + (-1) \times a \\ &= \underbrace{(1 + (-1))}_{=0} \times a \\ &= 0 \times a \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc, d'après la définition I.1, $(-1) \times a$ est l'opposé de a donc est égal à $-a$.
On peut ainsi voir la multiplication par -1 comme une opération permettant d'obtenir l'opposé d'un nombre.

Exemples :

- L'opposé du nombre 5 est -5 .
- L'opposé du nombre $-3,7$ est $-(-3,7) = +3,7$.
- L'opposé du nombre x est $-x$: si x est positif alors $-x$ est négatif et, inversement, si x est négatif alors $-x$ est positif.
- En multipliant -2 par -1 on obtient son opposé : $(-1) \times (-2) = -(-2) = +2$.

Exercice I.1.

Déterminer le signe des nombres ou expressions suivantes :

a) $-0,04$

b) $(-1) \times (+1,1)$

c) $-k$

d) $(-1) \times (-n)$

► Correction page 29.

b) Multiplication**Démonstration de la propriété de la règle des signes**

Considérons deux nombres relatifs a et b , et distinguons les différents cas suivant leurs signes :

- Si ils sont **tous les deux positifs** : il n'y a rien à établir puisque ce sont les nombres utilisés depuis toujours et dont les règles opératoires ont déjà été établies (*pour l'écriture décimale, concernant l'écriture fractionnaire il reste à établir celles pour la multiplication et la division, ce que nous verrons lors de l'Aventure III*).
- Si ils sont **de signes contraires** : supposons, sans perte de généralité, que a est positif et b est négatif. Alors, d'après la section précédente, $-b$ est positif et on a donc :

$$\begin{aligned}
 a \times b + a \times (-b) &= a \times \underbrace{(b + (-b))}_{=0} \\
 &= a \times 0 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Ainsi, le produit $a \times b$ est l'opposé du produit $a \times (-b)$, or ce dernier est positif car il s'agit d'un produit de nombres positifs, ce qui implique que le produit $a \times b$ est négatif.

- Si ils sont **tous les deux négatifs**, alors on reproduit le même raisonnement que précédemment mais cette fois-ci sachant que le produit de deux nombres de signes contraires est négatif :

$$\begin{aligned}
 a \times b + a \times (-b) &= a \times \underbrace{(b + (-b))}_{=0} \\
 &= a \times 0 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Ainsi, le produit $a \times b$ est l'opposé du produit $a \times (-b)$, or ce dernier est négatif car il s'agit d'un produit de nombres de signes contraires (en effet a est négatif et $-b$ est positif), ce qui implique que le produit $a \times b$ est positif.

Propriété de la règle des signes

Propriété I.2.

- Si deux nombres relatifs sont de **signes contraires**, alors leur **produit est négatif** et a pour distance à zéro le produit des distances à zéro des deux nombres.
- Si deux nombres relatifs sont de **même signe**, alors leur **produit est positif** et a pour distance à zéro le produit des distances à zéro des deux nombres.

Démonstration : cf. section ci-dessus.

□

Exemples : Calculer les produits de nombres relatifs suivants :

- $\underbrace{(+3) \times (-5)}_{\text{signes contraires}} = \underbrace{-}_{\text{négatif}} \underbrace{(3 \times 5)}_{\text{produit}} = -15$
- $\underbrace{(-3) \times (-5)}_{\text{même signe}} = \underbrace{+}_{\text{positif}} \underbrace{(3 \times 5)}_{\text{produit}} = +15$
- $7 \times (-x) = \underbrace{7 \times (-1)}_{\text{signes contraires}} \times x = \underbrace{-7}_{\text{négatif}} \times x = -7x$
- $-7 \times (-x) = \underbrace{(-7) \times (-1)}_{\text{même signe}} \times x = \underbrace{+7}_{\text{positif}} \times x = 7x$

Exercice I.2.

Calculer les produits suivants :

- a) $(-2, 5) \times 4$ b) $(-5) \times (-20)$ c) $3 \times (-11)$ d) $(-0, 01) \times (-100)$
 e) $(-2) \times 5a$ f) $(-y) \times (-50)$ g) $10 \times (-1, 1k)$ h) $(-7x) \times (-7y)$

► Correction page 29.

c) Division

Comme souvent, la soustraction et la division étant respectivement l'opération inverse de l'addition et de la multiplication, on déduit leurs règles à partir de ces dernières. Mais avant cela, nous devons rappeler la définition d'un quotient (*sur laquelle nous reviendrons plus en détail lors de l'Aventure III*) :

Définition I.3.

Considérons deux nombres relatifs a et b , avec $b \neq 0$.

Le **quotient de a par b** est le nombre q tel que $b \times q = a$: c'est donc le nombre tel que si on le multiplie par b , on obtient le nombre a .

Ce quotient q est noté $\frac{a}{b}$ (écriture fractionnaire) et on a donc l'égalité :

$$b \times \frac{a}{b} = a$$

Le quotient $\frac{a}{b}$ est donc le résultat de la division de a par b .

Cette définition nous permet donc de déduire la propriété de la règle des signes pour la division à partir de celle pour la multiplication :

- si a est positif alors $b \times \frac{a}{b}$ doit être positif donc, d'après la propriété de la règle des signes pour la multiplication, on en déduit que :
 - si b est positif alors $\frac{a}{b}$ doit être positif.
 → Le résultat de la division d'un nombre positif a par un nombre positif b est positif (ce que l'on savait déjà).
 - si b est négatif alors $\frac{a}{b}$ doit être négatif.
 → Le résultat de la division d'un nombre positif a par un nombre négatif b est négatif.
- si a est négatif alors $b \times \frac{a}{b}$ doit être négatif donc, d'après la propriété de la règle des signes pour la multiplication, on en déduit que :
 - si b est positif alors $\frac{a}{b}$ doit être négatif.
 → Le résultat de la division d'un nombre négatif a par un nombre positif b est négatif.
 - si b est négatif alors $\frac{a}{b}$ doit être positif.
 → Le résultat de la division d'un nombre négatif a par un nombre négatif b est positif.

On vient donc d'établir la même règle des signes que pour la multiplication :

Propriété I.4.

- Si deux nombres relatifs sont de **signes contraires**, alors leur **quotient est négatif** et a pour distance à zéro le quotient des distances à zéro des deux nombres.
- Si deux nombres relatifs sont de **même signe**, alors leur **quotient est positif** et a pour distance à zéro le quotient des distances à zéro des deux nombres.

Démonstration : cf. section ci-dessus.



Exemples : Calculer les quotients de nombres relatifs suivants :

$$\bullet \quad \underbrace{\frac{-2}{7}}_{\text{signes contraires}} = \underbrace{-\frac{2}{7}}_{\text{négatif}} \quad (\approx -0,286)$$

$$\bullet \quad \underbrace{\frac{-2}{5}}_{\text{signes contraires}} = -\frac{2}{5} = -0,4 \quad \text{et} \quad \underbrace{\frac{2}{-5}}_{\text{signes contraires}} = \underbrace{-\frac{2}{5}}_{\text{négatif}} = -0,4$$

$$\text{mais} \quad \underbrace{\frac{-2}{-5}}_{\text{même signe}} = \underbrace{+\frac{2}{5}}_{\text{positif}} = 0,4$$

$$\bullet \quad \frac{-3}{n} = \frac{(-1) \times 3}{n} = (-1) \times \frac{3}{n} = -\frac{3}{n} \quad \text{avec } n \neq 0.$$



ATTENTION : On remarque que :

$$\frac{-2}{5} = \frac{2}{-5} = -\frac{2}{5}$$

Nous serons en mesure de démontrer le cas général (avec des lettres) lors de l'Aventure III (voir l'exercice III.4), ce qui nous permettra de compléter l'exemple ci-dessus avec :

$$\frac{3}{-n} = \frac{3}{(-1) \times n} = (-1) \times \frac{3}{n} = -\frac{3}{n}$$

Exercice I.3.

Calculer les quotients suivants :

$$\text{a) } \frac{-2}{5} \quad \text{b) } \frac{-7}{-2} \quad \text{c) } \frac{100}{-4} \quad \text{d) } \frac{-20}{-100} \quad \text{e) } \frac{-5}{x} \text{ avec } x \neq 0 \quad \text{f) } \frac{n}{-10}$$

► Correction page 30.

B. Dépendance entre deux grandeurs

Nous allons dans cette partie commencer à utiliser le vocabulaire mathématique adapté aux situations de dépendance entre deux grandeurs que nous avons commencé à approfondir au niveau 5^e.

a) Notions d'image et d'antécédent

On dit que deux grandeurs sont **dépendantes** l'une de l'autre lorsqu'il est possible de déterminer la valeur de l'une **en fonction de** celle de l'autre.

Selon la situation ou le problème posé, cette dépendance s'exprime souvent dans un sens naturel : on identifie alors une *valeur de départ* et une *valeur d'arrivée*.

L'association entre ces deux valeurs établit un lien *fonctionnel* et traduit alors l'expression « *en fonction de* » : la valeur d'arrivée est appelée **l'image** de la valeur de départ, et réciproquement, la valeur de départ est appelé **un antécédent** de la valeur

d'arrivée.  **ATTENTION :**

- On dit **l'image** de la valeur de départ car on associe qu'une seule valeur d'arrivée à chaque valeur de départ. Il y a donc toujours qu'une seule image à une valeur de départ.
- On dit **un antécédent** de la valeur d'arrivée car il est possible que plusieurs valeurs de départ soient associées à la même valeur d'arrivée. Il peut donc y avoir aucun, un seul ou plusieurs antécédents pour une même valeur d'arrivée.

Exemple : Voici un programme de calcul :

- Choisir un nombre.
- Enlever 2.
- Multiplier par le nombre de départ.
- Ajouter 1.
- Diviser par 4.

Si on choisit le nombre 3 :

- 3
- $3 - 2 = 1$
- $1 \times 3 = 3$
- $3 + 1 = 4$
- $\frac{4}{4} = 1$

on obtient le nombre 1.

On dit alors que 1 est **l'image** de 3 par ce programme de calcul, et que 3 est **un antécédent** de 1 par ce même programme.

Il est clair qu'ici le nombre 3 ne peut avoir que 1 comme image : en effet, le programme traduit un calcul, ce qui donne lieu à un unique résultat et donc à une unique image.

Par contre, 1 n'a pas que 3 comme antécédent. Si on choisit le nombre -1 , on trouve aussi 1 :

- -1
- $(-1) - 2 = -3$
- $(-3) \times (-1) = +3$
- $3 + 1 = 4$
- $\frac{4}{4} = 1$

Le nombre d'arrivée 1 a, pour ce programme de calcul, deux antécédents : 3 et -1 .

(Nous verrons au niveau 3ème une méthode systématique pour chercher tous les antécédents d'un nombre d'arrivée.)

b) Différentes représentations

La formule

La formule exprime la valeur d'arrivée *en fonction* de celle de départ.

On cherche donc à exprimer la valeur d'arrivée *quelle que soit* la valeur de départ : on désigne ainsi la valeur de départ par *une lettre*, qui joue alors le rôle de n'importe quel nombre (*en fonction desquels la valeur d'arrivée a un sens*).

Puisque la valeur de cette lettre *varie*, on l'appelle *variable*. On choisit très souvent la lettre x .

Exemple (suite) : On peut exprimer par une formule la valeur d'arrivée du programme de l'exemple précédent : pour cela, on choisit la lettre x comme valeur de départ, à laquelle on applique le programme avec les règles du calcul littéral, pour obtenir son image *en fonction* de x .

- x
- $x - 2$
- $(x - 2) \times x = x(x - 2)$
- $$\begin{aligned} & x(x - 2) + 1 \\ &= x \times x - x \times 2 + 1 \\ &= x^2 - 2x + 1 \quad (\text{après avoir développé et réduit.}) \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} & \frac{x^2 - 2x + 1}{4} \\ &= \frac{x^2}{4} - \frac{2x}{4} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \quad (\text{après avoir simplifié.}) \end{aligned}$$

En appelant ce programme par la lettre f (pour le mot *fonction*), on résume cette association entre nombre de départ x et son image par la flèche $\mapsto$:

$$f : x \mapsto \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$$

La formule permet le calcul exact des images et antécédents.

Elle permet également d'être réutilisée, et même étudiée : ce sera le début de l'étude des fonctions à partir du niveau 3ème.

Le tableau de valeurs

Le tableau de valeurs organise les données en deux lignes : la première pour les valeurs de départ, correspondant à la lettre x , et la deuxième pour celles d'arrivée, les images.

Exemple (suite) : Pour plusieurs valeurs de départ x , on obtient leur image correspondante :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
Image de x	4	2,25	1	0,25	0	0,25	1

On remarque qu'une même valeur d'arrivée peut avoir plusieurs antécédents : tout comme pour 1, la valeur d'arrivée 0,25 a d'après le tableau au moins deux antécédents (0 et 2).

Le tableau de valeurs permet une lecture directe et facile des images et antécédents, mais il ne donne que des informations partielles.



Il est plus rapide d'utiliser un tableur pour construire un tableau de valeurs :

- Sur la calculatrice (*ici Casio fx-92 collège*) :
 - Première possibilité : le tableau fonction
 1. Appuyer sur les touches : *On* → *Accueil* puis sélectionner *Tabl fonct.*
 2. Appuyer sur la touche *Outils* « $\circ\circ\circ$ » puis sélectionner *Plage du tableau* à l'écran puis saisir la valeur de début et de fin pour x , et le pas d'incrémentation.
(Ici « *Début* : -3 » ; « *Fin* : 3 » et « *Pas* : 1 » car on va de un en un.)
 3. Appuyer sur la touche *Outils* « $\circ\circ\circ$ » puis sélectionner *Défin $f(x)/g(x)$* à l'écran puis sélectionner *défin $f(x)$* puis saisir la formule.
(Ici on saisit « $(1 \div 4) \times x^2 - (1 \div 2) \times x + 1/4$ ».)
 4. Appuyer sur la touche « *EXE* » (*abréviation du verbe "Exécute" en anglais qui signifie exécuter*).
 - Deuxième possibilité : le tableur
 1. Appuyer sur les touches : « *On* » → « *Accueil* » puis sélectionner *Tableur* sur l'écran.
 2. Sur la première ligne, saisir les valeurs de x souhaitées.
(Ici on saisit -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 et 3 .)
 3. Aller sur la cellule A2 puis appuyer sur la touche *Outils* « $\circ\circ\circ$ ».
 4. Saisir la formule.
(Ici on saisit « $(1 \div 4) \times A1^2 - (1 \div 2) \times A1 + 1/4$ ».)
 5. Saisir la plage : la plage désigne les cellules sur lesquelles vous souhaitez appliquer votre formule en correspondance.
(Ici on saisit « *A2* : *H2* ».)
 6. Sélectionner *Confirmer* sur l'écran.
- Sur un logiciel de tableur (*ici GeoGebra*) :
 1. Cliquer sur : *Nouveau* → *Tableur*.
 2. Saisir les valeurs de x souhaitées sur la première ligne 1.
(Ici on saisit -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 et 3 .)
 3. Saisir la formule en remplaçant x par la cellule A1 : Il faut cliquer sur la cellule A1 à chaque fois que l'on souhaite écrire x .
(Ici on saisit « $= (1/4) * A1^2 - (1/2) * A1 + 1/4$ ».)
 4. Cliquer sur le coin en bas à droite de la cellule A2 puis faire glisser jusqu'à la cellule jusqu'où l'on souhaite appliquer la formule : chaque cellule calculera ainsi la formule avec la valeur de x correspondante.
(Ici, par exemple, la formule qui apparaîtra dans la cellule C2 sera « $= (1/4) * C1^2 - (1/2) * C1 + 1/4$ ».)
 5. Sélectionner *Confirmer* sur l'écran.

Le graphique

La représentation graphique s'appuie sur la notion de repérage d'un point dans le plan vue au niveau 5^e.

Pour rappel, le repère *orthonormal* $(O; I, J)$ correspond à deux axes (OI) (*axe des abscisses horizontal*) et (OJ) (*axe des ordonnées vertical*) tel que :

- les droites (OI) et (OJ) sont sécantes en O (le point O est l'origine du repère).
- les droites (OI) et (OJ) sont perpendiculaires (le repère est *orthogonal*).
- les unités de graduation OI et OJ sont égales (le repère est *normé*).

Dans un tel repère, les points O , I et J ont respectivement pour coordonnées $(0; 0)$, $(1; 0)$ et $(0; 1)$. Un point quelconque M du plan de coordonnées $(x; y)$, noté $M(x; y)$, a pour abscisse la valeur x (sur l'axe horizontal (OI)) et pour ordonnée la valeur y (sur l'axe vertical (OJ)).

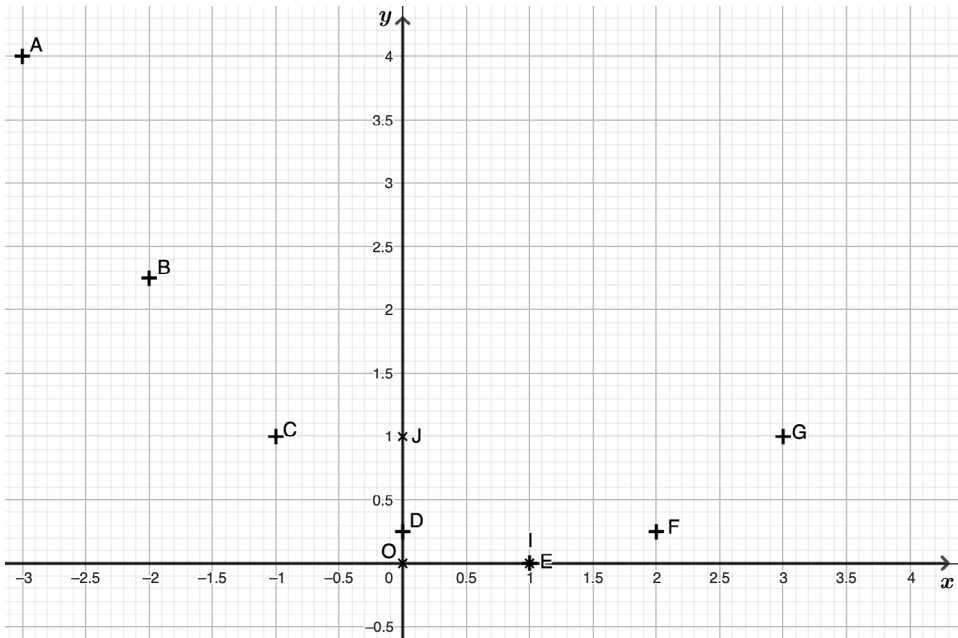
Ainsi :

Définition I.5.

La représentation graphique de la dépendance entre deux grandeurs X et Y dans un repère orthonormé $(O; I, J)$ est l'ensemble des points de coordonnées (x, y) où la valeur y a été déterminée *en fonction* de la valeur x .

Exemple (suite) :

Les valeurs calculées dans le tableau de l'exemple précédent sont les coordonnées de chaque point à placer dans le repère, ce qui constituera une partie du graphique représentant ce programme de calcul : $A(-3; 4)$; $B(-2; 2,25)$; $C(-1; 1)$; $D(0; 0,25)$; $E(1; 0)$; $F(2; 0,25)$ et $G(3; 1)$.



On voit que nous pourrions trouver l'image de chacun des nombres de l'axe des abscisses et ainsi obtenir une infinité de points représentant graphiquement cette dépendance entre les grandeurs X et Y . (On obtiendrait alors une courbe, ce que nous commencerons à étudier avec la notion de fonction au niveau 3ème.)

Exercice I.4.

Voici un programme de calcul :

- Choisir un nombre.
- Diviser par (-5) .
- Ajouter 1.
- Multiplier par le nombre de départ.
- Ajouter 3.

1. Déterminer la formule de ce programme de calcul en fonction de la valeur de départ x .
2. Recopier puis, à l'aide de la calculatrice, compléter le tableau de valeurs suivant :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
Image de x							

3. Tracer la représentation graphique de ce programme de calcul à partir du tableau de valeurs.

► Correction page 30.

Des interrogations à chronométrer

Interrogation I.1. (5 minutes — Sans calculatrice.)1. Quelle expression correspond à l'opposé du nombre $-0,3$?

- ① $(+1) \times (-0,3)$ ② $(-1) \times (+0,3)$ ③ $(-1) \times (-0,3)$

2. Quel est le résultat de la multiplication $(-7) \times (-0,5)$?

- ① $+3,5$ ② $+7,5$ ③ $-3,5$ ④ $-7,5$

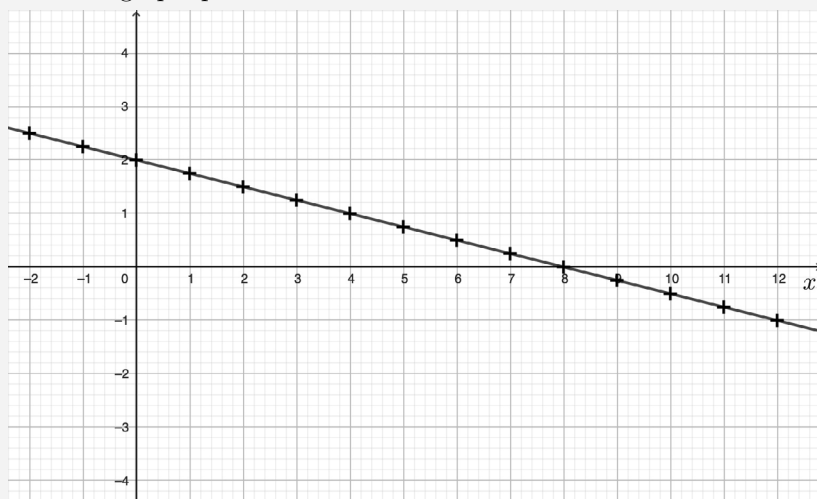
3. Quel est le résultat de la division $\frac{9,2}{-10}$?

- ① -92 ② $+92$ ③ $-0,92$ ④ $+0,92$

► Correction page 32.

Interrogation I.2. (10 minutes — Sans calculatrice.)

Considérons le graphique ci-dessous :



1. Quelle formule correspond au graphique ci-dessus ?

- ① $2x + 8$ ② $-\frac{1}{2}x + 4$ ③ $8x + 2$ ④ $-\frac{1}{4}x + 2$

2. D'après le graphique ci-dessus, quelle est l'image du nombre 12 ?

- ① -1 ② $+1$ ③ On ne peut pas savoir.

3. D'après le graphique ci-dessus, quel est l'antécédent du nombre 1 ?

- ① -4 ② $+4$ ③ On ne peut pas savoir.

► Correction page 32.

D'autres problèmes à explorer

Problème I.5. Corriger la myopie.

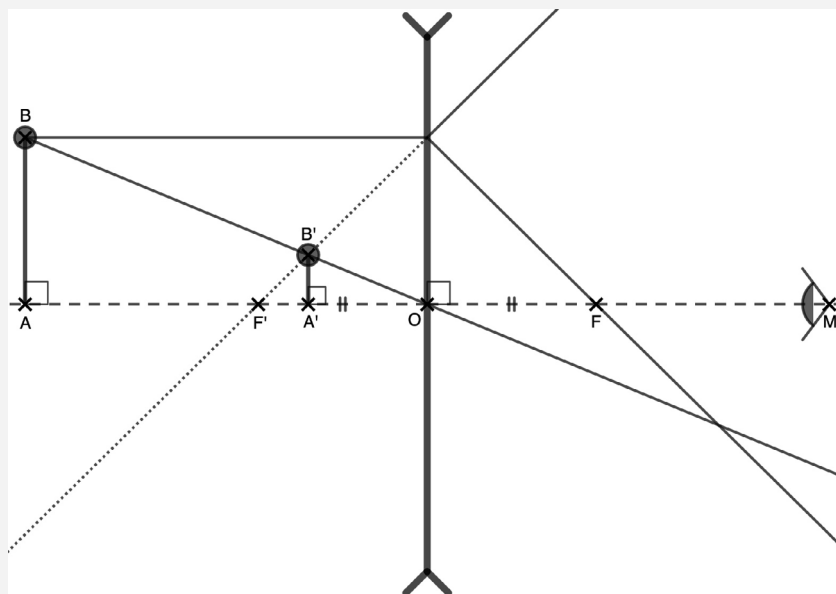
L'étude de la trajectoire des rayons lumineux à travers des lentilles de verre minces (convergentes ou divergentes) et de l'image d'un objet réel ainsi créée, est appelée *l'optique géométrique*.

Une paire de lunettes pour corriger une myopie est constituée de lentilles divergentes.

Dans ce problème, nous allons observer à travers une lentille divergente un objet réel, une bougie représentée par le segment $[AB]$ sur le schéma ci-dessous : l'œil est donc représenté à droite par le point M , et la lumière provient de la bougie à gauche (*attention il s'agit d'un schéma pour comprendre le fonctionnement de la lentille divergente, les tailles et distances ne correspondent donc pas ici à la situation réelle de porter une paire de lunettes*).

Une lentille divergente (contrairement aux convergentes vues lors de l'Aventure III du niveau 5^e) forme l'image de l'objet réel observé du même côté de la lentille que l'objet réel : ici l'image de la bougie $[AB]$ est représentée par le segment $[A'B']$ du même côté de la lentille.

On trouve le point B' en traçant deux rayons de lumière particuliers : le rayon issu de la flamme B qui passe par le centre de la lentille O et qui n'est pas réfracté par la lentille, et le rayon issu de B parallèle à l'axe optique qui est réfracté de sorte qu'il semble provenir du foyer image F' (représenté par le rayon en pointillé). L'intersection des deux donnent alors le point B' image du point B .



Voici les données du problème :

- Le point O est le centre à partir duquel se calcule les *mesures algébriques*