ECG
2e année

Sylvain Rondy
Pierre Berlandi
Gianfranco Niffoi
Nicolas Pierson
Anne-Sophie Pierson-Fertel

PRÉPAS SCIENCES

COLLECTION DIRIGÉE PAR **BERTRAND HAUCHECORNE**

MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES INFORMATIQUE

- Objectifs
- Cours résumé
- Méthodes
- Vrai/faux, erreurs classiques
- Exercices de base et d'approfondissement
- Sujets de concours (écrits, oraux)
- Corrigés détaillés et commentés
- Éléments d'informatique et d'algorithmique avec Python

4e édition

NOUVEAUX PROGRAMMES !

ellipses

PRÉPAS SCIENCES
collection dirigée par Bertrand Hauchecorne

Mathématiques appliquées Informatique ECG - 2e année

4e édition

NOUVEAUX PROGRAMMES

ouvrage coordonné par

Sylvain RONDY
Professeur au lycée Saint Jean (Douai)

Pierre BERLANDI
Professeur au lycée Saint Jean (Douai)

Anne-Sophie PIERSON-FERTEL
Professeur au lycée Saint Jean (Douai)

Gianfranco NIFFOI
Professeur au lycée Saint Michel de Picpus (Paris)

Nicolas PIERSON
Professeur au lycée Saint Jean (Douai)

ellipses

COLLECTION
PRÉPAS SCIENCES

Retrouvez tous les titres de la collection et des extraits sur www.editions-ellipses.fr

Les notices culturelles « un mathématicien » et « un peu d'histoire »
des pages de titre des chapitres ont été rédigées par Bertrand Hauchecorne.

ISBN 9782340-066670
© Ellipses Édition Marketing S.A., 2022
8/10 rue la Quintinie 75015 Paris

DANGER LE PHOTOCOPILLAGE TUE LE LIVRE

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5.2° et 3°a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

Réussir en classes préparatoires nécessite d'assimiler rapidement un grand nombre de connaissances, mais surtout de savoir les utiliser, à bon escient, et les rendre opérationnelles au moment opportun. Bien sûr, l'apprentissage du cours de votre professeur jour après jour est indispensable. Cependant, on constate que pour beaucoup, c'est loin d'être suffisant. Combien d'entre vous ont bien appris leur cours et pourtant se trouvent démunis lors d'un devoir surveillé, et plus grave, le jour du concours.

Cette collection a été conçue pour répondre à cette difficulté. Suivant scrupuleusement le programme, chaque ouvrage est scindé en chapitres, dont chacun correspond, en gros, à une semaine de cours.

Le résumé de cours est là pour vous remettre en mémoire toutes les notions à connaître. Sa relecture est indispensable avant un devoir surveillé ou le passage d'une colle relative au thème traité. Les résultats sont énoncés sans démonstration.

La partie « méthodes » vous initie aux techniques utiles pour résoudre les exercices classiques. Complément indispensable du cours, elle l'éclaire et l'illustre.

La partie « vrai/faux » permet de tester votre recul par rapport au programme et de vous révéler les mauvais réflexes à rectifier. Son corrigé est l'occasion de mettre en garde contre des **erreurs classiques**.

Les exercices sont incontournables pour assimiler le programme et pour répondre aux exigences du concours. Des **indications**, que les meilleurs pourront ignorer, permettront de répondre aux besoins de chacun, selon son niveau. Les **corrigés** sont rédigés avec soin et de manière exhaustive.

Ainsi cet ouvrage vous accompagnera tout au long de l'année et vous guidera dans votre cheminement **vers la réussite aux concours**.

Bertrand Hauchecorne

Sommaire

Troisième semestre

1. Espaces vectoriels 1
2. Applications linéaires 35
3. Applications linéaires et matrices 63
4. Diagonalisation des matrices carrées 107
5. Systèmes différentiels linéaires 155
6. Suites récurrentes – Négligeabilité – Équivalence 181
7. Compléments sur les séries 201
8. Équivalence – Négligeabilité – Développements limités 221
9. Intégrales impropres 249
10. Statistiques bivariées 283
11. Couples de variables aléatoires discrètes 303
12. Lois de somme – Lois de max – Lois de min 331
13. Covariance – Corrélation linéaire 361
14. Suites de variables aléatoires discrètes 399

Quatrième semestre

15. Fonctions de deux variables 433
16. Graphes probabilistes – Chaînes de Markov 475
17. Variables aléatoires à densité 499
18. Lois à densité usuelles 545
19. Loi faible des grands nombres – Convergence en loi 597
20. Estimation 627

■ **Informatique**

21. Bases de données (3e semestre)..... 665
22. Python : compléments graphiques (3e semestre) 701
23. Chaînes de Markov – Estimation avec Python (4e semestre)..... 751

■ **Index** 793

Chapitre 1

Espaces vectoriels

UN MATHÉMATICIEN



Le mathématicien allemand **Hermann Grassmann** mène des études de théologie à Berlin, puis il enseigne les mathématiques dans un lycée de la ville, ensuite à Stettin. Il publie en 1844 un ouvrage qui contient en germe les notions fondamentales de l'algèbre linéaire : combinaisons linéaires, dépendance et indépendance linéaire, bases et dimension.
Les théories de Grassmann, trop précoces pour l'époque, mais aussi très opaques, ne sont pas comprises.

Un peu d'histoire

Depuis que Descartes a introduit en 1637 les coordonnées pour repérer les points, de nombreux raisonnements géométriques se sont effectués par des additions de coordonnées ou par multiplication de ces coordonnées par un nombre.
Jusqu'à la fin du XVIII^{e} siècle, les calculs se faisaient sans se préoccuper de structurer les différents ensembles utilisés. Par la suite, un grand souci de rendre les raisonnements mathématiques plus rigoureux s'est fait jour. Le mathématicien anglais Arthur Cayley a considéré des opérations sur les n-uplets de nombres ; c'était certes pratique et c'est ce que nous faisons dès qu'un repère est fixé mais ce n'était pas satisfaisant pour les changements de bases. Hermann Grassmann a proposé une méthode plus subtile, ne faisant pas appel à une base particulière mais sa formalisation, bien que très intéressante, était trop confuse.

■■ Objectifs

■ Les incontournables

▷ Connaître les espaces vectoriels de référence et leurs dimensions.

▷ Savoir montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel.

▷ Connaître les notions de familles libres et liées.

▷ Connaître la notion de famille génératrice et de sous-espace vectoriel engendré.

■ Et plus si affinités

▷ Savoir déterminer la dimension d'un espace vectoriel "simple".

▷ Savoir déterminer les coordonnées d'un vecteur dans une base.

■■ Résumé de cours

■ Espaces vectoriels

Nous allons développer la notion d'espace vectoriel, introduite dans le cours de 1re année. À cet effet, le lecteur est invité à relire le **chapitre 18** du **tome 1** dans lequel est donnée, entre autres, la définition d'un espace vectoriel (**théorème 18.1** et **définition 18.2**). En première année, le champ d'étude des espaces vectoriels se limite à $\mathbb{R}^n$ avec n entier de $\{1,2,3,4\}$. Le paragraphe ci-dessous présente les espaces vectoriels qui font référence en seconde année. Pour chacun d'eux, sont précisées les lois de composition interne et externe en vigueur dans ces espaces.

❑ Définitions et vocabulaire de base

Définition 1.1. — Soit E un ensemble non vide.
On dit que la loi + est une *loi de composition interne* sur E si : $\forall (x,y)\in E^2,\ x+y\in E$.
On dit que la loi $\cdot$ est une *loi de composition externe* sur E si : $\forall x\in E, \forall \lambda\in\mathbb{R},\ \lambda\cdot x\in E$.

Définition 1.2. — On appelle *espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$ ou plus simplement *espace vectoriel*, tout ensemble E non vide, muni d'une loi de composition interne, notée +, et d'une loi de composition externe, notée $\cdot$, qui vérifient :

- $\forall (x,y)\in E^2,\ x+y=y+x$ (on dit que la loi + est *commutative*).
- $\forall (x,y,z)\in E^3,\ x+(y+z)=(x+y)+z$ (on dit que la loi + est *associative*).
- Il existe un élément de E noté 0_E tel que : $\forall x\in E,\ x+0_E=0_E+x=x$ (0_E est unique et est noté 0 s'il n'y a pas de risque de confusion).
- Pour tout élément x de E, il existe un élément y de E qui vérifie : $x+y=y+x=0_E$ (y est unique et est noté $-x$).
- $\forall (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2,\ \forall x\in E,\ (\lambda\mu)\cdot x=\lambda\cdot(\mu\cdot x)$.
- $\forall (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2,\ \forall x\in E,\ (\lambda+\mu)\cdot x=\lambda\cdot x+\mu\cdot x$
- $\forall \lambda\in\mathbb{R},\ \forall (x,y)\in E^2,\ \lambda\cdot(x+y)=\lambda\cdot x+\lambda\cdot y$.
- $\forall x\in E,\ 1\cdot x=x$.

Vocabulaire 1.1. — Les éléments de E sont appelés *vecteurs* et les réels sont parfois appelés *scalaires*.

❑ Espaces vectoriels de référence

Propriété 1.1. — Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, l'ensemble $\mathbb{R}^n=\{(x_1,x_2,...,x_n),x_1\in\mathbb{R},\ x_2\in\mathbb{R},...,x_n\in\mathbb{R}\}$ est un espace vectoriel.

Remarque 1.1. — L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ a été largement étudié en première année.

Propriété 1.2. — Pour tout (n, p) de $\left(\mathbb{N}^*\right)^2$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel.

Exemple 1.1. — $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel.

Remarque 1.2. — Les lois en vigueur sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ sont l'addition des matrices et la multiplication d'une matrice par un réel. Elles sont présentées aux **définitions 5.3** et **5.4** du **chapitre 5** du **tome 1**.

Propriété 1.3. — L'ensemble des fonctions polynomiales à coefficients réels de degré inférieur ou égal à *n* (*n* étant un entier naturel), noté $\mathbb{R}_n[x]$, est un espace vectoriel.

Remarque 1.3. — Les lois en vigueur sur $\mathbb{R}_n[x]$ sont l'addition des fonctions et la multiplication d'une fonction par un réel. Elles sont présentées à la **définition 4.8** du **chapitre 4** du **tome 1**.

Remarque 1.4. — Plus généralement, l'ensemble $\mathbb{R}[x]$ est aussi un espace vectoriel mais le programme officiel exclut son étude.

❑ Dimension d'un espace vectoriel

Définition 1.3. — Soit *n* un entier naturel non nul. On dit qu'un espace vectoriel *E* est de dimension *n* s'il existe une bijection *f* de *E* sur $\mathbb{R}^n$ qui vérifie :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$$

Remarque 1.4. — On dit que l'application *f* préserve les combinaisons linéaires. Ce type d'application sera étudié dans le **chapitre 2** de ce livre.

Propriété 1.4. — Pour tout *n* de $\mathbb{N}^*$, l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est de dimension *n*.

Remarque 1.5. — Il suffit de considérer l'application identité pour s'en convaincre.

Exemple 1.2. — $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel de dimension 1.

Propriété 1.5. — Pour tout (n, p) de $\left(\mathbb{N}^*\right)^2$, l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est de dimension $n \times p$.

Remarque 1.6. — Il suffit de considérer l'application qui à toute matrice *A* de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ associe le *np*-uplet $\left(a_{1,1},...,a_{1,p},a_{2,1},...,a_{2,p},...,a_{n,1},...,a_{n,p}\right)$ pour s'en convaincre.

Propriété 1.6. — Pour tout n de $\mathbb{N}$, l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[x]$ est de dimension $n+1$.

Remarque 1.7. — Il suffit de considérer l'application qui, à toute fonction polynôme P définie par $P(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, associe le $(n+1)$-uplet $(a_0,a_1,...,a_n)$ pour s'en convaincre.

Dans toute la suite de ce chapitre, la lettre E désigne un espace vectoriel.

❑ Sous-espaces vectoriels

On rappelle la définition et la caractérisation d'un sous-espace vectoriel de E, déjà énoncées dans le livre de 1re année.

Définition 1.4. — On appelle *sous-espace vectoriel* de E ou *sous-espace* de E, toute partie F non vide de E telle que :

- $\forall (x,y)\in F^2,\ x+y\in F$ (on dit que F est stable pour l'addition).
- $\forall (\lambda,x)\in \mathbb{R}\times F,\ \lambda x\in F$ (on dit que F est stable pour la multiplication par un réel).

Théorème 1.1. — F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :

- F est une partie non vide de E.
- $\forall (x,y)\in F^2,\ \forall \lambda\in\mathbb{R},\ \lambda x+y\in F$.

⇨ **Méthode 1.1. Comment montrer, à l'aide de la caractérisation, qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel ?**

Théorème 1.2. — $\{0_E\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E.

Propriété 1.7. — Tout sous-espace vectoriel de E est lui-même un espace vectoriel.

■ Familles de vecteurs

❑ Combinaisons linéaires

Définition 1.5. — Soit E un espace vectoriel et p un entier naturel non nul.
On appelle famille de vecteurs de E tout p-uplet $(e_1,\ldots,e_p)$ formé de p vecteurs de E.

Définition 1.6. — Soit p un entier naturel non nul et $\mathcal{F}=(e_1,\ldots,e_p)$ une famille de p vecteurs de E. On dit qu'un vecteur x de E est *combinaison linéaire* des p vecteurs de $\mathcal{F}$ s'il existe p réels $\lambda_1,\ldots,\lambda_p$ tels que : $x=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i e_i$ (les λ_i sont les *coefficients* de la combinaison linéaire).

Remarque 1.8. — Le vecteur nul est combinaison linéaire de n'importe quels vecteurs.

❑ Familles génératrices

Définition 1.7. — Soit $\mathcal{F} = (e_1, \ldots, e_p)$ une famille de p vecteurs de E. On dit que $\mathcal{F}$ est une *famille génératrice* de E si tout vecteur de E peut s'écrire comme combinaison linéaire de vecteurs de $\mathcal{F}$.

Propriété 1.8. — Soit $\mathcal{F} = (e_1, \ldots, e_p)$ une famille de vecteurs de E. L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de vecteurs de $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de E appelé *sous-espace vectoriel engendré par* $\mathcal{F}$. Il est noté $\text{Vect}\,(e_1, \ldots, e_p)$.

⇨ **Méthode 1.2. Comment montrer, à l'aide d'une famille génératrice, qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel de *E* ?**

Théorème 1.3. — Si $F = \text{Vect}\,(e_1, \ldots, e_{p+1})$ et si e_{p+1} est combinaison linéaire des vecteurs $e_1, \ldots, e_p$, alors $F = \text{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$. En particulier, $\text{Vect}\,(e_1, \ldots, e_p, 0_E) = \text{Vect}\,(e_1, \ldots, e_p)$.

Théorème 1.4. — Si $F = \text{Vect}(\alpha_1 e_1, \ldots, \alpha_p e_p)$ et si les réels $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ sont tous non nuls, alors :

$$F = \text{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$$

❑ Familles libres

Définition 1.8. — Soit $\mathcal{F} = (e_1, \ldots, e_p)$ une famille de p vecteurs de E. On dit que $\mathcal{F}$ est une *famille libre*, ou que les vecteurs $e_1, \ldots, e_p$ sont *linéairement indépendants*, si toute combinaison linéaire nulle de $e_1, \ldots, e_p$ ne peut s'écrire qu'avec des réels tous nuls.

Autrement dit, $\mathcal{F}$ est libre si : $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i = 0 \;\Rightarrow\; \forall i \in [\![1, p]\!],\ \lambda_i = 0$.

Propriété 1.9. — Soit x un vecteur de E.
La famille (x) est libre si, et seulement si, x est différent de 0_E.

Propriété 1.10. — Soit x et y deux vecteurs de E.
La famille (x, y) est libre si, et seulement si, x et y ne sont pas proportionnels (on dit aussi pas colinéaires).

⇨ **Méthode 1.3. Comment étudier la liberté d'une famille ?**

Théorème 1.5. — Toute famille contenue dans une famille libre de E est libre (on dit qu'une *sous-famille* d'une famille libre est libre).

❑ Familles liées

Définition 1.9. — Une famille *liée* est une famille qui n'est pas libre.

Théorème 1.6. — Une famille de vecteurs de E est liée si et seulement si l'un des vecteurs de cette famille est combinaison linéaire des autres (par exemple, toute famille contenant deux fois le même vecteur est liée).

Théorème 1.7. — Toute famille contenant le vecteur nul est liée.

Théorème 1.8. — Toute famille de vecteurs de E qui contient une famille liée est liée.

❑ Bases

Définition 1.10. — Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La famille $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E si, et seulement si, pour tout vecteur x de E, il existe un unique n-uplet $(x_1, \ldots, x_n)$ de réels tel que :

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

⇨ **Méthode 1.4. (1) Comment montrer qu'une famille est une base ?**

Théorème 1.9. — Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une famille de n vecteurs de E.
$\mathcal{B}$ est une *base* de E si, et seulement si, $\mathcal{B}$ est à la fois libre et génératrice de E.

Vocabulaire 1.2. — Les réels $x_1, \ldots, x_n$ sont appelés les *coordonnées* de x dans la base $\mathcal{B}$.

■ Espaces vectoriels et dimension

❑ Théorème de la dimension

Théorème 1.10. — Théorème de la dimension.
Si l'espace vectoriel E possède une base formée de n vecteurs (avec n dans $\mathbb{N}^*$), alors toutes les bases de E ont exactement n vecteurs.

Définition 1.11. — Le nombre n de vecteurs, commun à toutes les bases de E, est appelé *dimension* de E. On dit que E est de dimension n et on note : $\dim E = n$.

Remarque 1.9. — On dit alors que E est de dimension finie.

Remarque 1.10. — Par convention, si l'espace E est réduit au seul vecteur 0_E, $\dim E = 0$.

Vocabulaire 1.2. — Tout espace vectoriel de dimension 1 est appelé *droite*. Tout espace vectoriel de dimension 2 est appelé *plan*.

❑ Base canonique des espaces vectoriels de référence

Propriété 1.11. — Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel de dimension finie et $\dim \mathbb{R}^n = n$. Pour tout i de $[\![1,n]\!]$, en notant $e_i = (0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$ le vecteur de $\mathbb{R}^n$ formé de zéros sauf un 1 en i^{e} position, la famille $(e_1,\ldots,e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$, appelée base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Propriété 1.12. — $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension finie et $\dim \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) = np$.
Pour tout couple (i,j) de $[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]$, en notant $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui à la croisée de la i^{e} ligne et de la j^{e} colonne qui vaut 1, la famille $(E_{i,j})_{1\leq i\leq n,1\leq j\leq p}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, appelée base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Propriété 1.13. — $\mathbb{R}_n[x]$ est un espace vectoriel de dimension finie et $\dim \mathbb{R}_n[x] = n+1$.
Pour tout entier i de $[\![1,n]\!]$, en notant e_i la fonction définie, pour tout réel x, par $e_i(x) = x^i$ (avec $e_0(x) = 1$), la famille $(e_0,e_1,\ldots,e_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$, appelée base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$.

❑ Familles de vecteurs et dimension

Théorème 1.11. — Soit E un espace vectoriel de dimension n.
- Toute famille libre de E possède au plus n vecteurs.
- Toute famille libre de n vecteurs de E est une base de E.

Théorème 1.12. — Soit E un espace vectoriel de dimension n.
- Toute famille génératrice de E possède au moins n vecteurs.
- Toute famille génératrice formée de n vecteurs de E est une base de E.

⇨ **Méthode 1.4. (2) Comment montrer qu'une famille est une base ?**

❑ Sous-espaces vectoriels et dimension

Théorème 1.13. — Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
Tout sous-espace vectoriel F de E est de dimension finie et on a : $\dim F \leq \dim E$.

Théorème 1.14. — Les seuls sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}$ sont $\{0\}$ et $\mathbb{R}$.

Théorème 1.15. — Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
Si F est un sous-espace vectoriel de E tel que $\dim F = \dim E$, alors $F = E$.

Définition 1.12. — Soit E un espace vectoriel et $(e_1,\ldots,e_n)$ une famille de vecteurs de E. On appelle *rang de la famille* $(e_1,\ldots,e_n)$, et on note $\mathrm{rg}(e_1,\ldots,e_n)$, la dimension de $\mathrm{Vect}\,(e_1,\ldots,e_n)$.

Remarque 1.11. — Le rang de $(e_1,\ldots,e_n)$ est égal au cardinal de la plus grande famille libre contenue dans $(e_1,\ldots,e_n)$.

■ Structure d'espace vectoriel

❑ Méthode 1.1. Comment montrer, à l'aide de la caractérisation, qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel ?

Montrer qu'un ensemble F est un sous-espace d'un espace vectoriel E, c'est montrer les points suivants :
- F est une partie de E et F n'est pas vide (on peut vérifier que 0_E appartient à F).
- $\forall (x,y)\in F^2,\ \forall \lambda\in\mathbb{R},\ \lambda x+y\in F$.

⇨ **Exercices 1.1, 1.3, 1.7, 1.9, 1.12, 1.13**

Remarque. Lorsqu'on demande de montrer que F est un espace vectoriel, on cherche à montrer que F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de référence en utilisant la méthode ci-dessus. Puis on conclut que F est lui-même un espace vectoriel selon la **propriété 1.7**.

Exemple 1. Soit $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ x+3y-z=0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

- F est, par définition, inclus dans $\mathbb{R}^3$ et F n'est pas l'ensemble vide car : $0_{\mathbb{R}^3}=(0,0,0)\in F$.
- Soit $u=(x,y,z)$ et $u'=(x',y',z')$ des éléments de F.

On sait, par définition de F, que : $x+3y-z=0$ et $x'+3y'-z'=0$.

De plus, pour tout réel λ, $\lambda u+u'=(\lambda x+x',\lambda y+y',\lambda z+z')$ et on a :

$(\lambda x+x')+3(\lambda y+y')-(\lambda z+z')=\lambda(x+3y-z)+(x'+3y'-z')=0$ donc $\lambda u+u'\in F$.

Conclusion : F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Exemple 2. Montrer que l'ensemble E des matrices symétriques à coefficients réels d'ordre n ($n\in\mathbb{N}^*$) est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- E est bien une partie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et E n'est pas vide puisque la matrice nulle est symétrique.
- Soit deux matrices M et N de E et λ un réel. Montrons que : $\lambda M+N\in E$.

Par propriété de la transposition (voir au **chapitre 5** du **tome 1**), on a : ${}^t(\lambda M+N)=\lambda\,{}^tM+{}^tN$.

Comme M et N sont symétriques, on en déduit : ${}^t(\lambda M+N)=\lambda M+N$, ce qui prouve que la matrice $\lambda M+N$ est symétrique.

E est donc bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

❑ Méthode 1.2. Comment montrer, à l'aide d'une famille génératrice, qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel ?

Pour montrer qu'un ensemble F est un sous-espace d'un espace vectoriel E, on peut montrer que $F = \text{Vect}(e_1,\ldots,e_p)$, où les vecteurs $e_1,\ldots,e_p$ sont des vecteurs de E.

En prime, la famille $\mathcal{F} = (e_1,\ldots,e_p)$ est une famille génératrice de F.

⇨ **Exercices 1.1, 1.2, 1.3, 1.8, 1.9, 1.11, 1.12, 1.14**

Exemple 1. On donne : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $F = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & b \\ b & a+b \end{pmatrix}, (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On remarque que : $F = \left\{ a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \left\{ aI + bJ, (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \text{Vect}(I,J)$.

Comme I et J appartiennent à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. En prime, la famille (I,J) est génératrice de F.

Exemple 2. On reprend l'**exemple 1** de la méthode précédente. On donne :
$F = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x + 3y - z = 0 \right\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

On peut écrire : $F = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x = -3y + z \right\} = \left\{ (-3y+z, y, z), (y,z) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

On en déduit : $F = \left\{ y(-3,1,0) + z(1,0,1), (y,z) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

En posant $u = (-3,1,0)$ et $v = (1,0,1)$, on a : $F = \text{Vect}(u,v)$. Cela montre que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. En prime, la famille (u,v) est génératrice de F.

Exemple 3. On donne : $F = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y + z = 0 \text{ et } x + 2y - 3z = 0 \right\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

On résout le système : $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y - 4z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5z \\ y = 4z \end{cases}$

On peut donc écrire : $F = \left\{ (-5z, 4z, z), z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ z(-5,4,1), z \in \mathbb{R} \right\}$.

En posant $u = (-5,4,1)$, on obtient $F = \text{Vect}(u)$, ce qui montre que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. En prime, la famille (u) est une famille génératrice de F.

■ Les familles de vecteurs

❑ Méthode 1.3. Comment étudier la liberté d'une famille ?

- Si la famille ne contient qu'un seul vecteur x, on utilise la propriété :
(x) est libre si et seulement si x est différent de 0_E.
- Si la famille contient deux vecteurs x et y, on utilise la propriété :
(x, y) est libre si et seulement si x et y ne sont pas proportionnels.
- Dans le cas général, pour savoir si une famille $\mathcal{F} = (e_1, \ldots, e_p)$ est libre, on écrit une combinaison linéaire nulle des vecteurs $e_1, \ldots, e_p$ ($\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i = 0$) et on montre que pour tout i de $[\![1, p]\!]$, $\lambda_i = 0$.
- Ne pas oublier qu'une famille extraite (sous-famille) d'une famille libre est libre.

⇨ **Exercices 1.4, 1.5, 1.6, 1.8 à 1.15**

Exemple 1. Dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on donne : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que la famille (I, J) est libre.
Comme les matrices I et J ne sont pas proportionnelles, on conclut immédiatement que la famille (I, J) est libre.

Exemple 2. Soit $u = (-1, 2, 0)$, $v = (3, -5, -1)$, $w = (0, 1, -2)$ trois vecteurs de l'espace $\mathbb{R}^3$. Montrer que la famille $\mathcal{F} = (u, v, w)$ est libre.
On forme une combinaison linéaire nulle des vecteurs de $\mathcal{F}$: $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$, ce qui donne :
$(-\alpha + 3\beta,\ 2\alpha - 5\beta + \gamma,\ -\beta - 2\gamma) = (0, 0, 0)$. Ceci est équivalent au système (S) $\begin{cases} -\alpha + 3\beta = 0 \\ 2\alpha - 5\beta + \gamma = 0 \\ -\beta - 2\gamma = 0 \end{cases}$.

$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 3\beta \\ \beta = -\gamma \\ \beta = -2\gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 3\beta \\ \beta = -\gamma \\ \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$. La famille $\mathcal{F} = (u, v, w)$ est donc libre.

Exemple 3. Dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on donne : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $K = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.
Montrer que la famille $\mathcal{F} = (I, J, K)$ est liée.
On forme une combinaison linéaire nulle des vecteurs de $\mathcal{F}$: $aI + bJ + cK = 0$.

On obtient :
$\begin{pmatrix} a+b+4c & b+3c \\ b+3c & a+b+4c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On en déduit le système : $\begin{cases} a+b+4c=0 \\ b+3c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-c \\ b=-3c \end{cases}$, où c est un réel quelconque. En choisissant par exemple $c=1$, on trouve $a=-1$ et $b=-3$. On a donc l'égalité : $-I-3J+K=0$ ce qui prouve que la famille $\mathcal{F}=(I,J,K)$ est liée.

Remarque. On aurait pu observer directement que $K=I+3J$. On retrouve ainsi l'égalité $-I-3J+K=0$, ce qui permet de conclure.

❑ Méthode 1.4. Comment montrer qu'une famille est une base ?

Pour montrer qu'une famille $\mathcal{B}=(e_1,\ldots,e_n)$ est une base d'un espace vectoriel E :

• On peut utiliser le **théorème 1.9** et montrer que $\mathcal{B}$ est à la fois une famille libre et génératrice de E ;

• Si on sait que E est de dimension n, on peut utiliser les **théorèmes 1.11** ou **1.12.** Il suffit de montrer que $\mathcal{B}$ est libre ou bien que $\mathcal{B}$ est génératrice de E.

⇨ **Exercices 1.8 à 1.15**

Exemple 1. Dans l'espace vectoriel E des matrices symétriques d'ordre 2 à coefficients réels, on donne : $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Montrer que la famille (A,B,C) est une base de E.

• Remarquons que les matrices A, B, C sont bien éléments de E.

• Toute matrice M de E s'écrit : $M=\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$, où a, b, c sont des réels quelconques.

On a donc : $M=aA+bB+cC$ ce qui montre que (A,B,C) est une famille génératrice de E.

• De plus, $aA+bB+cC=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a=b=c=0$. La famille (A,B,C) est donc libre.

Pour conclure, (A,B,C) est à la fois libre et génératrice de E donc c'est une base de E.

Exemple 2. Soit $u=(-1,2,0)$, $v=(3,-5,-1)$, $w=(0,1,-2)$ trois vecteurs de l'espace $\mathbb{R}^3$. Montrer que la famille $\mathcal{F}=(u,v,w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

On a montré dans l'**exemple 2 de la méthode 1.3** que la famille $\mathcal{F}=(u,v,w)$ est libre. Comme elle est formée de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui est un espace de dimension 3, on peut en conclure que la famille $\mathcal{F}=(u,v,w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

■■ Vrai/Faux

		Vrai	Faux
1.	Soit E un espace vectoriel et u, v, w trois vecteurs de E. La famille (u,v,w) est libre si, et seulement si, les familles (u,v), (u,w) et (v,w) le sont.	☐	☐
2.	Soit E un espace vectoriel et u, v, w trois vecteurs de E. Si $w \in \text{Vect}(u,v)$, la famille (u,v,w) est liée.	☐	☐
3.	Soit E un espace vectoriel et u, v, w trois vecteurs de E. Si la famille (u,v,w) est liée, w est combinaison linéaire de u et v.	☐	☐
4.	Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. L'ensemble des matrices diagonales d'ordre n est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.	☐	☐
5.	$\mathbb{R}^2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.	☐	☐
6.	$\mathbb{R}_2[x]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[x]$.	☐	☐
7.	Soit E un espace vectoriel de dimension n. Toute famille d'au moins $n+1$ vecteurs est liée.	☐	☐
8.	Toute famille d'au moins trois vecteurs de $\mathbb{R}^2$, non nuls et deux à deux distincts, est génératrice de $\mathbb{R}^2$.	☐	☐
9.	Si deux sous-espaces de $\mathbb{R}^3$, notés F et G, sont tels que $\dim F = \dim G$, alors : $F = G$.	☐	☐
10.	L'ensemble des fonctions polynomiales de degré 3 est un espace vectoriel.	☐	☐

■■ Énoncé des exercices

❑ **Exercice 1.1.** — Montrer, dans les trois cas suivants, que l'ensemble F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

1. $F=\left\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3,\ x_1=x_2=x_3\right\}$.

2. $F=\left\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3,\ x_1+2x_2=0\right\}$.

3. $F=\left\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3,\ x_1+x_2-x_3=0 \text{ et } 2x_1+3x_2+x_3=0\right\}$.

❑ **Exercice 1.2.** — Soit $F=\left\{\begin{pmatrix} a+c & b & c\\ b & a+2c & b\\ c & b & a+c\end{pmatrix},\ (a,b,c)\in\mathbb{R}^3\right\}$.

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et donner une famille génératrice de F.

D'après EML

❑ **Exercice 1.3.** — Soit une matrice A donnée de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Soit F l'ensemble des matrices réelles M qui commutent avec A (c'est-à-dire telles que $AM=MA$). Montrer que F est un espace vectoriel.

2. Dans cette question, on suppose que $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}$. Déterminer explicitement les matrices de F, puis donner une famille génératrice de F.

❑ **Exercice 1.4.** — Famille libre ou liée dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On donne :

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} \text{ et } C=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

La famille (A,B,C) est-elle libre ou liée ?

D'après EML

❑ **Exercice 1.5.** * * — Familles libres et liées dans $\mathbb{R}_2[x]$.

1. Soit a et b deux réels distincts et n un entier naturel. Pour tout k de $[\![0,2]\!]$, on note f_k la fonction polynomiale définie pour tout réel x par :

$$f_k(x)=(x-a)^k(x-b)^{2-k}$$

Montrer que la famille (f_0,f_1,f_2) est libre.

2. On donne trois fonctions polynomiales de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[x]$ définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 1 - x + x^2,\ g(x) = 3 + x - 2x^2 \text{ et } h(x) = -1 - 3x + 4x^2$$

Montrer que la famille $\mathcal{F} = (f, g, h)$ est liée.

❑ **Exercice 1.6.** — Familles liées.

1. Soit $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que la famille (I, J, J^2) est liée.

2. Soit (a, b, c) une famille libre de $\mathbb{R}^3$. On pose $u = a + b$, $v = b - c$, $w = a + c$. Montrer que (u, v, w) est une famille liée de $\mathbb{R}^3$.

❑ **Exercice 1.7.** — Montrer, à l'aide du **théorème 1.1**, que les ensembles *E*, *F* et *G* définis ci-dessous sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_3[x]$.

1. *E* est l'ensemble des fonctions polynomiales de $\mathbb{R}_3[x]$ qui s'annulent en 0.

2. *F* est l'ensemble des fonctions polynomiales paires de $\mathbb{R}_3[x]$, c'est-à-dire vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(-x) = P(x)$$

3. *G* est l'ensemble des fonctions polynomiales impaires de $\mathbb{R}_3[x]$, c'est-à-dire vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(-x) = -P(x)$$

❑ **Exercice 1.8.** — Pour tout *k* de $[\![0, 3]\!]$, on définit la fonction e_k qui, à tout réel *x*, associe le réel $e_k(x) = x^k$.

On reprend les sous-espaces vectoriels *E*, *F* et *G* de $\mathbb{R}_3[x]$ étudiés à l'exercice précédent. Déterminer, en posant $P(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$, une famille génératrice de chacun d'eux. En déduire leur dimension.

❑ **Exercice 1.9.*** — On considère l'ensemble $H = \left\{ P \in \mathbb{R}_2[x],\ \int_0^1 P(x)\,\mathrm{d}x = 0 \right\}$.

1. Montrer, grâce au **théorème 1.1**, que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[x]$.

2. Soit *P* un polynôme de $\mathbb{R}_2[x]$. On pose, pour tout réel *x*, $P(x) = a + bx + cx^2$.

Utiliser cette écriture pour déterminer une base de H puis en déduire la dimension de *H*.

❑ **Exercice 1.10.** — Dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on donne :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (A, B, C, D)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. Déterminer les coordonnées de *M* dans la base $\mathcal{B}$.

❑ **Exercice 1.11.** — Ensembles de matrices particulières.

1. Montrer que l'ensemble $\mathcal{D}_3(\mathbb{R})$ des matrices diagonales de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont on précisera la dimension.

2. Même question avec $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

❑ **Exercice 1.12.** — On considère les matrices suivantes de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ U=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

On note *E*, l'ensemble des matrices carrées *M* d'ordre deux telles que : $AM=MD$.

1. Vérifier que *E* est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Soit $M=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Montrer que *M* appartient à *E* si et seulement si : $z=0$ et $y=t$.

b) En déduire que (U,A) est une base de *E*.

D'après EML

❑ **Exercice 1.13.** — Soit la matrice $K=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$. On note *E* l'ensemble des matrices *M* de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant : $MK=KM=M$.

1. a) Montrer que *E* est un espace vectoriel.

b) Montrer par l'absurde, qu'aucune matrice de *E* n'est inversible.

2. Soit $M=\begin{pmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & k\end{pmatrix}$ une matrice de *E*.

a) Montrer que : $k=g=c=a$, $h=b$ et $f=d$. En déduire la forme des matrices de *E*.

b) Déterminer une base de *E* et vérifier que $\dim E=4$.

D'après EDHEC

❑ **Exercice 1.14.** — On considère les matrices suivantes de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$I=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\ J=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\ K=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

On note *E* le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par *I*, *J* et *K*. Pour toute matrice *M* de *E*, on note $M^0=I$ et, si *M* est inversible, on note pour tout entier naturel *k*, $M^{-k}=\left(M^{-1}\right)^k$, et on rappelle qu'alors, M^k est inversible et que $\left(M^k\right)^{-1}=M^{-k}$.

1. Déterminer la dimension de E.

2. Calculer J^2, JK, KJ et K^2.

3. Soit la matrice $L = I + J$.

a) Montrer, pour tout entier naturel n, que : $L^n = I + nJ + \dfrac{n(n-1)}{2}K$.

b) Vérifier que L est inversible et montrer, pour tout entier relatif n, que :

$$L^n = I + nJ + \frac{n(n-1)}{2}K$$

c) Exprimer, pour tout entier relatif n, L^n en fonction de I, L, L^2 et n.

D'après EML

❑ **Exercice 1.15.** — On associe à tout triplet (x, y, z) de nombres réels la matrice $M(x, y, z)$ définie par : $M(x, y, z) = \begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{pmatrix}$.

La matrice $M(1,0,0)$ n'est autre que la matrice identité I et la matrice $M(0,1,0)$ est notée J.

1. Calculer les matrices J^2 et J^3.

2. Établir que l'ensemble E des matrices de la forme $M(x, y, z)$, où (x, y, z) décrit $\mathbb{R}^3$ constitue un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

3. Montrer que (I, J, J^2) est une base de E.

D'après ESSEC

■ Pour vous aider à démarrer

Exercice 1.2. Écrire une matrice quelconque de F comme combinaison linéaire de trois matrices.

Exercice 1.3. Pour la question **2**, poser $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et chercher les réels a, b, c et d tels que $AM = MA$.

Exercice 1.4. Écrire un test de liberté.

Exercice 1.5. Pour la question **1**, écrire une combinaison linéaire nulle et choisir ensuite de donner des valeurs intéressantes à la variable x.

Exercice 1.6. Pour la question **1**, calculer d'abord J^2 puis la relation entre I, J et J^2 se verra très facilement.
Pour la question **2**, c'est un peu pareil mais on peut aussi considérer une combinaison linéaire nulle et voir ce qu'il en est (comme dans le corrigé).

Exercice 1.7. Pour la question **1**, afin d'établir la stabilité de *E*, montrer que, si *P* et *Q* sont dans *E*, alors : $(\lambda P+Q)(0)=0$.

Pour la question **2**, afin d'établir la stabilité de *F*, montrer que si *P* et *Q* sont dans *F*, alors : $\forall x\in\mathbb{R},\ (\lambda P+Q)(-x)=(\lambda P+Q)(x)$.

Exercice 1.8. Traduire, dans chaque cas, la condition imposée au polynôme *P* en une condition équivalente portant sur *a*, *b*, *c* et *d.*

Exercice 1.9. Pour la question **2**, déduire de $\int_0^1 (a+bx+cx^2)\,\mathrm{d}x=0$ une relation entre *a*, *b* et *c*.

Exercice 1.10. Il suffit de montrer que (*A*, *B*, *C*, *D*) est libre.

Exercice 1.11. Pour les deux questions, il faut trouver l'allure des matrices de chacun des ensembles proposés, ce qui permet d'écrire ces ensembles comme des sous-espaces vectoriels engendrés par une famille. Pour la dimension, il faut prouver d'abord que la famille génératrice trouvée est libre.

Exercice 1.12. Pour la question **2.a)**, identifier les coefficients des produits AM et MD.

Pour la question **2.b)**, utiliser la question **2.a)** qui prouve que la famille (U,A) est génératrice de *E*, puis montrer qu'elle est libre.

Exercice 1.13. Pour la question **1.b)**, travailler sur l'égalité $MK=M$.

Pour la question **2.a)**, calculer *MK* et *KM* puis identifier les coefficients des trois matrices *M*, *MK* et *KM*.

Pour la question **2.b)**, utiliser la question **2.a)** qui donne une famille génératrice de *E* dont il ne reste plus qu'à prouver la liberté.

Exercice 1.14. Pour la question **1**, montrer que (I,J,K) est une base de *E*.

Pour la question **3.a)**, utiliser la formule du binôme.

Pour la question **3.b)**, pour montrer que *L* est inversible, il suffit d'utiliser les propriétés des matrices triangulaires. Pour calculer L^n pour tout entier relatif *n*, on peut poser, pour *n* entier naturel $A_n=I-nJ+\dfrac{n(n+1)}{2}K$ et calculer $L^n\times A_n$.

Exercice 1.15. Pour la question **3**, établir que toute matrice de *E* est combinaison linéaire de *I*, *J* et J^2. Ensuite, vérifier la liberté de la famille (*I*, *J*, J^2).

■■ Corrigé des vrai/faux

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
F	V	F	V	F	V	V	F	F	F

1. Il suffit de se placer dans l'espace $E=\mathbb{R}^2$. Notons $u=(1,0)$, $v=(0,1)$ et $w=(1,1)$.
Les familles (u,v), (u,w) et (v,w) sont libres car constituées de deux vecteurs non colinéaires. En revanche, la famille (u,v,w) est liée. En effet, $w=u+v$.

2. Si w est dans $\text{Vect}(u,v)$ alors w est combinaison linéaire de u et v. Il existe donc deux réels a et b tels que $w=au+bv$, ce qui s'écrit : $1w-au-bv=0$. Ceci est une combinaison linéaire nulle des vecteurs u, v et w, avec au moins un coefficient différent de 0 donc la famille (u,v,w) est liée.

3. En se plaçant à nouveau dans $E=\mathbb{R}^2$ et en posant $u=(0,1)$, $v=(0,2)$ et $w=(1,1)$.
La famille (u,v,w) est bien liée puisque $v=2u$, pourtant w n'est pas combinaison linéaire de u et v, car si c'était le cas, il existerait deux réels λ et μ tels que $(1,1)=\lambda(0,1)+\mu(0,2)$ et on aurait, entre autres, $1=\lambda\times 0+\mu\times 0=0$, ce qui est faux.

4. Notons $\mathcal{D}_n$ l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour toute matrice A de $\mathcal{D}_n$, il existe n réels $(a_1,...,a_n)$ tels que : $A=\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}$. On en déduit, en utilisant les notations de la **propriété 1.12**, que : $\mathcal{D}_n=\text{Vect}\left(E_{i,i}\right)_{i\in[\![1,n]\!]}$.
L'ensemble $\mathcal{D}_n$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

5. $\mathbb{R}^2$ n'est pas une partie de $\mathbb{R}^3$ donc $\mathbb{R}^2$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

6. On sait déjà que $\mathbb{R}_2[x]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[x]$.
Il reste donc à prouver que $\mathbb{R}_2[x]\subset\mathbb{R}_3[x]$.
Si P est une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 2, alors, a fortiori, son degré est inférieur ou égal à 3. Ainsi, $\mathbb{R}_2[x]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[x]$.

7. Soit E un espace vectoriel de dimension n.
On peut traduire le premier point du **théorème 1.11** par : si une famille de E est libre alors elle est constituée d'au plus n vecteurs. Ceci veut aussi dire que, si une famille de E possède au moins $(n+1)$ vecteurs, c'est qu'elle est liée.

8. Considérons les vecteurs $u=(1,0)$, $v=(2,0)$ et $w=(3,0)$.

Ces trois vecteurs sont des éléments non nuls de $\mathbb{R}^2$ et deux à deux distincts.
Si cette famille était génératrice de $\mathbb{R}^2$, on aurait : $\mathbb{R}^2=\text{Vect}(u,v,w)$.

Mais, les vecteurs v et w sont proportionnels à u. Ainsi, on obtiendrait : $\mathbb{R}^2=\text{Vect}(u)$.

La famille (u) contenant un seul vecteur serait alors génératrice de $\mathbb{R}^2$. Ceci contredit le fait que dim $\mathbb{R}^2=2$. La famille (u,v,w) n'est donc pas génératrice de $\mathbb{R}^2$.

9. Considérons $F=\text{Vect}((1,0,0))$ et $G=\text{Vect}((0,1,0))$.

La famille $((1,0,0))$ est génératrice de F et la famille $((0,1,0))$ est génératrice de G.
Ces deux vecteurs sont non nuls, ils forment une base de F pour le premier et une base de G pour le second. On en déduit que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ de dimension 1. Pour autant, on n'a pas $F=G$ puisque, par exemple, $(1,0,0)$ appartient à F mais pas à G (sinon, on aurait $(1,0,0)=\alpha(0,1,0)=(0,\alpha,0)$ et ce n'est pas envisageable !).

10. Le polynôme nul n'est pas de degré 3 donc l'ensemble des polynômes de degré 3 n'est pas un espace vectoriel.
Une autre façon de procéder était, par exemple, de constater que la somme de deux polynômes de degré 3 n'est pas forcément un polynôme de degré 3. Exemple : avec $P(x)=x^3-2x+5$ et $Q(x)=-x^3+3x^2+7x-4$, on a $(P+Q)(x)=3x^2+5x+1$ qui n'est pas de degré 3.

❑ Les erreurs classiques

- Pour qu'une famille de plus de trois vecteurs soit libre, il ne suffit pas que les vecteurs soient deux à deux non proportionnels.
- Il faut être vigilant avec les parenthèses lors de l'écriture d'un sous-espace vectoriel sous forme de "Vect" : on note Vect( ) et à l'intérieur de ces parenthèses, on met le (ou les) vecteurs dont on a besoin. Ainsi, $\text{Vect}(1,0)=\text{Vect}(1)=\mathbb{R}$, alors que $\text{Vect}((1,0))$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ engendré par le vecteur $(1,0)$.
- L'ensemble des polynômes dont le degré vaut n n'est pas un espace vectoriel, c'est l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n qui est un espace vectoriel.

Corrigé

■■ Corrigé des exercices

Exercice 1.1

1. F est l'ensemble des triplets de réels dont les trois composantes sont égales, donc F est inclus dans $\mathbb{R}^3$ et F est non vide puisque le vecteur nul de $\mathbb{R}^3$ a ses trois composantes égales (à 0).
Soit $u=(x_1,x_2,x_3)$ et $v=(y_1,y_2,y_3)$ deux éléments de F et λ un réel.
On a : $\lambda u+v=(\lambda x_1+y_1,\lambda x_2+y_2,\lambda x_3+y_3)$. Comme $x_1=x_2=x_3$ et $y_1=y_2=y_3$, on obtient : $\lambda x_1+y_1=\lambda x_2+y_2=\lambda x_3+y_3$. On en conclut que : $\lambda u+v\in F$.
F est donc bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Remarque. On aurait pu écrire, plus rapidement :

$$F=\{x_1(1,1,1),x_1\in\mathbb{R}\}=\text{Vect}((1,1,1))$$

Comme $(1,1,1)$ est un élément de $\mathbb{R}^3$, F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2. F est, par définition, inclus dans $\mathbb{R}^3$ et F est non vide puisque le vecteur nul $u=(0,0,0)$ de $\mathbb{R}^3$ est dans F.
Soit $u=(x_1,x_2,x_3)$ et $v=(y_1,y_2,y_3)$ deux éléments de F et λ un réel.
On a : $\lambda u+v=(\lambda x_1+y_1,\lambda x_2+y_2,\lambda x_3+y_3)$. Comme $x_1+2x_2=0$ et $y_1+2y_2=0$, on obtient : $\lambda x_1+y_1+2(\lambda x_2+y_2)=\lambda(x_1+2x_2)+(y_1+2y_2)=0$. On en conclut que $\lambda u+v\in F$.
F est donc bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Remarque. On aurait pu écrire, plus rapidement :

$$F=\{(-2x_2,x_2,x_3),(x_2,x_3)\in\mathbb{R}^2\}$$

On obtient alors :

$$F=\{x_2(-2,1,0)+x_3(0,0,1),(x_2,x_3)\in\mathbb{R}^2\}=\text{Vect}((-2,1,0),(0,0,1))$$

Comme $(-2,1,0)$ et $(0,0,1)$ sont des éléments de $\mathbb{R}^3$, F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

3. F est, par définition, inclus dans $\mathbb{R}^3$ et F est non vide puisque le vecteur nul $u=(0,0,0)$ de $\mathbb{R}^3$ est dans F.
Soit $u=(x_1,x_2,x_3)$ et $v=(y_1,y_2,y_3)$ deux éléments de F et λ un réel.
On a : $\lambda u+v=(\lambda x_1+y_1,\lambda x_2+y_2,\lambda x_3+y_3)$. Comme $x_1+x_2-x_3=0$, $2x_1+3x_2+x_3=0$ et $y_1+y_2-y_3=0$, $2y_1+3y_2+y_3=0$, on obtient :

- $\lambda x_1+y_1+(\lambda x_2+y_2)-(\lambda x_3+y_3)=\lambda(x_1+x_2-x_3)+(y_1+y_2-y_3)=0$.
- $2(\lambda x_1+y_1)+3(\lambda x_2+y_2)+(\lambda x_3+y_3)=\lambda(2x_1+3x_2+x_3)+(2y_1+3y_2+y_3)=0$.

On en conclut que $\lambda u + v \in F$, et F est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Remarque. On aurait pu caractériser F en résolvant le système (S) : $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$.

On a alors : $(S) \underset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = -\dfrac{1}{3}x_2 \\ x_1 = -\dfrac{4}{3}x_2 \end{cases}$.

On en déduit :

$$F = \left\{ \left(-\frac{4}{3}x_2, x_2, -\frac{1}{3}x_2 \right), x_2 \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}\left(\left(-\frac{4}{3}, 1, -\frac{1}{3} \right) \right) = \text{Vect}\left((-4, 3, -1) \right)$$

Le vecteur $(-4,3,-1)$ est un élément de $\mathbb{R}^3$ donc F donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

⇨ *Méthodes 1.1, 1.2*

Exercice 1.2

F est, par définition, inclus dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et F n'est pas vide car la matrice nulle (correspondant à $a = b = c = 0$) appartient à F.

De plus, on remarque que : $\begin{pmatrix} a+c & b & c \\ b & a+2c & b \\ c & b & a+c \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On en déduit que :

$$F = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

Finalement, F est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Par définition, la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ est génératrice de F.

⇨ *Méthode 1.2*

Exercice 1.3

1. On peut écrire que : $F = \left\{ M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), AM = MA \right\}$.

Montrons alors que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

F est, par définition, inclus dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et est non vide, puisque la matrice I_2 commute avec n'importe quelle matrice de même format et en particulier avec A.

Considérons deux matrices M_1 et M_2 de F et λ un réel. On sait que $AM_1 = M_1A$ et $AM_2 = M_2A$.

On a alors : $A(\lambda M_1 + M_2) = \lambda AM_1 + AM_2 = \lambda M_1A + M_2A = (\lambda M_1 + M_2)A$.

Ceci prouve que $\lambda M_1 + M_2$ commute avec A, c'est-à-dire que $\lambda M_1 + M_2$ est élément de F.
Par conséquent, F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donc un espace vectoriel.

⇨ *Méthode 1.1*

2. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ un élément de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On sait que : $M \in F \Leftrightarrow AM = MA$.

De plus, on a : $AM = \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ -a-c & -b-d \end{pmatrix}$ et $MA = \begin{pmatrix} a-b & 2a-b \\ c-d & 2c-d \end{pmatrix}$.

En identifiant les termes des matrices AM et MA, on obtient :

$$M \in F \Leftrightarrow \begin{cases} a+2c = a-b \\ b+2d = 2a-b \\ -a-c = c-d \\ -b-d = 2c-d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2c = b \\ b+d = a \\ -a-2c+d = 0 \\ b = -2c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2c = b \\ d = 2c+a \end{cases} \Leftrightarrow M = \begin{pmatrix} a & -2c \\ c & 2c+a \end{pmatrix} \Leftrightarrow M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2c \\ c & 2c \end{pmatrix}$$

On a donc :

$$M \in F \Leftrightarrow M = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ceci signifie que F est l'ensemble des combinaisons linéaires des matrices I_2 et $M = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$,

soit encore $F = \text{Vect}(I_2, M)$. Ainsi la famille (I_2, M) est une famille génératrice de F.

⇨ *Méthode 1.2*

Exercice 1.4

On forme une combinaison linéaire nulle de A, B et C, $aA + bB + cC = 0$, et on obtient :

$$a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ceci s'écrit : $\begin{pmatrix} a+c & b & c \\ b & a+2c & b \\ c & b & a+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Par identification, on obtient le système : $\begin{cases} a+c = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ a+2c = 0 \end{cases}$.

L'opération $L_1 \leftarrow L_1 - L_3$ donne $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ a+2c = 0 \end{cases}$.

L'équation 4 n'apporte alors aucune information supplémentaire car elle est toujours vérifiée.
Pour conclure, on obtient $a=b=c=0$, ce qui prouve que la famille (A,B,C) est libre.

⇨ *Méthode 1.3*

Exercice 1.5

1. Considérons une combinaison linéaire nulle des vecteurs f_0, f_1, f_2 : $\sum_{i=0}^{2}\lambda_i f_i = 0$.

On a alors : $\forall x\in\mathbb{R},\ \lambda_0(x-b)^2 + \lambda_1(x-a)(x-b)+\lambda_2(x-a)^2=0$.

Avec $x = a$, on obtient : $\lambda_0(a-b)^2=0$ (les autres termes sont nuls).

Comme a et b sont distincts, on en déduit : $\lambda_0=0$.

La relation $\sum_{i=0}^{2}\lambda_i f_i=0$ devient alors : $\lambda_1(x-a)(x-b)+\lambda_2(x-a)^2=0$.

Avec $x = b$, on obtient : $\lambda_2(b-a)^2=0$ donc λ_2 est nul (car a et b sont distincts).

Pour terminer, il reste : $\lambda_1(x-a)(x-b)=0$.

Avec $x=\dfrac{a+b}{2}$, on obtient : $-\lambda_1\left(\dfrac{b-a}{2}\right)^2=0$.

Comme a et b sont distincts, on a $\left(\dfrac{b-a}{2}\right)^2\neq 0$, et enfin : $\lambda_1=0$.

Finalement, la famille (f_0,f_1,f_2) est libre.

2. On forme une combinaison linéaire nulle des vecteurs de $\mathcal{F}$: $af+bg+ch=0$. Ceci signifie que, pour tout réel x, on a : $af(x)+bg(x)+ch(x)=0$.

On obtient, pour tout réel x : $a+3b-c+(-a+b-3c)x+(a-2b+4c)x^2=0$.

Or, un polynôme est nul si et seulement tous ses coefficients sont nuls. On est donc amené à résoudre le système :

$$\begin{cases} a+3b-c=0\\ -a+b-3c=0\\ a-2b+4c=0\end{cases} \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2+L_1\\ L_3\leftarrow L_3-L_1}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} a+3b-c=0\\ 4b-4c=0\\ -5b+5c=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+3b-c=0\\ b-c=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2c\\ b=c\end{cases}$$, où c est un réel quelconque. En choisissant par exemple $c=1$, on trouve $a=-2$ et $b=1$. On a donc l'égalité : $-2f+g+h=0$ ce qui prouve que la famille (f,g,h) est liée.

⇨ *Méthode 1.3*

Exercice 1.6

1. Avec $J=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, on trouve $J^2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I$ donc la famille $\left(I,J,J^2\right)$ est liée (en effet, on a $I+0J-J^2=0$, ce qui est bien une combinaison linéaire nulle de I, J et J^2 avec des coefficients non tous nuls).

2. On forme une combinaison linéaire nulle de *u*, *v* et *w* : $\alpha u+\beta v+\gamma w=0$, ce qui donne :

$$\alpha(a+b)+\beta(b-c)+\gamma(a+c)=(0,0,0)$$

On a donc : $(\alpha+\gamma)a+(\alpha+\beta)b+(-\beta+\gamma)c=(0,0,0)$.

Comme (a,b,c) est libre, on obtient :

$$(S)\ \begin{cases}\alpha+\gamma=0\\ \alpha+\beta=0\\ -\beta+\gamma=0\end{cases}$$

$(S)\underset{L_2\leftarrow L_2-L_1}{\Leftrightarrow}\begin{cases}\alpha+\gamma=0\\ \beta-\gamma=0\\ -\beta+\gamma=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=-\gamma\\ \beta=\gamma\end{cases}$ donc il existe des triplets $(\alpha,\beta,\gamma)\neq(0,0,0)$ tels que $\alpha(a+b)+\beta(b-c)+\gamma(a+c)=(0,0,0)$. On peut choisir par exemple $\gamma=1$, $\alpha=-1$ et $\beta=1$, ce qui donne $u=v+w$. Par conséquent la famille (u,v,w) est liée.

⇨ *Méthode 1.3*

Exercice 1.7

1. *E* est, par définition, inclus dans $\mathbb{R}_3[x]$ et la fonction polynomiale nulle s'annulant en 0 et en 1 (et en tout réel d'ailleurs !) elle est élément de *E* donc *E* est non vide.

Pour toutes fonctions *P*et *Q* de *E* et tout réel λ, $\lambda P+Q$ est un polynôme tel que :

$$(\lambda P+Q)(0)=\lambda P(0)+Q(0)=\lambda\times 0+0=0$$

Ainsi, $\lambda P+Q$ s'annule en 0 donc $\lambda P+Q$ appartient à *E*.

E est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[x]$.

2. *F* est, par définition, inclus dans $\mathbb{R}_3[x]$ et la fonction polynomiale nulle étant paire, elle est élément de *F* donc *F* est non vide.

Pour toutes fonctions *P*et *Q* de *F* et tout réel λ, $\lambda P+Q$ est un polynôme tel que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ (\lambda P+Q)(-x)=\lambda P(-x)+Q(-x)=\lambda P(x)+Q(x)=(\lambda P+Q)(x)$$

Ainsi, $\lambda P+Q$ est une fonction polynomiale paire et est bien élément de *F*.

F est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[x]$.

3. Par une technique analogue, on montrerait que l'ensemble G des fonctions polynomiales impaires de $\mathbb{R}_3[x]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[x]$.

⇨ *Méthode 1.1*

Exercice 1.8

Soit P un élément de $\mathbb{R}_3[x]$.

Il existe $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$ tel que : $\forall x\in\mathbb{R},\ P(x)=a+bx+cx^2+dx^3$.

- On a : $P\in E$ si et seulement si $P(0)=0$, ce qui équivaut à $a=0$.

Ainsi :

$$P\in F \Leftrightarrow \exists(b,c,d)\in\mathbb{R}^3,\ P(x)=bx+cx^2+dx^3$$

Finalement :

$$P\in F \Leftrightarrow \exists(b,c,d)\in\mathbb{R}^3,\ P=be_1+ce_2+de_3$$

On peut donc écrire :

$$F=\text{Vect}(e_1,e_2,e_3)$$

F est donc le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[x]$ engendré par (e_1,e_2,e_3).

La famille (e_1,e_2,e_3) est libre puisqu'elle est extraite de la base canonique de $\mathbb{R}_3[x]$. Elle est génératrice de F donc c'est une base de F qui est ainsi de dimension 3.

- Toujours avec $P(x)=a+bx+cx^2+dx^3$, on a successivement :

$P\in F \Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R},\ P(-x)=P(x) \Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R},\ a-bx+cx^2-dx^3=a+bx+cx^2+dx^3$.

$P\in F \Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R},\ -bx-dx^3=bx+dx^3 \Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R},\ 0=2bx+2dx^3 \Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R},\ bx+dx^3=0$.

$P\in F \Leftrightarrow be_1+de_3=0$.

Comme (e_1,e_3) est une famille libre en tant que sous-famille de la base canonique de $\mathbb{R}_3[x]$, on en conclut :

$$P\in F \Leftrightarrow b=d=0 \Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R},\ P(x)=a+cx^2 \Leftrightarrow P=ae_0+ce_2$$

On en déduit que F est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[x]$ engendré par la famille (e_0,e_2). Comme (e_0,e_2) est libre (même argument qu'à la question **1**), c'est une base de F (famille libre et génératrice) donc on a dim F = 2.

- Par un raisonnement analogue à celui de la question **2**, on trouve que G est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[x]$ engendré par la famille (e_1,e_3). Il est, lui aussi, de dimension 2.

⇨ *Méthodes 1.2, 1.4*

Exercice 1.9

1. H est, par définition, inclus dans $\mathbb{R}_2[x]$ et la fonction polynomiale nulle appartient à H car $\int_0^1 0\,dx=0$ donc H est non vide.

Pour toutes fonctions polynomiales *P* et *Q* de *H* et tout réel λ, $\lambda P+Q$ est un polynôme et on a :

$$\int_0^1 (\lambda P+Q)(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{définition des opérations sur les fonctions}}{=} \int_0^1 \big(\lambda P(x)+Q(x)\big)\,\mathrm{d}x \overset{\text{linéarité de l'intégration}}{=} \lambda\int_0^1 P(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^1 Q(x)\,\mathrm{d}x = \lambda\times 0+0$$

On a donc $\int_0^1 (\lambda P+Q)(x)\,\mathrm{d}x=0$, et ainsi, $\lambda P+Q$ appartient à *H*.

H est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[x]$.

2. Avec $P(x)=a+bx+cx^2$, on a les équivalences suivantes :

$$P\in H \Leftrightarrow \int_0^1 (a+bx+cx^2)\,\mathrm{d}x=0 \Leftrightarrow \left[ax+b\frac{x^2}{2}+c\frac{x^3}{3}\right]_0^1=0 \Leftrightarrow a+\frac{b}{2}+\frac{c}{3}=0 \Leftrightarrow a=-\frac{b}{2}-\frac{c}{3}.$$

Finalement :

$$P\in H \Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R},\ P(x)=-\frac{b}{2}-\frac{c}{3}+bx+cx^2 \Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R},\ P(x)=b\left(-\frac{1}{2}+x\right)+c\left(-\frac{1}{3}+x^2\right)$$

$$P\in H \Leftrightarrow P=b\left(-\frac{1}{2}e_0+e_1\right)+c\left(-\frac{1}{3}e_0+e_2\right)$$

La famille $\left(-\frac{1}{2}e_0+e_1\ ,-\frac{1}{3}e_0+e_2\right)$ est une famille génératrice de *H*.

Cette famille est libre car elle est formée de 2 vecteurs non proportionnels (en effet, s'ils étaient proportionnels, on aurait $-\frac{1}{2}e_0+e_1=\lambda\left(-\frac{1}{3}e_0+e_2\right)$ et la famille (e_0,e_1,e_2) serait liée, ce qui n'est pas le cas car c'est une base).

Tout ceci prouve que $\left(-\frac{1}{2}e_0+e_1\ ,-\frac{1}{3}e_0+e_2\right)$ est une base de *H*, et ainsi :

$$\dim H=2$$

⇨ *Méthodes 1.1, 1.2, 1.3, 1.4*

Exercice 1.10

1. On forme une combinaison linéaire nulle des vecteurs de $\mathcal{B}$, ce qui donne :

$$aA+bB+cC+dD=0$$

Ceci est équivalent au système $(S)\begin{cases} a+b+c+d=0 \\ 2b+2c+2d=0 \\ 3c+3d=0 \\ 4d=0 \end{cases}$. Ce système est échelonné et on trouve directement $a=b=c=d=0$. La famille $\mathcal{B}$ est libre, elle est constituée de quatre vecteurs de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui est de dimension 4 donc on peut conclure que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

⇨ *Méthodes 1.3, 1.4*

2. Puisque $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on sait qu'il existe des réels a, b, c et d uniques tels que :

$$M = aA + bB + cC + dD$$

Ceci équivaut au système suivant : $(S)\begin{cases} a + b + c + d = 6 \\ 2b + 2c + 2d = 4 \\ 3c + 3d = 0 \\ 4d = 4 \end{cases}$

On trouve, en remontant, $d = 1$, puis $c = -1$, $b = 2$ et enfin $a = 4$.
Finalement, les coordonnées de M dans la base $\mathcal{B}$ sont : 4, 2, -1 et 1.

Exercice 1.11

1. On reprend les notations du **V/F 4** avec $n = 3$ et on obtient :

$$\mathcal{D}_3(\mathbb{R}) = \text{Vect}\left(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{3,3}\right)$$

L'ensemble $\mathcal{D}_3(\mathbb{R})$ est alors un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et la famille $\left(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{3,3}\right)$ est une famille génératrice de $\mathcal{D}_3(\mathbb{R})$. De plus, elle est libre car formée de vecteurs de la base canonique de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
Ainsi, la famille $\left(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{3,3}\right)$ est une base de $\mathcal{D}_3(\mathbb{R})$, qui est donc de dimension 3.

2. Les matrices symétriques de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ sont de la forme $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$ avec a, b, c, d, e et f des réels.

Autrement dit, toute matrice M de $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ s'écrit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$, avec $(a,b,c,d,e,f) \in \mathbb{R}^6$.

En reprenant les notations des vecteurs de la base canonique de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on obtient :

$$M = a\,E_{1,1} + b\left(E_{1,2} + E_{2,1}\right) + c\left(E_{1,3} + E_{3,1}\right) + d\,E_{2,2} + e\left(E_{2,3} + E_{3,2}\right) + f\,E_{3,3}$$

On en déduit : $\mathcal{S}_3(\mathbb{R}) = \text{Vect}\left(E_{1,1}, E_{1,2} + E_{2,1}, E_{1,3} + E_{3,1}, E_{2,2}, E_{2,3} + E_{3,2}, E_{3,3}\right)$.

Par conséquent, $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ est le sous-espace de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par la famille $\left(E_{1,1}, E_{1,2} + E_{2,1}, E_{1,3} + E_{3,1}, E_{2,2}, E_{2,3} + E_{3,2}, E_{3,3}\right)$.

Prouvons maintenant que cette famille est libre.

En posant $a\,E_{1,1} + b\left(E_{1,2} + E_{2,1}\right) + c\left(E_{1,3} + E_{3,1}\right) + d\,E_{2,2} + e\left(E_{2,3} + E_{3,2}\right) + f\,E_{3,3} = 0$, on a :

$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} = 0$, c'est-à-dire : $a = b = c = d = e = f = 0$.

Corrigé

La famille $\left(E_{1,1}, E_{1,2}+E_{2,1}, E_{1,3}+E_{3,1}, E_{2,2}, E_{2,3}+E_{3,2}, E_{3,3}\right)$ est donc libre.

Finalement, $\left(E_{1,1}, E_{1,2}+E_{2,1}, E_{1,3}+E_{3,1}, E_{2,2}, E_{2,3}+E_{3,2}, E_{3,3}\right)$ est libre et génératrice de $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ donc c'est une base de $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ et ainsi, $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ est de dimension 6.

⇨ *Méthodes 1.2, 1.3, 1.4*

Exercice 1.12

1. L'ensemble E est, par définition, inclus dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et n'est pas vide puisque la matrice nulle vérifie $A0=0=0D$.

Soit M_1 et M_2 deux éléments de E et λ un réel. On a alors :

$$A(\lambda M_1+M_2)=\lambda AM_1+AM_2$$

Comme M_1 et M_2 sont deux éléments de E, on sait que : $AM_1=M_1D$ et $AM_2=M_2D$.

On en déduit :

$$A(\lambda M_1+M_2)=\lambda M_1D+M_2D=(\lambda M_1+M_2)D$$

La matrice λM_1+M_2 est donc un élément de E.

Conclusion : E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

⇨ *Méthode 1.1*

2. a) En posant $M=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, on a : $AM=\begin{pmatrix} z & t \\ z & t \end{pmatrix}$ et $MD=\begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & t \end{pmatrix}$.

On en déduit : $M\in E \Leftrightarrow AM=MD \Leftrightarrow \begin{cases} z=0 \\ y=t \end{cases}$ (les deux dernières équations n'apportent aucun renseignement supplémentaire).

b) Grâce à la question **2**, on obtient :

$$M\in E \Leftrightarrow \exists (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ M=\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & y \end{pmatrix}$$

Autrement dit, on a :

$$E=\left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & y \end{pmatrix}, (x,y)\in\mathbb{R}^2 \right\}=\left\{xU+yA, (x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}=\text{Vect}\ (U,A)$$

La famille (U,A) est donc génératrice de E. Elle est, de plus, constituée de deux vecteurs non colinéaires, la famille (U,A) est donc libre. Finalement, (U,A) est une base de E.

⇨ *Méthodes 1.2, 1.3, 1.4*

Exercice 1.13

1. a) E est, par définition, inclus dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et n'est pas vide puisque la matrice nulle 0 vérifie $K0=0K=0$.

Soit M_1 et M_2 deux éléments de E et λ un réel.

On a alors : $K(\lambda M_1 + M_2) = \lambda KM_1 + KM_2$.

Comme M_1 et M_2 sont deux éléments de E, on sait que :

$KM_1 = M_1K = M_1$ et $KM_2 = M_2K = M_2$.

On en déduit, d'une part :

$$K(\lambda M_1 + M_2) = \lambda KM_1 + KM_2 = \lambda M_1 + M_2$$

D'autre part, on a aussi :

$$(\lambda M_1 + M_2)K = \lambda M_1K + M_2K = \lambda M_1 + M_2$$

La matrice $\lambda M_1 + M_2$ est donc un élément de E.

Conclusion : E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

⇨ *Méthode 1.1*

b) Supposons qu'il existe une matrice M de E inversible, alors la matrice M^{-1} existe, et en multipliant la relation $MK = M$ à gauche par M^{-1}, on obtient $IK = I$ soit $K = I$. C'est absurde. On en conclut qu'aucune matrice de E n'est inversible.

2. a) En posant $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}$, on a : $KM = \begin{pmatrix} g & h & k \\ d & e & f \\ a & b & c \end{pmatrix}$ et $MK = \begin{pmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ k & h & g \end{pmatrix}$.

On en déduit : $M \in E \Leftrightarrow KM = MK = M \Leftrightarrow \begin{cases} g = c = a \\ h = b = b \\ k = a = c \\ d = f = d \end{cases}$ (en identifiant les quatre premières composantes, les autres équations n'apportent aucun renseignement supplémentaire).

On obtient alors :

$$M \in E \Leftrightarrow KM = MK = M \Leftrightarrow \begin{cases} g = c = a = k \\ h = b \\ d = f \end{cases}$$

On en conclut :

$$M \in E \Leftrightarrow M = \begin{pmatrix} a & b & a \\ d & e & d \\ a & b & a \end{pmatrix}$$

On obtient donc :

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & a \\ d & e & d \\ a & b & a \end{pmatrix}, (a,b,d,e) \in \mathbb{R}^4 \right\}$$

Corrigé

b) On déduit de la question **2.a)** :

$$E=\left\{ a\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}}_{M_1}+b\underbrace{\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}}_{M_2}+d\underbrace{\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}}_{M_3}+e\underbrace{\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}}_{M_4},(a,b,d,e)\in\mathbb{R}^4\right\}.$$

On obtient ainsi :

$$E=\text{Vect}\left(M_1,M_2,M_3,M_4\right)$$

Finalement, la famille $\left(M_1,M_2,M_3,M_4\right)$ est génératrice de *E*.

Prouvons maintenant qu'elle est libre. Soit donc a, b, c et d des réels tels que :

$aM_1+bM_2+cM_3+dM_4=0$. Ceci équivaut à : $\begin{pmatrix}a&b&a\\c&d&c\\a&b&a\end{pmatrix}=0$.

On en déduit : $aM_1+bM_2+cM_3+dM_4=0\Leftrightarrow a=b=c=d=0$.

On peut alors conclure que la famille $\left(M_1,M_2,M_3,M_4\right)$ est libre donc c'est une base de *E* qui est ainsi de dimension 4.

⇨ *Méthodes 1.3, 1.4*

Exercice 1.14

1. On sait que la famille $\left(I,J,K\right)$ est une famille génératrice de *E*.

Prouvons qu'elle est libre.

On a : $aI+bJ+cK=0\Leftrightarrow\begin{pmatrix}a&b&c\\0&a&b\\0&0&a\end{pmatrix}=0\Leftrightarrow a=b=c=0$.

La famille $\left(I,J,K\right)$ est donc libre.

C'est donc une base de *E* qui est ainsi de dimension 3.

⇨ *Méthodes 1.3, 1.4*

2. On obtient : $J^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=K$, $JK=0$, $KJ=0$ et $K^2=0$.

3. a) Comme les matrices *I* et *J* commutent, on applique la formule du binôme de Newton :

$$L^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}I^{n-k}J^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}J^k$$

Après un petit calcul, on obtient $J^3 = 0$, et pour tout entier k supérieur ou égal à 3, on a alors :

$$J^k = J^{k-3}J^3 = 0$$

On en déduit, pour tout entier n supérieur ou égal à 3 :

$$L^n = \sum_{k=0}^{2}\binom{n}{k}J^k + \sum_{k=3}^{n}\binom{n}{k}J^k = \binom{n}{0}J^0 + \binom{n}{1}J + \binom{n}{2}J^2 + 0 = I + nJ + \frac{n(n-1)}{2}J^2.$$

En exploitant les résultats de la question **2**, on en conclut :

$$\forall n \geq 3, L^n = I + nJ + \frac{n(n-1)}{2}K$$

On remarque que cette expression est encore valable pour $n = 0$, $n = 1$ et $n = 2$.

b) La matrice L est triangulaire supérieure avec tous ses coefficients diagonaux égaux à 1 donc non nuls. Par conséquent L est inversible.

On veut, en fait, montrer que l'expression de L^n obtenue plus haut est valable en remplaçant n par $-n$, ce qui donnerait : $L^{-n} = I + (-n)J + \frac{-n(-n-1)}{2}K = I - nJ + \frac{n(n+1)}{2}K$.

Posons donc, pour tout entier naturel n, $A_n = I - nJ + \frac{n(n+1)}{2}K$.

On va vérifier que $A_n = L^{-n} = (L^n)^{-1}$ en montrant que : $\forall n \in \mathbb{N}, L^n A_n = I$.

On a : $\forall n \in \mathbb{N}, L^n A_n = \left(I + nJ + \frac{n(n+1)}{2}K\right)\left(I - nJ + \frac{n(n+1)}{2}K\right)$.

En développant, on obtient :

$$L^n A_n = I + nJ - nJ - n^2J^2 + n^2K + \frac{n(n-1)n(n+1)}{4}K^2 + n\frac{n(n+1)}{2}JK - n\frac{n(n-1)}{2}KJ.$$

Grâce aux résultats de la question **2**, on en déduit : $\forall n \in \mathbb{N}, L^n A_n = I$.

On en déduit que, pour tout entier naturel n, la matrice L^n est inversible et que : $\left(L^n\right)^{-1} = A_n$.

Comme $\left(L^n\right)^{-1} = L^{-n}$. On obtient alors : $\forall n \in \mathbb{N}, L^{-n} = I - nJ + \frac{n(n+1)}{2}K$.

On a bien montré que :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, L^n = I + nJ + \frac{n(n-1)}{2}K$$

c) Comme $L = I + J$, on a : $J = L - I$. Occupons-nous maintenant de K.

En appliquant la relation précédente pour $n = 2$, on a : $L^2 = I + 2J + K = I + 2(L - I) + K$.

On en déduit :

$$K = L^2 - 2L + I$$

On obtient alors :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, L^n = I + n(L - I) + \frac{n(n-1)}{2}\left(L^2 - 2L + I\right)$$

Après quelques calculs, on trouve :

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ L^n = \frac{(n-1)(n-2)}{2} I - n(n-2) L + \frac{n(n-1)}{2} L^2$$

Exercice 1.15

1. Comme $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, on trouve successivement : $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $J^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On obtient ainsi : $J^2 = M(0,0,1)$ et $J^3 = I$.

2. Grâce à la question **1**, on peut affirmer que : $E = \left\{ xI + yJ + zJ^2, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.

On en déduit :

$$E = \text{Vect}\left(I, J, J^2\right)$$

L'ensemble E est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et la famille $\left(I, J, J^2\right)$ en est une famille génératrice.

⇨ *Méthode 1.2*

3. Prouvons que la famille $\left(I, J, J^2\right)$ est libre.

On a rapidement :

$$xI + yJ + zJ^2 = 0 \Leftrightarrow M(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow x = y = z = 0$$

La famille $\left(I, J, J^2\right)$ est donc libre et comme elle est génératrice de E, c'est une base de E.

⇨ *Méthodes 1.3, 1.4*

Chapitre 2

Applications linéaires

UN MATHÉMATICIEN



Très jeune, **Giuseppe Peano** a compris l'importance de la nouvelle approche des mathématiques que permettait la théorie des ensembles à peine naissante. Déchiffrant l'ouvrage plutôt obscur d'Hermann Grassmann dans lequel sont introduits les espaces vectoriels, il bâtit une axiomatique claire encore utilisée de nos jours. Il introduit les applications linéaires et montre que cette théorie ne se limite pas à la dimension finie en donnant l'exemple des polynômes.

Un peu d'histoire

À tout nombre réel a, on peut faire correspondre une application toute simple, celle qui à un réel x fait correspondre ax soit la multiplication d'un nombre par un scalaire. Tout segment est alors transformé en un segment dont la longueur est multipliée par a. La variable x est au premier degré, elle n'est pas affectée d'une puissance.

Les applications linéaires en sont la généralisation aux dimensions supérieures ; l'expression des images est une expression de degré un des coordonnées et elles conservent l'origine.

Le maniement de ce type d'applications s'est particulièrement développé au XVIII^{e} siècle en particulier pour résoudre des systèmes linéaires, avec Gabriel Cramer, Étienne Bézout, Alexandre Vandermonde mais leur introduction formelle est l'œuvre de Peano.

■■ Objectifs

■ Les incontournables

▷ Maîtriser les notions d'application linéaire, d'endomorphisme et d'isomorphisme.

▷ Connaître les définitions du noyau et de l'image d'une application linéaire.

▷ Savoir déterminer noyau et image d'une application linéaire.

▷ Connaître et savoir utiliser le théorème du rang.

■ Et plus si affinités

▷ Savoir utiliser le rang d'une application linéaire dans certaines situations délicates.

▷ Savoir établir des inclusions entre noyaux et/ou images.

■■ Résumé de cours

Dans ce chapitre, les lettres E et F désignent des espaces vectoriels de dimension finie.

■ Généralités

❑ Définitions

Définitions 2.1. — On appelle *application linéaire* de E dans F toute application f de E dans F telle que :

$$\forall (x,y)\in E^2,\ f(x+y)=f(x)+f(y) \text{ et } \forall x\in E,\ \forall \lambda\in\mathbb{R},\ f(\lambda x)=\lambda f(x)$$

• On appelle *endomorphisme* de E, toute application linéaire de E dans E.

• On appelle *isomorphisme* de E dans F, toute application linéaire bijective de E dans F.

⇨ **Méthode 2.1. Comment montrer qu'une application est linéaire ?**

❑ Premières propriétés

Théorème 2.1. — f est une application linéaire de E dans F si, et seulement si :

$$\forall (x,y)\in E^2,\ \forall (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2,\ f(\lambda x+\mu y)=\lambda f(x)+\mu f(y)$$

Théorème 2.2. — f est une application linéaire de E dans F si, et seulement si :

$$\forall (x,y)\in E^2,\ \forall \lambda\in\mathbb{R},\ f(\lambda x+y)=\lambda f(x)+f(y)$$

Exemple 2.1. — L'application identité de E, $Id_E : x\mapsto x$, est un isomorphisme de E dans E.

Exemple 2.2. — L'application f qui, à toute fonction polynomiale P de $\mathbb{R}_n[x]$ associe le réel $\int_0^1 P(t)\,dt$, est une application linéaire de $\mathbb{R}_n[x]$ dans $\mathbb{R}$.

Propriété 2.1. — Pour toute application linéaire de E dans F, on a : $f(0_E)=0_F$.

Théorème 2.3. — Soit f une application linéaire de E dans F. Pour tous vecteurs $x_1,\ldots,x_n$ de E et tous réels $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$, on a : $f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)$.

■ Opérations sur les applications linéaires

❑ Addition et produit par un réel

Définition 2.2. — Pour toutes applications linéaires f et g de E dans F, $f+g$ est l'application linéaire de E dans F, définie par :

$$\forall x \in E,\ (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

et, pour tout réel λ, λf est l'application linéaire de E dans F, définie par :

$$\forall x \in E,\ \ (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

❑ Composée d'applications linéaires et application réciproque

Théorème 2.4. — Si f est une application linéaire de E dans F et si g est une application linéaire de F dans G, alors $g \circ f$ est une application linéaire de E dans G.
En particulier, la composée de deux endomorphismes de E est un endomorphisme de E.

Définition 2.3. — Soit f un endomorphisme de E. Par convention, on pose $f^0 = Id_E$ et, pour tout entier naturel p non nul, on définit l'endomorphisme f^p par la relation : $f^p = f^{p-1} \circ f$.

Remarque 2.1. — En fait, pour tout p de $\mathbb{N}^*$, f^p est la composée de p endomorphismes, tous égaux à f.

Théorème 2.5. — Si f est un isomorphisme de E dans E, alors f^{-1} est un isomorphisme de E dans E.

Théorème 2.6. — La composée de deux isomorphismes f et g de E dans E, est un isomorphisme de E dans E, et on a : $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

■ Noyau et image d'une application linéaire

❑ Noyau

Définition 2.4. — Soit f une application linéaire de E dans F.
On appelle *noyau de f*, noté $\mathrm{Ker}(f)$, le sous-ensemble de E défini par :

$$\mathrm{Ker}(f) = \{x \in E, f(x) = 0_F\}$$

⇨ **Méthode 2.2. Comment déterminer le noyau d'une application linéaire ?**

Propriété 2.2. — Soit f une application linéaire de E dans F.
$\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E

Théorème 2.7. — Une application linéaire f de E dans F est injective si, et seulement si :

$$\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$$

⇨ **Méthode 2.4. Comment montrer qu'une application linéaire est (ou n'est pas) injective ?**

❑ Image

Définition 2.5. — Soit f une application linéaire de E dans F. On appelle *image de f*, notée $\mathrm{Im}(f)$, le sous-ensemble de F défini par : $\mathrm{Im}(f) = \{y \in F, \exists x \in E, y = f(x)\}$.

⇨ **Méthode 2.3 (1). Comment déterminer l'image d'une application linéaire ?**

Propriété 2.3. — Soit f une application linéaire de E dans F.

$\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F

Théorème 2.8. — Une application linéaire f de E dans F est surjective si, et seulement si :

$$\mathrm{Im}(f) = F$$

⇨ **Méthode 2.5. Comment montrer qu'une application linéaire est (ou n'est pas) surjective ?**

■ Rang d'une application linéaire

❑ Image d'une base par une application linéaire

Théorème 2.9. — Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

Toute application linéaire f de E dans F est parfaitement définie par la donnée des vecteurs $f(e_1), \ldots, f(e_n)$.

Théorème 2.10. — Conséquence. Si f et g sont deux applications linéaires de E dans F qui coïncident sur la base $\mathcal{B}$, c'est-à-dire telles que, pour tout i de $[\![1, n]\!]$, $f(e_i) = g(e_i)$, alors $f = g$.

Théorème 2.11. — Soit f une application linéaire de E dans F et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

L'image par f d'une base de E est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$, c'est-à-dire :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left(f(e_1), \ldots, f(e_n)\right)$$

⇨ **Méthode 2.3 (2). Comment déterminer l'image d'une application linéaire ?**

Théorème 2.12. — Soit f une application linéaire de E dans F.

- Si f est bijective, l'image par f d'une base de E est une base de F.
- S'il existe une base de E dont l'image par f est une base de F, alors f est bijective.

Théorème 2.13. — S'il existe un isomorphisme de E vers F, alors on a :

$$\dim E = \dim F$$

❑ Définition du rang d'une application linéaire

Définition 2.6. — Si f est une application linéaire de E dans F, on appelle *rang de f*, et on note $\mathrm{rg}(f)$, la dimension de $\mathrm{Im}(f)$.

Remarque 2.2. — Si $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, le rang d'une application linéaire f de E dans F est le rang de la famille $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$.

❑ Théorème du rang

Théorème 2.14. — Soit f une application linéaire de E dans F.
On a :

$$\dim E = \dim \mathrm{Im}(f) + \dim \mathrm{Ker}(f)$$

Ceci s'écrit aussi :

$$\dim E = \mathrm{rg}(f) + \dim \mathrm{Ker}(f)$$

Remarque 2.3. — Si l'on connaît $\mathrm{Ker}(f)$, ce théorème très important permet d'avoir la dimension de $\mathrm{Im}(f)$ et si l'on connaît $\mathrm{Im}(f)$, il permet d'avoir la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$.

❑ Caractérisation de l'application linéaire nulle

Propriété 2.4. — Soit f une application linéaire de E dans F. On a :

$$\mathrm{rg}(f) = 0 \Leftrightarrow f = 0$$

❑ Caractérisation des isomorphismes

Théorème 2.15. — Si f est une application linéaire de E dans F et si les espaces vectoriels E et F ont même dimension finie, alors on a : f injective $\Leftrightarrow$ f surjective $\Leftrightarrow$ f bijective.

Théorème 2.16. — Conséquence :

- Tout endomorphisme injectif de E est un isomorphisme de E dans E.
- Tout endomorphisme surjectif de E est un isomorphisme de E dans E.

⇨ **Méthode 2.6. Comment montrer qu'une application linéaire est bijective ?**

Théorème 2.17. — Soit E et F deux espaces vectoriels de même dimension n. L'application linéaire f de E dans F est bijective si et seulement si : $\mathrm{rg}(f) = n$.

Théorème 2.18. — En particulier, soit E un espace vectoriel de dimension n.
Un endomorphisme f de E est bijectif si et seulement si : $\mathrm{rg}(f) = n$.

■ Application linéaire, noyau, image

❑ Méthode 2.1. Comment montrer qu'une application est linéaire ?

Pour montrer qu'une application $f : E \to F$ est linéaire, on montre :
• Soit : $\forall (u,v) \in E^2,\ f(u+v) = f(u) + f(v)$ et $\forall u \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ f(\lambda u) = \lambda f(u)$
• Soit, "en une seule fois" : $\forall (u,v) \in E^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v)$.
Lorsqu'on demande de montrer que f est un endomorphisme de E, il faut vérifier, en plus de la linéarité, que : $\forall u \in E,\ f(u) \in E$.

⇨ Exercices 2.1 à 2.5, 2.7, 2.8

Exemple 1. Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f((x,y)) = (x-y,\ 2x-3y,\ x+2y).$$

Montrer que f est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$.
• De par sa définition, f est bien une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$.
• Soit deux vecteurs $u = (x,y)$ et $u' = (x',y')$ de $\mathbb{R}^2$ et un réel λ. On a :
$\lambda u + u' = (\lambda x + x',\ \lambda y + y')$ et, par définition de f :
$f(\lambda u + u') = (\lambda x + x' - (\lambda y + y'),\ 2(\lambda x + x') - 3(\lambda y + y'),\ \lambda x + x' + 2(\lambda y + y'))$.
$f(\lambda u + u') = (\lambda(x-y) + x' - y',\ \lambda(2x-3y) + 2x' - 3y',\ \lambda(x+2y) + x' + 2y')$.
$f(\lambda u + u') = \lambda(x-y,\ 2x-3y,\ x+2y) + (x'-y',\ 2x'-3y',\ x'+2y') = \lambda f(u) + f(u')$
Finalement, f est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$.

Exemple 2. Soit n un entier naturel et f l'application définie par : $\forall P \in \mathbb{R}_n[x],\ f(P) = P'$, où P' désigne la dérivée de P.
Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.
• Si P est élément de $\mathbb{R}_n[x]$, la fonction dérivée P' est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à n (même de degré inférieur ou égal à $n-1$).
Ainsi, f est bien une application de $\mathbb{R}_n[x]$ dans $\mathbb{R}_n[x]$.
• Soit P et Q deux éléments de $\mathbb{R}_n[x]$ et λ un réel. Grâce à la linéarité de la dérivation, on a :

$$f(\lambda P + Q) = (\lambda P + Q)' = \lambda P' + Q' = \lambda f(P) + f(Q)$$

Finalement, f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.

❑ Méthode 2.2. Comment déterminer le noyau d'une application linéaire ?

Pour chercher le noyau d'une application linéaire de E dans F, on détermine les vecteurs x de E tels que $f(x)=0_F$.

⇨ Exercices 2.2, 2.3, 2.4, 2.7, 2.9

Exemple 1. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini, pour tout vecteur $u=(x,y)$ de $\mathbb{R}^2$, par : $f(u)=(x+y,2x+2y)$. Déterminer $\text{Ker}(f)$.

Soit $u=(x,y)$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$.

On a : $u\in\text{Ker}(f) \Leftrightarrow f(u)=0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow (x+y,2x+2y)=(0,0) \Leftrightarrow x+y=0$.

Par conséquent, on a : $\text{Ker}(f)=\{(x,-x),x\in\mathbb{R}\}=\text{Vect}((1,-1))$.

Exemple 2. Soit n un entier naturel et f l'application définie par : $\forall P\in\mathbb{R}_n[x],\ f(P)=P'$, où P' désigne toujours la dérivée de P. Déterminer $\text{Ker}(f)$.

Soit P une fonction de $\mathbb{R}_n[x]$.

On a : $P\in\text{Ker}(f) \Leftrightarrow f(P)=0 \Leftrightarrow P'=0 \Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R},\ P'(x)=0$.

Autrement dit, P appartient à $\text{Ker}(f)$ si, et seulement si, P est un polynôme constant.

Conclusion : $\text{Ker}(f)$ est l'ensemble des polynômes constants ou encore : $\text{Ker}(f)=\mathbb{R}_0[x]$.

❑ Méthode 2.3. Comment déterminer l'image d'une application linéaire ?

Pour chercher l'image d'une application linéaire f d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F :

• Soit on détermine les vecteurs y de F qui s'écrivent comme image par f d'un vecteur x de E (voir l'**exemple 2**).

• Soit, si $(e_1,\ldots,e_n)$ est une base de E, on a : $\text{Im}(f)=\text{Vect}(f(e_1),\ldots,f(e_n))$.

⇨ Exercices 2.3, 2.4, 2.7, 2.9

Exemple 1. On note $\mathcal{B}=(e_1,e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini pour tout vecteur $u=(x,y)$ de $\mathbb{R}^2$ par : $f(u)=(x+y,2x+2y)$. Déterminer $\text{Im}(f)$.

On sait que $\text{Im}(f)=\text{Vect}(f(e_1),f(e_2))$.

De plus, $f(e_1)=f((1,0))=(1,2)$ et $f(e_2)=f((0,1))=(1,2)$, donc $f(e_1)=f(e_2)$.

On en conclut que $\text{Im}(f)=\text{Vect}(f(e_1))$, soit encore : $\text{Im}(f)=\text{Vect}((1,2))$.

Exemple 2. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$ défini par : $f(P) = P'$. Déterminer $\mathrm{Im}(f)$.

• On a vu (**exemple 2** de la **méthode 2.1**) que, si P était élément de $\mathbb{R}_n[x]$, alors P' était une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à $n-1$, ce qui prouve que : $\mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{R}_{n-1}[x]$.

• Réciproquement, si Q est une fonction polynomiale de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$, alors, en écrivant $Q(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$, on est sûr que Q est la dérivée de la fonction polynomiale P, élément de $\mathbb{R}_n[x]$, définie par : $P(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \frac{x^{k+1}}{k+1}$. Ceci prouve que : $\mathbb{R}_{n-1}[x] \subset \mathrm{Im}(f)$.

Par double inclusion, on a : $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_{n-1}[x]$.

■ Application linéaire injective, surjective, bijective

❑ Méthode 2.4. Comment montrer qu'une application linéaire est (ou n'est pas) injective ?

Pour montrer qu'une application linéaire f, de E dans F, est injective, on cherche son noyau $\mathrm{Ker}(f)$.

L'application f est injective si, et seulement si : $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.

⇨ Exercices 2.4, 2.7

Exemple 1. Soit n un entier naturel et f l'endomorphisme qui, à toute fonction polynomiale P de $\mathbb{R}_n[x]$, associe : $f(P) = P'$. L'endomorphisme f est-il injectif ?

On a vu (**exemple 2** de la **méthode 2.2**) que $\mathrm{Ker}(f) = \mathbb{R}_0[x] \neq \{0\}$ donc f n'est pas injectif.

Exemple 2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ f(M) = AM$$

Vérifier que A est inversible puis que l'application f est injective.

Le déterminant de la matrice A est égal à $1\times 1 - (-1)\times 2 = 3 \neq 0$ donc A est inversible.

Déterminons maintenant les matrices M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $f(M) = 0$.

$f(M) = 0 \Leftrightarrow AM = 0 \Leftrightarrow A^{-1} \times AM = A^{-1} \times 0 \Leftrightarrow M = 0$.

On en conclut que $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$ donc f est injective.