

Daniel **Fredon**

AIDE-MÉMOIRE

Mathématiques

Licence • Prépas • CAPES

3^e édition

DUNOD

Photographie de couverture : Adil Tastekov © - Adobe Stock.com

© Dunod, 2004, 2014, 2021

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff

www.dunod.com

ISBN 978-2-10-082298-0

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Table des matières

Analyse dans $\mathbb{R}$

1. Nombres réels	7
2. Généralités sur les fonctions numériques	11
3. Limites et continuité	15
4. Fonctions dérivables	23
5. Fonctions usuelles	29
6. Suites numériques	38
7. Intégrales définies	44
8. Calcul des primitives	50
9. Formules de Taylor	54
10. Intégrales généralisées	60
11. Équations différentielles	65
12. Séries numériques	76

Analyse dans $\mathbb{R}^n$

13. Espaces vectoriels normés	82
14. Calcul différentiel dans $\mathbb{R}^n$	92
15. Optimisation d'une fonction numérique	99
16. Intégrales multiples	103
17. Intégrales curvilignes	110
18. Intégrales de surface	114
19. Suites et séries de fonctions	117
20. Séries entières	121
21. Séries de Fourier	127
22. Intégrales dépendant d'un paramètre	131

Algèbre générale

23. Rudiments de logique	134
24. Ensembles	138
25. Applications	141
26. Relations	144
27. Entiers naturels	147
28. Structures algébriques	152
29. Arithmétique dans $\mathbb{Z}$	161
30. Nombres complexes	165
31. Polynômes	171
32. Fractions rationnelles	177
33. Construction des ensembles de nombres	180

Algèbre linéaire et multilinéaire

34. Espaces vectoriels	182
35. Applications linéaires	??
36. Matrices	192
37. Systèmes linéaires	200
38. Déterminants	205
39. Réduction des endomorphismes	210
40. Dualité	216
41. Formes bilinéaires et quadratiques	219
42. Espaces préhilbertiens	223
43. Espaces vectoriels euclidiens	230
44. Espaces vectoriel hermitiens	236

Géométrie

45. Géométrie affine réelle	239
46. Calcul vectoriel	245
47. Géométrie euclidienne du plan et de l'espace	248

48. Courbes paramétrées	260
49. Propriétés des courbes	265
50. Surfaces	269

Calcul des probabilités

51. Calcul des probabilités	275
52 Variables aléatoires	282
53. Lois usuelles	289
54. Convergences et approximations	295
55. Estimation, tests statistiques	299
Table 1 : fonction de répartition de $\mathcal{N}(0, 1)$	310
Table 2 : écart réduit de $\mathcal{N}(0, 1)$	311
Table 3 : lois de Student	312
Index	312

Un grand merci à Geoffrey Lescaux pour sa relecture attentive de l'édition précédente et ses suggestions qui ont conduit à améliorer la nouvelle édition.

1

Nombres réels

1. Premières propriétés

1.1 Corps ordonné

On dit que l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels est :

- un *corps* pour dire qu'il est muni de deux opérations $+$ et $\times$, avec toutes les propriétés dont vous avez l'habitude (cf. chap. 30);
- un *corps ordonné* pour dire que la relation d'ordre $\leq$ est compatible avec $+$ et $\times$, c'est-à-dire :

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \forall b \in \mathbb{R} \quad \forall c \in \mathbb{R} \quad a \leq b \implies a + c \leq b + c$$

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \forall b \in \mathbb{R} \quad \forall c \geq 0 \quad a \leq b \implies ac \leq bc$$

1.2 Règles de calcul

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \quad (\text{binôme}) \quad \text{où} \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$x^n - y^n = (x - y) \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-k-1} y^k.$$

1.3 Valeur absolue

La valeur absolue d'un nombre réel a , notée $|a|$, est définie par :

$$|a| = a \quad \text{si} \quad a \geq 0 \quad ; \quad |a| = -a \quad \text{si} \quad a \leq 0.$$

➤ *Propriétés* $\forall a \in \mathbb{R} \quad \forall b \in \mathbb{R}$

$$|a| \geq 0 \quad ; \quad |a| = 0 \iff a = 0 \quad ; \quad |ab| = |a| |b|$$

$$|a + b| \leq |a| + |b| \quad ; \quad \left| |a| - |b| \right| \leq |a - b|$$

1.4 Propriété d'Archimède

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b > 0$. Alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $bk > a$.

1.5 Partie entière

Étant donné un nombre réel x , il existe un plus grand entier relatif, noté $\lfloor x \rfloor$, tel que $\lfloor x \rfloor \leq x$. On l'appelle la partie entière de x .

On a donc, par définition : $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.

 *Attention à ne pas confondre avec la suppression de la partie décimale quand $x < 0$; par exemple $\lfloor -4,3 \rfloor = -5$.*

2. Intervalles

2.1 Définitions

Pour $a \leq b$, le segment, $[a; b]$ est défini par :

$$[a; b] = \{x \in \mathbb{R} ; a \leq x \leq b\}$$

On utilise souvent la propriété :

$$c \in [a, b] \iff \exists t \in [0, 1] \quad c = ta + (1 - t)b.$$

On définit de même les autres types d'intervalles :

$$]a; b[, [a; b[,]a, b],]a, +\infty[, [a, +\infty[,] - \infty, b[,] - \infty, b],$$

$$] - \infty, +\infty[= \mathbb{R}.$$

2.2 Propriété caractéristique

Une partie A de $\mathbb{R}$ est un intervalle si, et seulement si :

$$\forall a \in A \quad \forall b \in A \quad a < c < b \implies c \in A.$$

2.3 Voisinage d'un point

Soit $a \in \mathbb{R}$. Une partie V de $\mathbb{R}$ est un voisinage de a si elle contient un intervalle ouvert centré sur a .

3. Ordre dans $\mathbb{R}$

3.1 Majoration, minoration

➤ *Définitions*

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On dit que a est un majorant de A si $x \leq a$ pour tout x de A .

Si, en plus, $a \in A$, alors a est le plus grand élément de A , noté $\max A$.

Si A admet un majorant, on dit que A est majorée.

On définit de même : minorant, plus petit élément, partie minorée.

➤ *Unicité*

Si une partie non vide de $\mathbb{R}$ admet un plus grand élément, ou un plus petit élément, il est unique. Mais il peut ne pas exister.



*Surveillez votre vocabulaire : **un majorant**, **le plus grand élément**.*

➤ *Cas particulier des entiers naturels*

Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

Toute partie non vide majorée de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément.

3.2 Borne supérieure, inférieure

➤ *Définitions*

La borne supérieure de A est le plus petit élément (s'il existe) de l'ensemble des majorants de A .

La borne inférieure de A est le plus grand élément (s'il existe) de l'ensemble des minorants de A .

➤ *Caractérisation*

M est la borne supérieure de A si, et seulement si, on a, à la fois :

$\forall x \in A \quad x \leq M$, c'est-à-dire que M est un majorant ;

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in A \quad M - \varepsilon < x$, c'est-à-dire que $M - \varepsilon$ n'est pas un majorant.

m est la borne inférieure de A si, et seulement si, on a, à la fois :

$\forall x \in A \quad m \leq x$, c'est-à-dire que m est un minorant ;

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in A \quad x < m + \varepsilon$, c'est-à-dire que $m + \varepsilon$ n'est pas un minorant.

➤ *Remarque*

Si A admet un plus grand élément, alors c'est la borne supérieure de A .

Si A admet un plus petit élément, alors c'est la borne inférieure de A .

➤ *Théorème d'existence*

Toute partie non vide et majorée (resp. minorée) de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure (resp. inférieure).

3.3 Droite numérique achevée

Pour ne pas avoir de restriction dans le théorème précédent, on considère un nouvel ensemble noté $\overline{\mathbb{R}}$ obtenu à partir de $\mathbb{R}$ par l'adjonction de deux éléments notés $-\infty$ et $+\infty$.

On prolonge à $\overline{\mathbb{R}}$ la relation d'ordre en posant pour tout $a \in \mathbb{R}$:

$$-\infty < a < +\infty.$$

On définit ainsi la droite numérique achevée dont le plus grand élément est $+\infty$, le plus petit élément $-\infty$. Et le théorème précédent se généralise :

Toute partie non vide de $\overline{\mathbb{R}}$ admet une borne supérieure et une borne inférieure dans $\overline{\mathbb{R}}$.

4. Points à caractère topologique

Soit $a \in \mathbb{R}$ et E une partie non vide de $\mathbb{R}$.

4.1 Point adhérent

Le point a est adhérent à E si tout voisinage de a contient un point de E .

L'ensemble des points adhérents à E se note $\overline{E}$. C'est l'adhérence de E .

On a toujours $E \subset \overline{E}$. Si $E = \overline{E}$, on dit que E est une partie fermée.

Si $\overline{E} = \mathbb{R}$, on dit que E est dense dans $\mathbb{R}$.

4.2 Point d'accumulation

Le point a est un point d'accumulation de E si tout voisinage de a contient un point de E différent de a .

Un point d'accumulation est nécessairement adhérent à E . Si a est un point adhérent sans être point d'accumulation, c'est un point isolé.

➤ *Théorème de Bolzano-Weierstrass*

Toute partie infinie et bornée de $\mathbb{R}$ admet au moins un point d'accumulation.

4.3 Point intérieur

Le point a est un point intérieur de E s'il existe un intervalle ouvert centré sur a inclus dans E , c'est-à-dire si E est un voisinage de a .

L'ensemble des points intérieurs de E se note $\overset{\circ}{E}$. C'est l'intérieur de E .

On a toujours $\overset{\circ}{E} \subset E$. Si $E = \overset{\circ}{E}$, on dit que E est une partie ouverte.

2

Généralités sur les fonctions numériques

1. Définitions

1.1 Fonction numérique

Définir une fonction numérique f sur une partie non vide E de $\mathbb{R}$, c'est indiquer comment faire correspondre au plus un réel y à tout x de E .

Le réel y est l'image de x par f et s'écrit $f(x)$. On note :

$$\begin{aligned} f: E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x). \end{aligned}$$

L'ensemble des réels qui ont effectivement une image par f est l'ensemble de définition de f . Il est noté D_f , ou D s'il n'y a pas d'ambiguïté.

1.2 Représentation graphique

Le plan étant rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la représentation graphique de f est l'ensemble C_f des points de coordonnées $(x, f(x))$ avec $x \in D_f$.

1.3 Images et images réciproques d'ensembles

Soit $A \subset D_f$. L'image de A par f est l'ensemble :

$$f(A) = \{f(x) ; x \in A\}.$$

Soit $B \subset \mathbb{R}$. L'image réciproque de B par f est l'ensemble :

$$f^{-1}(B) = \{x \in D_f ; f(x) \in B\}.$$



Cette notation permet de ne pas confondre avec la réciproque d'une bijection, car, ici, on ne suppose rien sur f . Quand la distinction sera installée, on utilisera $f^{-1}(B)$.

1.4 Restriction, prolongement

Soit f une fonction définie sur I et g une fonction définie sur J . Si $I \subset J$ et si $f(x) = g(x)$ pour tout x de I , on dit que f est une restriction de g , ou que g est un prolongement de f .

La restriction de f à I se note : $f|_I$.

2. Premières propriétés

2.1 Parité

f est paire si :

$$\forall x \in D_f \quad (-x) \in D_f \quad \text{et} \quad f(-x) = f(x).$$

Son graphe est symétrique par rapport à (Oy) .

f est impaire si :

$$\forall x \in D_f \quad (-x) \in D_f \quad \text{et} \quad f(-x) = -f(x).$$

Son graphe est symétrique par rapport à O .

2.2 Périodicité

f est périodique, de période T (ou T -périodique), si

$$\forall x \in D_f \quad (x + T) \in D_f \quad \text{et} \quad f(x + T) = f(x).$$

Son graphe est invariant par les translations de vecteurs $kT \vec{i}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

2.3 Sens de variation

f est croissante sur I si $I \subset D_f$ et

$$\forall x_1 \in I \quad \forall x_2 \in I \quad x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2).$$

f est décroissante sur I si $I \subset D_f$ et

$$\forall x_1 \in I \quad \forall x_2 \in I \quad x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2).$$

f est monotone sur I si elle est croissante sur I , ou décroissante sur I .

Avec des inégalités strictes, on définit : f strictement croissante, strictement décroissante, strictement monotone, sur D_f .

2.4 Extrémum

f admet un maximum (resp. minimum) global en x_0 si :

$$\forall x \in D_f \quad f(x) \leq f(x_0) \quad (\text{resp. } f(x) \geq f(x_0)).$$

f admet un maximum (resp. minimum) local en $x_0 \in D_f$, s'il existe un intervalle ouvert $I \subset D_f$, tel que :

$$\forall x \in I \quad f(x) \leq f(x_0) \quad (\text{resp. } f(x) \geq f(x_0)).$$

Un maximum ou un minimum local est dit *extremum local* en x_0 .

Un *extremum* est un maximum ou un minimum.

3. Relation d'ordre

3.1 Comparaison de fonctions

f et g étant deux fonctions, à valeurs réelles, définies sur le même ensemble de définition D , on note $f \leq g$ (resp. $f \geq g$) si :

$$\forall x \in D \quad f(x) \leq g(x) \quad (\text{resp. } f(x) \geq g(x)).$$

Si $f \geq 0$, f est dite *positive*.

3.2 Majorant, minorant

Si l'ensemble des images $f(D)$ est majoré, ou minoré, ou borné, on dit que f est *majorée*, ou *minorée*, ou *bornée*.

Si l'image $f(I)$ de I admet une borne supérieure, ou une borne inférieure, on parle de *borne supérieure*, de *borne inférieure*, de f sur I et on note :

$$\sup_{x \in I} f(x) ; \quad \inf_{x \in I} f(x).$$

3.3 Propriétés

$$\inf_{x \in I} f(x) = - \sup_{x \in I} (-f(x)).$$

Si, pour tout $x \in I$, on a $f(x) \leq g(x)$, alors $\sup_{x \in I} f(x) \leq \sup_{x \in I} g(x)$.

Si $I \subset J$, on a : $\sup_{x \in I} f(x) \leq \sup_{x \in J} f(x)$.

4. Opérations sur les fonctions

4.1 Valeur absolue d'une fonction

f étant définie sur D , la fonction $|f|$ est définie sur D par $x \mapsto |f(x)|$.

Une fonction f est *bornée* si, et seulement si, $|f|$ est *majorée*.

4.2 Opérations algébriques

Soit f et g deux fonctions numériques et λ un réel.

La fonction λf est définie sur D_f par : $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$.

La fonction $f + g$ est définie sur $D_f \cap D_g$ par :

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

La fonction $f g$ est définie sur $D_f \cap D_g$ par :

$$(f g)(x) = f(x) g(x).$$

La fonction $\frac{f}{g}$ est définie sur $D_f \cap [D_g \setminus \{x ; g(x) = 0\}]$ par :

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

4.3 Composition

On appelle composée de f par g la fonction, notée $g \circ f$, définie sur $D_f \cap \overset{-1}{f}(D_g)$ par :

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

3

Limites et continuité

1. Définitions

Soit f une fonction, à valeurs réelles, définie sur un intervalle I .

1.1 Limite d'une fonction en a

Soit a un point appartenant à I , ou extrémité de I . On dit que f admet une limite finie l en a , et on note $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$, si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - a| \leq \delta \implies |f(x) - l| \leq \varepsilon.$$



Cette limite peut exister même si f n'est pas définie en a . Mais si f est définie en a et si $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe, alors

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Si une fonction admet une limite l en a , cette limite est unique.

1.2 Limite à gauche, limite à droite

f admet une limite à droite l en a si la restriction de f à $I \cap]a, +\infty[$ admet pour limite l en a . On note : $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l$.

f admet une limite à gauche l en a si la restriction de f à $I \cap]-\infty, a[$ admet pour limite l en a . On note : $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l$.

Si f est définie sur un intervalle de la forme $]a - \alpha, a + \alpha[$, sauf en a , alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \iff \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l.$$

Si f est définie en a , ces deux limites doivent aussi être égales à $f(a)$.

1.3 Limite infinie en a

On dit que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers a si :

$$\forall A > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - a| \leq \delta \implies f(x) \geq A.$$

On note : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$.

On définit de même : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$.

1.4 Limite de f lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$

- On dit que f a pour limite réelle l quand x tend vers $+\infty$ si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists B > 0 \quad \forall x \in I \quad x \geq B \implies |f(x) - l| \leq \varepsilon.$$

On note : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$.

On définit de manière analogue $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$.

- On dit que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ si :

$$\forall A > 0 \quad \exists B > 0 \quad \forall x \in I \quad x \geq B \implies f(x) \geq A.$$

On note : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

On définit de manière analogue $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \dots$



Toutes ces définitions peuvent se regrouper en considérant a et l dans $\overline{\mathbb{R}}$.

1.5 Critère de Cauchy

La fonction f a une limite réelle au point x_0 si, et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \text{tel que} \quad \forall x \in D \quad \forall x' \in D$$

$$[|x - x_0| < \alpha \quad \text{et} \quad |x' - x_0| < \alpha] \implies |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$



L'avantage de ce critère est de ne pas supposer connue la limite éventuelle de f .

2. Propriétés des limites

2.1 Caractérisation séquentielle

Soit f définie sur un intervalle I et a un point de I .

f a pour limite l au point a si, et seulement si, pour toute suite (x_n) d'éléments de l'ensemble de définition de f convergeant vers a , la suite $(f(x_n))$ converge vers l , finie ou non.