Oraux
corrigés et commentés

Concours PSi

Maths

Mines-Ponts
Mines-Télécom
Centrale-Supélec
ENSEA
CCINP



ellipses

Éric Cassam-Chenai
Walter Damin

Oraux

corrigés et commentés

Concours PSi

Maths

Mines-Ponts
Mines-Telecom
Centrale-Supelec
ENSEA
CCINP

Éric Cassam-Chenai
Professeur au lycée Bellevue à Toulouse
et colleur en classe préparatoire aux grandes écoles

Walter Damin
Professeur en classe préparatoire aux grandes écoles
au lycée Pierre-Paul Riquet à Saint Orens de Gameville

ellipses

ISBN 9782340-099784

Dépôt légal : janvier 2025

©Ellipses Édition Marketing S.A., 2025
8/10 rue la Quintinie 75015 Paris



Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5.2° et 3°a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

AVANT-PROPOS

Nous tenons tout d'abord à particulièrement remercier François LAVAUX et Richard LEROY pour leurs conseils et remarques qui nous furent précieux. Nous remercions également nos familles pour leur soutien tout le long de la rédaction de ce livre.

Ce livre rassemble 263 planches d'oraux en mathématiques qui ont été posées dans les concours Mines-Ponts, Centrale-Supelec et CCINP en filière PSI. De plus, un certain nombre de planches d'oraux de ce livre sont issus des oraux de Mines-Telecom et de l'ENSEA, oraux proposés à certains des candidats qui ont passé les écrits respectivement de Mines-Ponts et de Centrale-Supelec. Cinq types d'oraux sont représentés dans cet ouvrage. Les modalités différent souvent (exercice sans préparation et assez court, exercice long et détaillé etc.), les spécificités de chaque concours sont rappelées d'ailleurs ci-dessous.

Ce livre d'annales d'oraux n'est pas classé par concours mais par parties du programme. Ce qui permet à tout possesseur de ce livre de commencer à travailler quelques planches dès que la partie de cours correspondante aura été vue.

D'ailleurs, signalons que les planches des paragraphes intitulés : « Algèbre générale, Algèbre linéaire sans réduction, Analyse générale, Séries numériques (en partie), Univers fini » sont entièrement sur le programme de première année et peuvent être abordés au moment opportun. Ces planches offrent une révision idéale pour l'été qui précède la deuxième année.

On notera dans ce livre essentiellement deux types de planches qui varient suivant la longueur du sujet. D'abord les planches de type ENSEA, Mines-Telecom ou encore l'exercice posé à Mines-Ponts en fin d'épreuve. Ces planches sont assez courtes et devraient être traités en 15 ou 20 minutes maximum. Ce qui signifie que faire les planches de Mines-Telecom permettent de s'entraîner pour l'oral de l'ENSEA et réciproquement.
Il y a ensuite les planches assez longues de type Centrale-Supelec, Mines-Ponts ou CCINP. Attention, souvent dans ce type de planches seuls les très bons candidats peuvent prétendre à aborder la dernière question. Ces trois types oraux peuvent donc se préparer en même temps même s'il faut avouer une planche de CCINP sera globalement de difficulté inférieure à une planche de Mines-Ponts ou de Centrale-Supelec.

Lors de vos entraînements, vous devez prendre en compte le temps éventuel de préparation : Centrale-Supelec sans préparation, 15 minutes à Mines-Ponts et 30 minutes à CCINP.

Enfin quelques planches du concours Centrale-Supelec sont proposés pour préparer l'oral de maths 2 et signalées **« Planche avec Python ».** L'idée est d'utiliser des codes types en Python.

Évoquons maintenant la façon dont nous avons conçu et structuré nos planches d'oraux.

A. La partie ***« Énoncé »*** correspond à l'exercice ou l'un des deux exercices (selon le concours) et qui ont été réellement posés le jour de l'oral.

B. La partie ***« Décryptage et indications »*** figure systématiquement après chaque énoncé. Un oral est une interaction entre le candidat et l'examinateur qui démarre rapidement (sauf à l'ENSEA et à Mines-Ponts où il y a un temps de préparation). Pour simuler au mieux cette interaction dans un livre, nous donnons des indications ou des pistes à l'endroit où cela semble nécessaire. Imaginez que ce qui est écrit correspond à des coups de pouce de l'examinateur. Bien entendu, le plus optimal et recommandé est de chercher quelques instants seul chaque question et de regarder l'indication que si vous êtes vraiment bloqué. S'il n'y a pas d'indication ou d'aide à démarrer, c'est que la question est facile ou que l'indication est dans l'énoncé.

C. Enfin, le déroulé de la ***solution*** qui est détaillé et agrémenté de ***« Commentaires »*** qui peuvent être des remarques, des rappels de cours ou des comportements de candidats sur telle ou telle question ou telle partie du programme.

Rappelons le déroulé de l'oral de chaque concours. Attention, il n'est valable qu'à la date où cet ouvrage est publié et les modalités peuvent évoluer à l'avenir, notamment pour le concours Centrale-Supelec. Allez voir de toute façon les rapports de jury. Et un conseil, allez voir les rapports sur plusieurs années antérieures. Les remarques et les conseils peuvent différer.

1. Modalités de l'oral de Mathématiques au concours Mines-Ponts

Cette épreuve **dure entre 1h05 et 1h15**. Le candidat sera évalué sur (au moins) deux exercices portant sur des domaines différents (algèbre, analyse et probabilités) des programmes de première année et de deuxième année. Pour le premier exercice, le candidat dispose d'un temps de **préparation sur table de 15 minutes**. Ce dernier et l'examinateur échangeront ensuite pendant un temps d'environ 50 minutes à 1h. D'abord à propos de l'exercice préparé puis à propos d'un second qui sera traité **sans préparation**. L'examinateur décide du temps consacré à chaque exercice en fonction de la prestation du candidat, et ce toujours dans son intérêt. L'évaluation portera, entre autres, sur :– la maîtrise et la compréhension des notions mathématiques au programme,– la capacité à proposer des pistes de résolution, les explorer et les critiquer si nécessaire,– la capacité à élaborer une solution structurée et argumentée,– la capacité à rebondir sur les indications fournies.

2. Modalités de l'oral de Mathématiques au concours Mines-Telecom

L'épreuve a une **durée de 30 minutes** et consiste en la résolution **sans préparation de deux exercices** portant sur des parties différentes du programme de la filière du candidat. Il apparaît donc deux exercices portant sur deux parties différentes du programme. Quant au déroulement de l'épreuve : les deux exercices doivent être abordés. L'examinateur décide du tempo (à quel moment on passe à l'autre exercice). Ceci dit, le candidat peut commencer par l'exercice qui l'inspire le plus sachant qu'il faudra aller voir l'autre à un moment donné.

3. Modalités de l'oral de Mathématiques au concours Centrale-Supelec

L'épreuve de **mathématiques 1** est une épreuve **sans préparation d'une durée d'environ 30 minutes**. L'usage de la calculatrice est autorisé mais dans les faits très rare. Le candidats se voient proposer un exercice de deux à quatre questions. Celles-ci sont progressives. Il est tout à fait possible d'avoir une bonne note sans avoir répondu à toutes les questions. L'interrogateur peut être amené à poser quelques questions en dehors de l'exercice, ce sans corrélation avec le niveau de la prestation du candidat.

L'épreuve de **mathématiques 2** est une épreuve de mathématiques utilisant l'outil informatique. Un ordinateur équipé des environnements de développement Pyzo et Spyder est mis à disposition des candidats. Des fiches d'aide présentant différentes fonctions Python pouvant être utiles sont fournies lors de l'épreuve sous forme papier ainsi que sous forme d'un fichier Pdf présent sur l'ordinateur. Ces fiches sont consultables en ligne sur le site du concours. Les candidats disposent d'une préparation d'une demi-heure puis sont interrogés pendant 25 minutes environ. L'outil informatique peut être employé pour effectuer des calculs, des tracés de courbes ou de surfaces, étudier des exemples numériques correspondant à un problème théorique donné, effectuer des calculs matriciels (par exemple résoudre un système linéaire ou rechercher les éléments propres d'une matrice), simuler une expérience aléatoire, émettre des conjectures.

4. Modalités de l'oral de Mathématiques au concours de l'ENSEA

Il est distribué aux candidats **deux exercices à préparer pendant 20 minutes**. Le candidat doit toucher aux deux exercices. Ils sont choisis sur deux parties différentes du programme. Puis le candidat passe au tableau pendant les 20 minutes suivantes et commence généralement par l'exercice de son choix.

5. Modalités de l'oral de Mathématiques au concours CCINP

L'épreuve orale de mathématiques dure **une heure** répartie ainsi :
Une demi-heure pour présenter les documents administratifs et préparer le sujet qui ne contient **qu'un seul exercice** ;
Une demi-heure d'épreuve orale divisée en deux parties :
- présentation au tableau de l'exercice préparé (environ 20 minutes)
- réponse à des questions sans préparation portant sur diverses parties du programme.

L'épreuve orale comprend donc deux parties portant sur le programme des deux années.

Dernier conseil. Pour préparer ces questions sans préparation sur diverses parties du programme qui clôturent l'oral de CCINP, il faut avoir une bonne connaissance du cours. C'est une condition nécessaire (mais pas suffisante) pour réussir son oral. Beaucoup de planches proposées ici comme vous pourrez vous en rendre compte, contiennent des questions de cours plus ou moins camouflées. Par exemple, on vous conseille pour votre préparation de parcourir le résumé de cours du livre de la collection Prépas Sciences, filière PSI aux Editions Ellipses.

Pour finir cet Avant-propos donnons quelques extraits de rapports de jury issus des différents concours. Les premiers sont choisis car ce qu'ils conseillent est intemporel et se transpose à tout oral. Donc à lire. Les derniers sont choisis car ils ne manquent pas d'humour.

Extrait de rapport du jury

Ce qui est attendu des candidats - la forme :
S'agissant d'une épreuve orale, il est nécessaire d'instaurer un dialogue avec l'examinateur. Il faut pour cela : s'exprimer clairement, utiliser un vocabulaire rigoureux, commenter les initiatives prises, expliquer la démarche de résolution suivie... De même, la gestion du tableau doit être soignée afin d'éviter les erreurs - fréquentes - de calculs, de faciliter le raisonnement, mais aussi de rendre l'exposé plus clair.

Extrait de rapport du jury

Ce qui est attendu des candidats - le fond :
Cette épreuve a pour but d'évaluer la connaissance et la compréhension des notions figurant au programme de mathématiques des deux années de classes préparatoires, mais aussi la capacité à être autonome, à prendre des initiatives, à réagir... Si la méconnaissance du cours est fortement sanctionnée, un candidat énumérant des résultats (parfois, même hors-programme) sans en comprendre la signification voire sans savoir les appliquer, ne sera pas mieux récompensé.

Extrait de rapport du jury

Ce qui est surprenant, c'est que le principal problème rencontré par de nombreux candidats, et la source de leur incapacité à résoudre des problèmes, est facilement analysable : une méconnaissance, parfois même une profonde ignorance du COURS.

Extrait de rapport du jury

De façon générale, les candidats n'ont pas peur des calculs, aussi compliqués soient-ils. Malheureusement, cela joue parfois des tours. Il n'est pas rare qu'en réfléchissant un peu, des calculs qui semblaient très lourds se revèlent très rapides à l'aide d'arguments simples, cela est particulièrement manifeste en algèbre linéaire et lors de la résolution de certaines équations différentielles.

Extrait de rapport du jury

Profitons-en ici pour saluer la presque-disparition des jeans à trous, des pantalons qu'il faut remonter toutes les trois secondes pour éviter d'exhiber son caleçon, et autres bermudas, dont le port semble plus indiqué sur les plages qu'à un oral d'entrée dans une Grande École.

Extrait de rapport du jury

Nous parlons du comportement du candidat pendant l'oral. Si nous sommes satisfait de l'effort, indispensable d'apprentissage des notions prévues par le programme, la passivité des candidats nous inquiète. Un bout de dialogue entre un candidat et l'un d'entre nous :
L'examinateur résume les résultats obtenus, et rappelle l'objectif de la question.
L'examinateur : -Quelle approche pourrait-on envisager maintenant ?
Le candidat : -Ah mais je vois très bien où il faut arriver, mais je fais comment ?
L'examinateur : -.....(Silence)
Le candidat (sur un ton insistant, ayant peut-être peur que l'examinateur ne se soit emdormi alors que le temps passe, ou n'ait pas entendu la question...) :
-Monsieur ? Je fais quoi alors maintenant ? ? ?
Une telle attitude consumériste, fréquente, est inquiétante pour de futurs ingénieurs. Certains candidats ont par ailleurs clairement avoué préférer le silence :
« Mon prof m'a dit qu'il vaut mieux ne rien dire plutôt que de dire une bêtise ; alors je ne dirai rien. ».
Nous ne sommes pas sûrs que le candidat qui a proféré cette sentence ait été pleinement satisfait de l'appréciation chiffrée qui a couronné son oral.

Sommaire

I. Algèbre 1

1. Algèbre générale
Mines-Ponts . . . 3
Mines-Telecom . . . 7
Centrale-Supelec . . . 10
ENSEA . . . 16

2. Algèbre linéaire sans réduction
Mines-Ponts . . . 19
Mines-Telecom . . . 29
Centrale-Supelec . . . 37
ENSEA . . . 43
CCINP . . . 52

3. Algèbre linéaire avec réduction
Mines-Ponts . . . 59
Mines-Telecom . . . 74
Centrale-Supelec . . . 87
ENSEA . . . 105
CCINP . . . 122

4. Espaces préhilbertiens et euclidiens
Mines-Ponts . . . 135
Mines-Telecom . . . 144
Centrale-Supelec . . . 155
ENSEA . . . 165
CCINP . . . 179

II. Analyse 195

5. Analyse générale
Mines-Ponts . . . 197
Mines-Telecom . . . 200
Centrale-Supelec . . . 206

ENSEA 209
CCINP 214

6. Espaces vectoriels normés. Dérivabilité des fonctions vectorielles
Mines-Ponts 217
Mines-Telecom 220
Centrale-Supelec 225
ENSEA 227
CCINP 230

7. Séries numériques
Mines-Ponts 237
Mines-Telecom 247
Centrale-Supelec 252
ENSEA 256
CCINP 262

8. Intégration sur un intervalle
Mines-Ponts 271
Mines-Telecom 277
Centrale-Supelec 284
ENSEA 287
CCINP 294

9. Suites et séries de fonctions. Interversion limites et intégrales
Mines-Ponts 299
Mines-Telecom 322
Centrale-Supelec 336
ENSEA 347
CCINP 355

10. Séries entières
Mines-Ponts 373
Mines-Telecom 387
Centrale-Supelec 397
ENSEA 410
CCINP 417

11. Intégrales à paramètres
Mines-Ponts 431
Mines-Telecom 442
Centrale-Supelec 447
ENSEA 457
CCINP 464

12. Équations différentielles linéaires
Mines-Ponts 467
Mines-Telecom 479
Centrale-Supelec 483
ENSEA 487
CCINP 495

13. Fonctions de plusieurs variables
Mines-Ponts 505
Mines-Telecom 510
Centrale-Supelec 515
ENSEA 523
CCINP 526

III. Probabilités 533

14. Univers fini
Mines-Ponts 535
Mines-Telecom 538
Centrale-Supelec 546
ENSEA 556
CCINP 559

15. Univers infini
Mines-Ponts 577
Mines-Telecom 584
Centrale-Supelec 590
ENSEA 605
CCINP 617

16. Probabilité et algèbre linéaire
Mines-Ponts 625
Centrale-Supelec 627
ENSEA 629
CCINP 630

Première partie

Algèbre

Chapitre n° 1

Algèbre générale

Mines-Ponts

PLANCHE 01

Enoncé

Trouver le polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré minimal dont le reste dans la division euclidienne par $X^2 + X + 1$ vaut $X - 1$ et dont le reste dans la division euclidienne par $(X-1)^2$ vaut $2 - X$.

Correction de la planche 01

Décryptage et indications

Il s'agit ici d'un exercice sur la division euclidienne des polynômes. Cet exercice peut dérouter car il fait appel au programme de première année. On attend du candidat qu'il ait une logique dans sa démarche et qu'il ne se perde pas dans les calculs. On doit d'abord s'intéresser au degré de P. Il est clair que P doit être de degré au moins égal à 2. Par ailleurs, il serait maladroit de poser deux divisions euclidiennes sans connaître ni les coefficients, ni le degré de P. L'idée est de remarquer que si un tel polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ existe, il existe aussi deux polynômes $(Q, Z) \in \mathbb{R}[X]^2$ tel que

$$P = (X^2 + X + 1)Q + X - 1 = (X-1)^2 Z + 2 - X.$$

Il ne faut surtout pas tenter de déterminer Q et Z. Un dernier coup de pouce en cas de manque d'inspiration : On pourra remplacer X par les racines de $X^2 + X + 1$ et de $(X-1)^2$. Cela permet de se débarrasser des polynômes Q et Z.

Commentaires

Le rapport du jury de Mines-Ponts note des difficultés dans la résolution de problèmes portant sur l'algèbre générale (nombres complexes, polynômes, fractions rationnelles). Donc cette partie du programme est vraiment à bachoter.

On remarque donc que si un tel polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ existe, il existe aussi deux polynômes $(Q, Z) \in \mathbb{R}[X]^2$ tel que $P = (X^2 + X + 1)Q + X - 1 = (X - 1)^2 Z + 2 - X$.

Donc, en partant de la seconde égalité, $P' = 2(X - 1)Z + (X - 1)^2 Z' - 1$.

Comme les racines de $X^2 + X + 1$ sont j et $j^2 = \bar{j}$, on en déduit que :

$$P(j) = j - 1,\ P(1) = 1,\ P'(1) = -1.$$

La relation $P(\bar{j}) = \bar{j} - 1$ n'apporte rien de plus car P est un polynôme réel. Il reste à chercher P en l'écrivant sous forme de puissances décroissantes.

- Commençons par un polynôme de degré 2. Posons, avec $(b, c, d) \in \mathbb{R}^3$: $P = bX^2 + cX + d$.

On a le système : $\left\{ \begin{array}{rcl} bj^2 + cj + d & = & j - 1 \\ b + c + d & = & 1 \\ 2b + c & = & -1 \end{array} \right.$.

En remplaçant j^2 par $-j - 1$ dans la première égalité, elle devient :

$$-b + d + 1 + j(-b + c - 1) = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -b + d + 1 & = & 0 \\ -b + c - 1 & = & 0 \end{array} \right. ,$$

sachant que b, c et d sont réels et $\{1, j\}$ est libre dans le $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{C}$. On a :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -b + d + 1 & = & 0 \\ -b + c - 1 & = & 0 \\ b + c + d & = & 1 \\ 2b + c & = & -1 \end{array} \right. .$$

Ce système est impossible. En effet, si on note L_i la $i^{\text{ème}}$ ligne du système, alors $L_1 + L_2 + L_4$ donne $d + 2c = -1$ et $2L_3 - L_4$ donne $c + 2d = 3$. On en déduit que $c = -5/3$ et $d = 7/3$.
En remplaçant dans L_3, on obtient $b = 1/3$. Et on vérifie que L_1 ne fonctionne pas.
De toute façon, l'énoncé dit que l'on cherche le polynôme de degré minimal. Il est donc censé être unique et le système ci-dessus ne peut pas avoir une solution unique.
Il faut pousser le degré de P.

- Continuons avec un polynôme de degré 3. Posons (avec a, b, c et d réels) :

$$P = aX^3 + bX^2 + cX + d.$$

On a le système : $\left\{ \begin{array}{rcl} aj^3 + bj^2 + cj + d & = & j - 1 \\ a + b + c + d & = & 1 \\ 3a + 2b + c & = & -1 \end{array} \right.$. Or $j^3 = 1$ et $j^2 = -j - 1$.

On peut transformer la première égalité, sachant que a, b, c et d sont réels :

$$a - b + d + 1 + j(-b + c - 1) = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a - b + d + 1 & = & 0 \\ -b + c - 1 & = & 0 \end{array} \right. .$$

On a alors le système : $\left\{\begin{array}{rcl} a-b+d+1 & = & 0 \\ -b+c-1 & = & 0 \\ a+b+c+d & = & 1 \\ 3a+2b+c & = & -1 \end{array}\right.$.

Après calculs (laissés au lecteur), on trouve : $a=-1$, $b=\dfrac{1}{3}$, $c=\dfrac{4}{3}$, $d=\dfrac{1}{3}$.

On obtient donc un seul polynôme de degré 3 répondant à la question.

Comme $a \neq 0$, 3 est bien le degré minimal. On peut conclure.

$$P=-X^3+\frac{1}{3}X^2+\frac{4}{3}X+\frac{1}{3}.$$

Commentaires

Comme les relations $P(j)=j-1$, $P(1)=1$, $P'(1)=-1$ donnent en fait quatre égalités car P est réel et $P(j)=j-1$ donne deux égalités en passant aus réels, il est logique de penser que P est de degré 3 car un tel polynôme a quatre coefficients. Si P est de degré supérieur, il y a plus d'inconnues que d'équations.
Il ne peut pas y avoir alors un polynôme unique et la question posée est alors incohérente car on cherche bien un seul polynôme.

PLANCHE 02

Enoncé

Calculer pour tout $n \geqslant 2$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} (-3)^k$.

Correction de la planche 02

Décryptage et indications

Cet exercice est typiquement l'exercice posé dans le dernier quart-d'heure de l'oral. Il est à la frontière de l'analyse générale et de l'algèbre générale. On l'a mis dans l'algèbre car on va passer dans $\mathbb{C}$. Ici on a le calcul d'une somme. Il faut réflechir un peu et si vous vous êtes déjà entraîné à calculer certaines sommes (par exemple $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ ou $\displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k}$), vous aurez une idée pour démarrer. Plus précisément, la difficulté est de retrouver le développement du binôme de Newton. Il faut transformer $(-3)^k$ en puissance de $2k$ ou de $n-2k$. Pensez à un complexe dont le carré est -3.

Posons pour tout $n \geqslant 2$, la somme à calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} (-3)^k$.

Posons aussi z un complexe tel que $z^2 = -3$.
On voit rapidement que z prend deux valeurs qui sont $-i\sqrt{3}$ et $i\sqrt{3}$. On écrit alors :

$$S_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} \left(z^2\right)^k = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} z^{2k}.$$

Avec la formule du binôme de Newton, pour tout $n \geqslant 2$, on peut écrire :

$$\begin{cases} (1+z)^n &= \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} z^p 1^{n-p} &= \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} z^p \\ (1-z)^n &= \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} (-z)^p 1^{n-p} &= \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} (-1)^p z^p \end{cases}.$$

On somme ces deux dernières égalités, en notant $A_n = \{p \in [\![0, n]\!] \text{ et } p \text{ pair }\}$.

$$(1+z)^n + (1-z)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \left[1^p + (-1)^p\right] z^p = 2 \sum_{p \in A_n} \binom{n}{p} z^p = 2S_n.$$

On en déduit que pour tout $n \geqslant 2$,

$$S_n = \frac{(1+z)^n + (1-z)^n}{2} = \frac{1}{2}\left[(1+z)^n + (1-z)^n\right].$$

On remplace maintenant z par $i\sqrt{3}$, ce qui donne :

$$S_n = \frac{1}{2}\left[\left(1+i\sqrt{3}\right)^n + \left(1-i\sqrt{3}\right)^n\right].$$

Or : $1 + i\sqrt{3} = 2\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $1 - i\sqrt{3} = 2\left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
On en déduit que S_n vaut :

$$\frac{1}{2}\left[2^n \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n + 2^n \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n\right] = \frac{2^n}{2}\left[\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^n + \left(e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^n\right].$$

Et on peut écrire : $2\cos\left(\dfrac{\pi}{3}n\right) = e^{in\frac{\pi}{3}} + e^{-in\frac{\pi}{3}}$.

On en déduit : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} (-3)^k = 2^{n-1} \times 2\cos\left(\frac{\pi}{3}n\right) = 2^n \cos\left(\frac{\pi}{3}n\right)$.

Commentaires

Ce type d'exercice que l'on vient de faire est assez parlant dans un oral. Il est clair que le candidat attend d'être aidé pour démarrer. Toute la question est : le candidat va t-il utiliser comme il faut ce coup de pouce ? C'est ce qui fera la différence entre une bonne note (même si la candidat n'a pas démarré seul) et une bien plus mauvaise.

Mines-Telecom

PLANCHE 03

Enoncé

On suppose $n \in \mathbb{N}^\star$. Soit $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \sum_{k=0}^{n-1} z^k$.

Q1. Trouver les racines de P.

Q2. Montrer que $\prod_{k=1}^{n-1} \left|1 - e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right| = n$.

Q3. Montrer que $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}$.

Correction de la planche 03

Décryptage et indications

Cette planche rappelle la planche 05 posée à Centrale. Elles se ressemblent mais cette planche posée à Mines-Telecom et aussi à l'ENSEA est plus « light ».
Pour **Q1**, on pourra utiliser la formule qui donne la somme partielle de termes d'une suite géométrique.
Pour **Q2**, on écrit P sous sa forme factorisée et on écrit $P(1)$ de deux manières.
Pour **Q3**, on transforme $1 - e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ en utilisant une certaine formule (que vous connaissez tous) de ce cher Leonhard Euler.

Q1. Si $z \neq 1$, $P(z) = \dfrac{1 - z^n}{1 - z}$.

Commentaires

Il faut penser à écarter $z = 1$ de l'ensemble des solutions éventuelles.
En effet, ici $P(1) = n \neq 0$.

On a les équivalences : $P(z)=0 \Leftrightarrow z^n=1 \Leftrightarrow z \in \left\{ z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}},\ k \in [\![1, n-1]\!] \right\}$.

On a ainsi $n-1$ solutions distinctes.

Q2. Comme P est unitaire, on peut écrire : $P(z)=\prod_{k=1}^{n-1}\left(z-e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)$. Remplaçons z par 1 et prenons le module de chaque côté.

$$P(1)=n=\prod_{k=1}^{n-1}\left(1-e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right) \Rightarrow n=\prod_{k=1}^{n-1}\left|1-e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right|.$$

Q3. On transforme $1-e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ a l'aide de la technique de l'arc moitié.

$$1-e^{i\frac{2k\pi}{n}}=e^{i\frac{k\pi}{n}}\left(e^{-i\frac{k\pi}{n}}-1-e^{i\frac{k\pi}{n}}\right)=-2i\times e^{i\frac{k\pi}{n}}\times\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

On passe encore aux modules.

$$n=\prod_{k=1}^{n-1}\left|1-e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right|=\prod_{k=1}^{n-1}\left|2ie^{i\frac{k\pi}{n}}.\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right|=2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\left|\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right|.$$

Comme $\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\geqslant 0$ pour tout $k\in[\![1,n-1]\!]$, on a bien : $\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)=\frac{n}{2^{n-1}}$.

PLANCHE 04

Enoncé

Soit $P\in\mathbb{C}_4[X]$ de la forme

$$P=X^4-\alpha X^3+\beta X^2-16.$$

Déterminer $(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2$ tels que P admette une racine triple.

Correction de la planche 04

Décryptage et indications

Cet exercice peut se faire dès la première année après avoir vu les polynômes et les nombres complexes. On écrira $P=(X-a)^3(X-b)$, où a est la racine triple (inconnue) et b la racine forcément simple (inconnue). On développe et on identifie à P avec la forme de l'énoncé. On en déduit les valeurs possibles de α, β et en prime les deux racines. L'ensemble est un peu calculatoire il faut l'avouer mais maîtriser des calculs c'est aussi cela qu'on juge au concours.

On commence donc par développer $P = (X-a)^3(X-b)$, où a est la racine triple (inconnue) et b la racine forcèment simple (inconnue).

On obtient d'abord : $P = (X^3 - 3aX^2 + 3a^2X - a^3)(X-b)$. Puis un dernier développement donne :

$$P = X^4 - (3a+b)X^3 + (3a^2+3ab)X^2 - (a^3+3a^2b)X + a^3b.$$

On sait que deux polynômes sont égaux si et seulement si leurs coefficients pour chaque degré sont égaux. On a alors le système :

$$\left\{\begin{array}{ccc} 3a+b & = & \alpha \\ 3a(a+b) & = & \beta \\ a^2(a+3b) & = & 0 \\ a^3b & = & -16 \end{array}\right. .$$

L'équation la plus intéressante pour démarrer est $a^2(a+3b) = 0$. Si $a^2 = 0$ alors $0 = -16$, d'après la dernière ligne du système, c'est impossible , donc $a = -3b$.

Il reste le système : $\left\{\begin{array}{ccc} -8b & = & \alpha \\ -9b(-2b) & = & \beta \\ a & = & -3b \\ -27b^4 & = & -16 \end{array}\right.$. La dernière équation donne : $b^4 = \dfrac{16}{27}$.

Comme $b \in \mathbb{C}$, il y a quatre solutions : $b = \left(\dfrac{16}{27}\right)^{\frac{1}{4}} e^{ik\frac{\pi}{2}} = \dfrac{2}{3^{\frac{3}{4}}} e^{ik\frac{\pi}{2}}$ avec $k \in [\![0,3]\!]$.

Passons aux valeurs de a. On a ; $a = -3b = -2 \times 3^{\frac{1}{4}} e^{ik\frac{\pi}{2}}$ avec $k \in [\![0,3]\!]$.

Puis passons aux valeurs de α : $\alpha = -8b = -\dfrac{2^4}{3^{\frac{3}{4}}} e^{ik\frac{\pi}{2}}$ avec $k \in [\![0,3]\!]$.

Et enfin, les valeurs de β. On a : $\beta = 18b^2 = 2^2 \times 3^{\frac{5}{4}} e^{ik\frac{\pi}{2}}$ avec $k \in [\![0,3]\!]$.

Commentaires

On aurait aussi pu partir de $P(a) = P'(a) = P''(a) = 0$ et $P^{(3)}(a) \neq 0$ avec a inconnue. C'est trop compliqué car on a trois équations de degré respectivement $4, 3$ et 2.

Centrale-Supelec

PLANCHE 05

Enoncé

Q1. a étant un réel fixé, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(z+1)^n = e^{2ina}$ et en déduire une factorisation de $P(X) = (X+1)^n - e^{2ina}$.

Q2. En déduire, à l'aide de $P(0)$, la valeur de $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right)$.

Correction de la planche 05

Décryptage et indications

Cet exercice est encore typiquement un exercice sur le programme de première année et il peut faire mal au candidat qui n'aura réviser que les standards de deuxième année (séries , diagonalisation etc.) Citons un extrait su rapport de jury de Centrale-Supelec : « Rappelons une évidence : il faut réviser l'ensemble du programme et pas seulement celui de deuxième année, le mieux étant naturellement un travail régulier tout au long du cycle préparatoire. »
Et quoi de mieux que par exemple commencer les planches d'Oraux de ce livre non pas en Mai ou Juin de la deuxième année mais dès la première année et notamment pour ceux d'algèbre générale ou d'analyse générale.
Il s'agit ici plus précisement d'un exercice d'Algèbre sur les polynômes et sur l'ensemble des nombres complexes. Notamment, on aura besoin de quelques outils bien connus des complexes, les formules d'Euler par exemple ou alors le calcul de puissances de i.

Pour **Q1**, vous avez sûrement remarqué que les solutions de l'équation (E) sont les n racines complexes de P.
Pour **Q2**, on demande un calcul d'un produit. Il est clair que $P(0)$ s'écrit de deux manières, la première en remplaçant dans l'expression de P dans l'énoncé et la deuxième en utilisant la factorisation de P, déterminée à la question précédente.
L'expression $A = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right)$ apparaîtra dans l'expression de $P(0)$ issue de l'expression de P sous forme de facteurs irréductibles. Il faudra ensuite savoir simplifier certains produits ou puissances.

Q1. Commençons par la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E) : $(z+1)^n = e^{2ina}$.

Commentaires

Souvenons nous que pour résoudre une équation du type $Z^n = \alpha^n$ dans $\mathbb{C}$, on détermine les racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité après avoir écrit l'équation sous la forme $(Z/\alpha)^n = 1$ (avec $\alpha \neq 0$).

Ici $a \in \mathbb{R}$ et n est un entier naturel. Comme e^{2ina} est de module 1, ce complexe ne s'annule jamais et :

$$(z+1)^n = e^{2ina} \Leftrightarrow \left(\frac{z+1}{e^{2ia}}\right)^n = 1.$$

On pose $Z = \dfrac{z+1}{e^{2ia}}$ et on continue par la résolution de $Z^n = 1$.
On sait qu'une telle équation a pour solutions les complexes : $Z_k = e^{2i\pi k/n}$, où k est un entier variant de 0 à $n-1$. Fixons un entier k et posons :

$$Z_k = e^{2i\pi k/n} = \frac{z+1}{e^{2ia}}.$$

On en déduit

$$z+1 = \exp\left[2i\left(a+\frac{k\pi}{n}\right)\right] \Rightarrow z = \exp\left[2i\left(a+\frac{k\pi}{n}\right)\right] - 1.$$

Or $1 = e^{2i0}$ et en utilisant la formule d'Euler : $2i\sin\theta = e^{i\theta} - e^{-i\theta}$, on en déduit :

$$z = \exp\left[i\left(a+\frac{k\pi}{n}\right)\right]\left[\exp\left[i\left(a+\frac{k\pi}{n}\right)\right] - \exp\left[-i\left(a+\frac{k\pi}{n}\right)\right]\right].$$

C'est-à-dire : $z = 2i\sin\left(a+\dfrac{k\pi}{n}\right)\exp\left[i\left(a+\dfrac{k\pi}{n}\right)\right]$.
Finalement, l'ensemble des solutions est :

$$S = \left\{2i\sin\left(a+\frac{k\pi}{n}\right)\exp\left[i\left(a+\frac{k\pi}{n}\right)\right],\ k = 0...n-1\right\}.$$

Passons à la factorisation de $P(X) = (X+1)^n - e^{2ina}$.
On sait que P est un polynôme de degré n et admet donc dans $\mathbb{C}$, n racines.
Ces racines sont les n solutions de l'équation (E).
Comme le polynôme P est normalisé, on peut écrire pour n supérieur ou égal à 1 :

$$P(X) = \prod_{k=0}^{n-1}\left(X - 2i\sin\left(a+\frac{k\pi}{n}\right)\exp\left[i\left(a+\frac{k\pi}{n}\right)\right]\right).$$

Q2. Nous allons en déduire, à l'aide de $P(0)$, la valeur de : $A = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}\sin\left(a+\frac{k\pi}{n}\right)$.

On écrit, en utilisant **Q1** :

$$P(0) = 1 - e^{2ina} = \prod_{k=0}^{n-1}\left(-2i\sin\left(a+\frac{k\pi}{n}\right)\exp\left[i\left(a+\frac{k\pi}{n}\right)\right]\right).$$

Cela donne, dans un premier temps :

$$1-e^{2ina}=(-2i)^nA\times\prod_{k=0}^{n-1}\exp\left[i\left(a+\frac{k\pi}{n}\right)\right].$$

On écrit ensuite :

$$\prod_{k=0}^{n-1}\exp\left[i\left(a+\frac{k\pi}{n}\right)\right]=e^{ina}\prod_{k=0}^{n-1}\exp\left[i\frac{k\pi}{n}\right]=e^{ina}\exp\left(i\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k\pi}{n}\right).$$

Commentaires

On utilise maintenant un résultat connu : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}k=\frac{n(n-1)}{2}$.

Cela donne : $\exp\left(i\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k\pi}{n}\right)=\exp\left(i\frac{(n-1)\pi}{2}\right)=i^{n-1}$.

Finalement, comme $i^{2n}=(-1)^n$,

$$A=\frac{1-e^{2ina}}{(-2i)^ne^{ina}i^{n-1}}=\frac{1-e^{2ina}}{-i(-2)^ne^{ina}(-1)^n}$$

Il reste : $A=\dfrac{1-e^{2ina}}{e^{ina}(-i2^n)}=\dfrac{e^{ina}(e^{-ina}-e^{ina})}{e^{ina}(-i2^n)}$.

En utilisant une des formules d'Euler, on obtient : $A=\dfrac{-2i\sin(na)}{-i2^n}$ qui s'arrange encore un peu. On peut conclure.

$$A=\prod_{k=0}^{n-1}\sin\left(a+\frac{k\pi}{n}\right)=\frac{\sin(na)}{2^{n-1}}.$$

PLANCHE 06

Enoncé

Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ non constant tel que $P(X^2)=P(X)P(X-1)$.

Q1. Soit ω une racine de P. Montrer que ω^2 racine de P.

Q2. Montrer que les racines de P sont soit nulles soit de module 1.

Q3. Montrer que 0 n'est pas racine de P.

Q4. Déterminer les polynômes solutions.

Correction de la planche 06

Décryptage et indications

Cet exercice peut paraître décevant pour un candidat qui aura préparé à fond les théorèmes d'Analyse ou d'Algèbre de deuxième année mais tout futur candidat doit s'y préparer. Le programme du concours est sur les deux années. Il ne faut pas l'oublier. En tout cas, voici un sujet ici qui peut traiter tout élève de Sup au bout de quelques semaines de prépa.

Q1 est une mise en bouche, comme on dit mais qui donne une piste pour la suite.

Le résultat de **Q2** vous semblera peut-être intuitif mais un développement rigoureux est nécessaire pour que le compteur de points fonctionne à plein. On commencera par montrer que si ω est racine de P alors ω^{2^n} est aussi racine de P pour tout $n \in \mathbb{N}$. Et on passera ensuite à la suite des modules des racines.

Pour **Q3**, on remarquera que si x_n est racine de P alors $x_{n+1} = (x_n+1)^2$ est aussi racine de P. On étudiera alors la suite (x_n).

Pour **Q4**, c'est le grand saut. Il faut aboutir à l'ensemble des solutions.
On commencera par remarquer que si ω est racine de P, alors $|\omega| = |\omega + 1| = 1$.
De plus, on rappelle que si $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ alors $1 + j + j^2 = 0$ et $j^3 = 1$.

Q1. Si est une racine de P alors $P(\omega) = 0$ et : $P(\omega^2) = P(\omega)P(\omega - 1) = 0$.

Donc ω^2 est une racine de P.

Q2. Si ω est racine, montrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, ω^{2^n} racine de P.

La proposition est vraie pour $n = 0$ et pour $n = 1$. Supposons qu'elle soit aussi vraie pour un entier $n \geqslant 1$. Alors :

$$P\left(\omega^{2^{n+1}}\right) = P\left(\left(\omega^{2^n}\right)^2\right) = P\left(\omega^{2^n}\right) P\left(\omega^{2^n} - 1\right) = 0 \times P\left(\omega^{2^n} - 1\right) = 0.$$

Commentaires

Le fait d'écarter les polynômes constants permet d'écarter la solution triviale $P = 0$ et donc tout polynôme P a au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

On a, en passant aux modules : $\left|\omega^{2^n}\right| = |\omega|^{2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Si $\omega \neq 0$ ou $|\omega| \neq 1$, la suite $n \mapsto |\omega|^{2^n}$ est strictement croissante ou strictement décroissante donc l'ensemble $\{\omega^{2^n},\, n \in \mathbb{N}\}$ est infini et est inclus dans l'ensemble des racines de P.

Donc P a une infinité de racines et $P = 0$. C'est impossible. Ainsi, $\omega = 0$ ou $|\omega| = 1$.

Q3. Supposons 0 racine de P.

Si l'on applique la relation de départ à $X = 1$, $P(1^2) = P(1)P(0) = 0$.

Ainsi 1 est aussi racine de P. Puis on applique la relation de départ à $X = 2$,

$$P(2^2) = P(2)P(1) = 0.$$

Ainsi 2^2 est aussi racine de P.

De façon générale, si x_n est racine de P, en appliquant la relation de départ à $X = x_n + 1$,

$$P((x_n+1)^2) = P(x_n+1)P(x_n) = 0.$$

Ainsi $(x_n+1)^2$ est aussi racine de P.
On crée alors une suite définie par $x_{n+1} = (x_n+1)^2$ de premier terme $x_1 = 1$ de réels racines de P. Cette suite $(x_n)_n$ est clairement strictement positive. De plus :

$$x_{n+1} - x_n = (x_n+1)^2 - x_n = x_n^2 + x_n + 1 > 0.$$

Ainsi la suite (x_n) est strictement croissante.
L'ensemble $\{x_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ est infini et est inclus dans l'ensemble des racines de P.

Donc P a une infinité de racines et $P = 0$. C'est impossible.

Q4. Si ω est racine de P, en s'inspirant de **Q3**, $P((\omega+1)^2) = P(\omega+1)P(\omega) = 0$.

Donc $(\omega+1)^2$ est racine de P donc $|\omega+1|^2 = 1$ ou encore $|\omega+1| = 1$.

Déterminons alors tous les $\omega \in \mathbb{C}$ tels que $|\omega| = |\omega+1| = 1$. On a, en élevant au carré :

$$\omega\overline{\omega} = (\omega+1)(\overline{\omega}+1) = \omega + \overline{\omega} + \omega\overline{\omega} + 1 = 1 \Rightarrow \omega + \overline{\omega} = -1.$$

Alors $\mathrm{Re}(\omega) = -\dfrac{1}{2}$. Et comme $|\omega| = 1$, $\mathrm{Im}(\omega) = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\omega \in \left\{ -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right\}.$$

En notant $j = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\omega = j$ ou $\omega = \overline{j} = j^2$. Revenons à P.

$$\exists\, a \in \mathbb{R},\ P(X) = a(X-j)^\alpha (X-j^2)^\beta, \text{ où } (\alpha,\beta) \in \mathbb{N}^2.$$

Reprenons la relation de l'énoncé. Elle devient :

$$(1):\ a(X^2-j)^\alpha (X^2-j^2)^\beta = a^2 (X-j)^\alpha (X-j^2)^\beta (X-j-1)^\alpha (X-j^2-1)^\beta.$$

On a les égalités (à connaître absolument !) $j = j^4$ et $j+1 = -j^2$, $j^2+1 = -j$.
Et donc en particulier : $X^2 - j = X^2 - j^4 = (X-j^2)(X+j^2)$.
Alors (1) devient :

$$(2):\ a(X-j^2)^\alpha (X+j^2)^\alpha (X-j)^\beta (X+j)^\beta = a^2 (X-j)^\alpha (X-j^2)^\beta (X+j^2)^\alpha (X+j)^\beta.$$

Par identification, on a : $a^2 = a$ et donc comme $a = 0$ est exclu, il reste $a = 1$. On simplifie de chaque côté l'égalité (2).

$$(X-j^2)^\alpha (X-j)^\beta = (X-j)^\alpha (X-j^2)^\beta.$$

Alors $\alpha = \beta$. Ainsi $P = (X-j)^\alpha (X-j^2)^\alpha = (X^2+X+1)^\alpha$.

On montre rapidement que réciproquement, tout polynôme $P = (X^2+X+1)^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{N}$ vérifie bien la relation de l'énoncé.

Bilan : l'ensemble des solutions est constitué du polynôme nul, du polynôme constant égal à 1 (exclus de l'énoncé) et tous les polynômes $(X^2+X+1)^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{N}$.

Commentaires

Cette planche est représentative d'une série d'exercices du même genre. On donne une relation polynomiale et on demande de trouver les polynômes vérifiant cette relation. L'idée est souvent de chercher des conditions sur les racines de polynômes vérifiant la relation. Mais on peut s'intéresser aussi au degré ou au coefficient dominant. Dans cette planche 06, on est guidé. Si l'on a moins d'information, il faut tenter des pistes. C'est l'examinateur qui vous aiguillera sur autre chose ou vous confortera dans votre direction.

ENSEA

PLANCHE 07

Enoncé

Soit $f : z \in \mathbb{C} \setminus \{2i\} \mapsto \dfrac{z+1}{z-2i}$.

Q1. Trouver tous les z tels que $f(z) \in \mathbb{R}$.

Q2. Trouver tous les z tels que $f(z) \in i\mathbb{R}$.

Correction de la planche 07

Décryptage et indications

Cet exercice posé récemment aborde une partie du programme que l'on fait souvent dès les premières semaines en première année. Faut-il rappeler que le programme des concours est étendu sur les deux années de préparation. C'est ce qui est signalé régulièrement dans les rapports de jurys (et pas simplement pour l'ENSEA).
Pour aborder les questions, on peut commencer par se rappeler qu'un complexe est réel si et seulement s'il est égal à son conjugué et il est imaginaire pur si et seulement s'il est opposé à son conjugué.

Q1. On exclut $z = 2i$ puis on fait les équivalences (en posant $z = x + iy$) :

$$f(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(z) = \overline{f(z)} \Leftrightarrow \frac{z+1}{z-2i} = \frac{\bar{z}+1}{\bar{z}+2i}$$

$$\Leftrightarrow z\bar{z} + 2iz + \bar{z} + 2i = z\bar{z} + z - 2i\bar{z} - 2i \Leftrightarrow 4i\mathrm{Re}\,(z) - 2i\mathrm{Im}(z) + 4i = 0 \Leftrightarrow y = 2x + 2.$$

L'ensemble des solutions sont donc les complexes $z = x + 2(x+1)i$, où $x \in \mathbb{R}^\star$.

Commentaires

Il ne faut pas oublier d'enlever le cas $z = 2i$ de la solution.

Q2. On procède de manière analogue en reposant $z = x + iy$.

$$f(z) \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow f(z) = -\overline{f(z)} \Leftrightarrow \frac{z+1}{z-2i} = \frac{-\bar{z}-1}{\bar{z}+2i}$$

$\Leftrightarrow z\bar{z}+2iz+\bar{z}+2i=-z\bar{z}-z+2i\bar{z}+2i \Leftrightarrow 2z\bar{z}+2\mathrm{Re}\,(z)-4\mathrm{Im}(z)=0 \Leftrightarrow x^2+y^2+x-2y=0.$

On arrange la dernière équation en utilisant les formes dites canoniques.

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2=\frac{1}{4}+1=\frac{5}{4}.$$

C'est le cercle de centre $\left(-\frac{1}{2},\,1\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$ privé du point $(0,2)$.

Commentaires

Cet exercice peut vous paraître un peu court pour une planche d'oral. Mais il ne faut pas oublier qu'à l'ENSEA, le candidat a droit à deux exercices sur deux parties différentes du programme à préparer en 20 minutes puis autant devant l'examinateur.
La planche proposée ici n'est qu'un des deux exercices de l'oral.

PLANCHE 08

Enoncé

Montrer que $\left|\sum_{k=1}^{n} z^k\right| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right|}$, où $z=e^{i\alpha}$ avec $\alpha \neq 2k\pi$.

Correction de la planche 08

Décryptage et indications

Cet exercice est court mais encore une fois il est proposé avec un autre exercice sur une autre partie du programme. On commencera par utiliser la formule qui donne la somme partielle des termes d'une suite géométrique. Et on pourra utiliser une des deux formules d'Euler.

On a : $\sum_{k=1}^{n} z^k = z\frac{1-z^{n+1}}{1-z}$ car $z \neq 1$. Ainsi :

$$\sum_{k=1}^{n} z^k = e^{i\alpha}\frac{1-e^{i(n+1)\alpha}}{1-e^{i\alpha}} = e^{i\alpha}\frac{e^{i\frac{n+1}{2}\alpha}\left(e^{-i\frac{n+1}{2}\alpha}-e^{i\frac{n+1}{2}\alpha}\right)}{e^{i\frac{\alpha}{2}}\left(e^{-i\frac{\alpha}{2}}-e^{i\frac{\alpha}{2}}\right)}.$$

Il reste à passer aux modules. Et en particulier $\left|e^{i\frac{n+1}{2}\alpha}\right| = \left|e^{i\alpha}\right| = \left|e^{i\frac{\alpha}{2}}\right| = 1$.

Et on utilise la formule $e^{i\theta}-e^{-i\theta}=2i\sin\theta$.

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z^k\right| = \left|\frac{-2i\sin\left(\frac{n+1}{2}\alpha\right)}{-2i\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right| = \left|\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right|}.$$

PLANCHE 09

Enoncé

Montrer que pour tout entier n, $X^2 - X + 1$ divise $(X-1)^{n+2} + X^{2n+1}$.

Correction de la planche 09

Décryptage et indications

Cette planche qui représente un des deux exercices posés à l'ENSEA est assez classique. Attention, la fatal error » serait de se lancer dans la division euclidienne comme on voit le faire certains candidats. Il faut trouver les racines (complexes) de $P = X^3 - X + 1$ (en les mettant sous leur forme trigonmétrique, ce qui sera plus pratique) et vérifier ensuite que ce sont des racines de $Q_n = (X-1)^{n+2} + X^{2n+1}$.

Posons $P = X^2 - X + 1$ et $Q_n = (X-1)^{n+2} + X^{2n+1}$.
Déterminons les racines (complexes) de P. Le discriminant de $X^2 - X + 1 = 0$ est $\Delta = -3 = 3i^2$. Les racines de P sont donc :

$$\frac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{3}) = e^{\pm i\frac{\pi}{3}}.$$

Posons $x_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $x_2 = \bar{x_1} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$. Comme $Q_n \in \mathbb{R}[X]$, montrer que P divise Q_n revient à montrer $Q_n(x_1) = 0$.

Commentaires

En effet, pour tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$, si z est racine de ce polynôme alors $\bar{z}$ aussi.

Utilisons $x_1^2 = x_1 - 1$ dans l'expression qui donne $Q_n(x_1)$.

$$Q_n(x_1) = (x_1^2)^{n+2} + x_1^{2n+1} = x_1^{2n+4} + x_1^{2n+1}.$$

Or $x_1^3 = e^{i\pi} = -1$.

$$Q_n(x_1) = x_1^{2n+1}x_1^3 + x_1^{2n+1} = -x_1^{2n+1} + x_1^{2n+1} = 0.$$

On peut donc conclure, x_1 ainsi que son conjugué sont des racines de Q_n et donc P divise Q_n.

Chapitre n° 2

Algèbre linéaire sans réduction

Mines-Ponts

PLANCHE 10

Enoncé

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$ et f un endomorphisme de E tel que :

$$f^{n-1} \neq 0 \text{ et } f^n = 0.$$

Déterminer le rang de f, noté $\operatorname{Rg} f$.

Correction de la planche 10

Décryptage et indications

Cet exercice est posé dans les quinze dernières minutes de l'oral. Les endomorphismes nilpotents sont une thématique récurrente dans les oraux. Allez ainsi voir la planche 18 et la planche 35 de cet ouvrage par exemple.

L'idée ici est de considérer une famille de vecteurs du type : $\left(\vec{v}, f(\vec{v}), ..., f^{n-1}(\vec{v})\right)$, où on prend $\vec{v} \in E \setminus \operatorname{Ker} f^{n-1}$. Il faut vérifier que cette famille est une base de E avant d'écrire la matrice de f dans cette base. L'idée d'utiliser ce type de base de E est l'élément clé pour résoudre cet exercice. L'examinateur vous donnera l'indication car sinon vous ne démarrerez pas. Ceci dit si vous y pensez tout seul, la bonne note est à portée de tir. D'où l'intérêt de ce livre d'annales : arriver à vous rendre le plus autonome possible le jour de l'oral.

Comme $f^{n-1} \neq 0$, il existe $\overrightarrow{v} \in E \backslash \text{Ker } f^{n-1}$. Considérons la famille : $B = \left(\overrightarrow{v}, f(\overrightarrow{v}), ..., f^{n-1}(\overrightarrow{v})\right)$.
Comme B possède n éléments, il suffit de démontrer que B est libre pour avoir une base, l'espace vectoriel E étant de dimension n.
On suppose $(a_0, ..., a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$(E_1)\ \ a_0\overrightarrow{v} + a_1 f(\overrightarrow{v}) + ... + a_{n-1} f^{n-1}(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{0}.$$

On applique f^{n-1} à (E_1), on obtient alors : $a_0 f^{n-1}(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{0}$ car $f^k(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{0}$ pour tout entier k supérieur ou égal à n. Comme $f^{n-1}(\overrightarrow{v}) \neq \overrightarrow{0}$, on en déduit que $a_0 = 0$. L'égalité (E_1) devient :

$$(E_2)\ \ a_1 f(\overrightarrow{v}) + ... + a_{n-1} f^{n-1}(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{0}.$$

On combine (E_2) par f^{n-2}, on obtient alors : $a_1 f^{n-1}(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{0}$.
Et encore une fois, on utilise le fait que $f^{n-1}(\overrightarrow{v}) \neq \overrightarrow{0}$. On en déduit que $a_1 = 0$.
De façon générale, k étant un entier compris entre 1 et $n-1$, supposons que l'on ait l'égalité :

$$(E_{k+1})\ \ a_k f^k(\overrightarrow{v}) + ... + a_{n-1} f^{n-1}(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{0}.$$

On applique f^{n-1-k} à (E_{k+1}), on obtient alors : $a_k f^{n-1}(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{0}$.
Et je pense que vous allez deviner que l'on utilise le fait que $f^{n-1}(\overrightarrow{v}) \neq \overrightarrow{0}$.
On en déduit que $a_k = 0$. On applique pour $k = n-1$ enfin et on a bien :

$$a_0 = a_1 = ... = a_{n-1} = 0.$$

La famille B est libre et elle est donc une base de E.

Il reste à exprimer la matrice de f par rapport à la base B. La colonne C_1 de cette matrice est le vecteur colonne des coordonnées de $f(\overrightarrow{v})$ dans la base B. De façon générale, la colonne C_k est le vecteur colonne des coordonnées de $f(f^{k-1}(\overrightarrow{v}))$ dans B et enfin la colonne C_n est le vecteur colonne des coordonnées de $f(f^{n-1}(\overrightarrow{v}))$ dans B. On remarque donc que C_n est la colonne nulle et que les autres colonnes sont des colonnes n'ayant que des 0 sauf un 1 dans une certaine ligne. On obtient la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ 1 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 1 & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & . & . & . & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il s'agit de trouver rapidement son rang (qui est celui de f).

Commentaires

Soit f une application linéaire de l'espace vectoriel E vers l'espace vectoriel F. On appelle rang de f (noté Rg f) la dimension de l'image de f, sous-espace vectoriel de F.

On peut voir sans difficulté que cette matrice A est de rang $n-1$. Pour le justifier, on peut dire par exemple que Im f a pour famille génératrice $B \setminus \{\overrightarrow{v}\}$. Cette famille génératrice est libre car B est libre. Elle est donc une base de Im f.
Son cardinal est $n-1$. Le rang de f est $n-1$.

PLANCHE 11

Enoncé

Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$. On assimile vecteur et matrice colonne.

Q1. Montrer que si $\mathrm{Rg}\,(M) = 1$, alors il existe des vecteurs X et Y tels que : $M = XY^T$.

Q2. Montrer que si $\mathrm{Rg}\,(M) = 2$, alors il existe deux couples de vecteurs indépendants (X, Z) et (Y, U) tels que : $M = XY^T + ZU^T$.

Q3. Généraliser pour $\mathrm{Rg}\,(M) = k$.

Correction de la planche 11

Décryptage et indications

Cet exercice est posé assez régulièrement. En particulier, la première question apparaît souvent à l'écrit comme à l'oral. Les rapports de jury écrivent souvent que les candidats ont du mal à interpréter les matrices de rang 1. Cette planche est un bon entraînement ! Plus précisément, pour **Q1**, on suppose donc ici que le rang de la matrice M considérée est 1. Comme le rang est 1, toutes les lignes $L_1, ..., L_n$ de M sont colinéaires à une certaine ligne L_p de M. On considère une matrice colonne constituée des coefficients de colinéarité trouvés et on considère aussi une certaine matrice ligne que vous allez deviner. Pour **Q2**, on suppose dans cette question que le rang de la matrice M est 2. Par analogie avec la première question, on peut sélectionner deux lignes L_p et L_q indépendantes telle que pour chaque ligne L_i, pour i variant de 1 à n, il existe deux réels a_i et b_i tels que : $L_i = a_i L_p + b_i L_q$. On considère les deux matrices colonnes constituées l'une des coefficients de colinéarité concernant L_p et l'autre de ceux concernant L_q. Quant aux matrices lignes, on vous laisse deviner ! Enfin, pour **Q3**, essayer de généraliser.

Q1. On suppose dans la première question que le rang de la matrice M considérée est 1. Comme le rang est 1, toutes les lignes $L_1, ..., L_n$ de M sont colinéaires à une certaine ligne L_p de M.
Il existe pour tout i variant de 1 à n, un réel a_i tel que : $L_i = a_i L_p$ (avec $a_n = 1$.)
On considère une matrice colonne constituée des coefficients de colinéarité $a_1, ..., a_n$.
Notons la X : $X^T = \begin{pmatrix} a_1 & . & . & . & a_n \end{pmatrix}$.
Pour la matrice colonne Y, prenons L_p^T. (Car (L_p) est une matrice ligne.) On obtient :

$$X \times Y^T = X \times (L_p) = \begin{pmatrix} a_1 \\ . \\ . \\ . \\ a_n \end{pmatrix} \times (L_p) = \begin{pmatrix} a_1 L_p \\ . \\ . \\ . \\ a_n L_p \end{pmatrix}.$$

En conclusion, il existe un couple de vecteurs (X, Y) tels que : $M = XY^T$.

Commentaires

Il n'est pas nécessaire de développer L_p en utilisant le produit des matrices écrites en bloc.

Q2. On suppose dans la seconde question que le rang de la matrice M est 2. Par analogie avec la première question, on peut sélectionner deux lignes L_p et L_q indépendantes telle que pour chaque ligne L_i, pour $i \in [\![1, n]\!]$, il existe deux réels a_i et b_i tels que $L_i = a_i L_p + b_i L_q$.

On considère les deux matrices colonnes constituées l'une des coefficients de colinéarité concernant L_p et l'autre de ceux concernant L_q, c'est-à-dire :

$$X = \begin{pmatrix} a_1 \\ . \\ . \\ . \\ a_n \end{pmatrix} \text{ et } Z = \begin{pmatrix} b_1 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Vérifions que X et Z sont indépendants.

En effet, on commence par remarquer que : $a_p = 1$ et $b_p = 0$, puis $a_q = 0$ et $b_q = 1$.

Soit le vecteur $aX + bY$, sa $p^{\text{ème}}$ ligne est donc a et sa $q^{\text{ème}}$ ligne est b. On a l'implication :

$$aX + bZ = 0 \Rightarrow a = b = 0.$$

Commentaires

X et Z sont bien indépendants.

On note, de plus, ici $Y = (L_p)^T$ et $U = (L_q)^T$.

Les lignes L_p et L_q sont indépendantes par hypothèse et leurs transposées aussi.

Alors l'expression : $XY^T + ZU^T = \begin{pmatrix} a_1 \\ . \\ . \\ . \\ a_n \end{pmatrix} (L_p) + \begin{pmatrix} b_1 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix} (L_q)$

donne (en faisant des produits par blocs) : $\begin{pmatrix} a_1 L_p + b_1 L_q \\ . \\ . \\ . \\ a_n L_n + b_n L_q \end{pmatrix}$.

Comme pour tout i variant de 1 à n, $L_i = a_i L_p + b_i L_q$, on trouve M.

Q3. Si M est de rang k, il existe k lignes indépendantes $L_{p_1}, ..., L_{p_k}$ telles que toutes les lignes de M soient des combinaisons linéaires de ces k lignes.

On peut écrire $L_1 = a_{1,p_1} L_{p_1} + ... + a_{1,p_k} L_{p_k}$, où $(a_{1,p_j})_{1 \leqslant j \leqslant k}$ est une collection de k réels.

De même, on écrit : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $L_i = a_{i,p_1} L_{p_1} + ... + a_{i,p_k} L_{p_k}$.

Ici $(a_{i,p_j})_{1 \leqslant j \leqslant k}$ est une collection de k réels.

Posons pour tout $l \in [\![1, k]\!]$, $Y_l = (L_{p_l})^T$. Les k vecteurs Y_l sont indépendants.

On choisit alors : $X_1 = \begin{pmatrix} a_{1,p_1} \\ . \\ . \\ . \\ a_{n,p_1} \end{pmatrix}, ..., X_k = \begin{pmatrix} a_{1,p_k} \\ . \\ . \\ . \\ a_{n,p_k} \end{pmatrix}$.

Vérifions l'indépendance des ces k matrices colonnes en écrivant une relation du type :

$$\lambda_1 X_1 + ... + \lambda_k X_k = 0.$$

On peut remarquer que : $a_{p_1,p_1} = 1$ et $a_{p_1,j} = 0$ pour $j \neq p_1$.

Si l'on examine la ligne d'indice p_1 de : $\lambda_1 X_1 + ... + \lambda_k X_k$, cette ligne a pour seul coefficient $\lambda_1 \times 1 = \lambda_1$ et comme cette ligne est nulle, cela implique que $\lambda_1 = 0$.

De même, la ligne d'indice p_2 n'est composée que de λ_2 qui vaut 0.

Et ainsi de suite jusqu'à la ligne d'indice p_k, ce qui permet d'écrire que $\lambda_k = 0$.

Commentaires

Il existe donc une collection de k vecteurs indépendants $(X_1, ..., X_k)$ et une autre collection de k vecteurs indépendants $(Y_1, ..., Y_k)$ tels que M soit de la forme $X_1 Y_1^T + ... + X_k Y_k^T$.

Considérons le produit matriciel par blocs :

$$X_1 Y_1^T + ... + X_k Y_k^T = \begin{pmatrix} a_{1,p_1} \\ . \\ . \\ . \\ a_{n,p_1} \end{pmatrix} \times (L_{p_1}) + ... + \begin{pmatrix} a_{1,p_k} \\ . \\ . \\ . \\ a_{n,p_k} \end{pmatrix} \times (L_{p_k}).$$

Et : $\begin{pmatrix} a_{1,p_1} L_{p_1} + ... + a_{1,p_k} L_{p_k} \\ . \\ . \\ . \\ a_{n,p_1} L_{p_1} + ... + a_{n,p_k} L_{p_k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 \\ . \\ . \\ . \\ L_n \end{pmatrix} = M.$

PLANCHE 12

Enoncé

Soient $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n$ $2n$ complexes et M la matrice de taille n telle que si l'on note $(m_{i,j})_{(i,j)\in(\llbracket 1,n \rrbracket)^2}$ ses coefficients, alors :

$$m_{i,i} = a_i + b_i \text{ et } m_{i,j} = b_i \text{ pour } i \neq j.$$

Calculer $\det M$.

Correction de la planche 12

Décryptage et indications

Il s'agit ici d'un calcul de déterminant. Il faut avouer que l'on peut aborder ce développement de plusieurs manières, la plus rapide est de considérer le fait qu'un déterminant est une forme multilinéaire alternée, c'est-à-dire qu'il est possible de procéder à un développement par rapport à chacune des variables (ici les colonnes) et que si deux colonnes sont identiques, le déterminant est nul. On sait que les propriétés d'un déterminant fonctionnent aussi pour les lignes. Ceci dit, nous allons transposer la matrice (on sait que $\det(M) = \det(t(M))$) et on travaillera ainsi sur les vecteurs colonnes.
Plus précisément, pour démarrer, après avoir transposé, vous poserez $E_1, ..., E_n$ les vecteurs colonnes dont tous les coefficients sont nuls sauf celui à la $i^{\text{ème}}$ ligne qui vaut 1.
C'est la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{R})$. Vous pourrez poser aussi U le vecteur colonne composé uniquement de 1 et enfin écrire les colonnes de notre déterminant en fonction de ces vecteurs colonnes. Enfin, soulignons que certaines opérations élémentaires sur les colonnes d'un déterminant, peuvent, à l'inverse du calcul du rang d'une matrice par exemple, modifier la valeur du déterminant. Ainsi, la multiplication de tous les éléments d'une colonne par a multiplie le déterminant par a. Il faut en tenir compte.

Écrivons $\det M$ sous forme développée :

$$\det M = \begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1 & . & . & . & b_1 \\ b_2 & a_2+b_2 & b_2 & . & . & b_2 \\ . & b_3 & a_3+b_3 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & b_{n-1} & a_{n-1}+b_{n-1} & b_{n-1} \\ b_n & . & . & . & b_n & a_n+b_n \end{vmatrix}.$$

Nous allons noter $E_1, ..., E_n$ la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{R})$. Par exemple :

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}, ..., E_n = \begin{pmatrix} 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Notons aussi U le vecteur colonne dont tous les coefficients sont égaux à 1.

On a : $U = E_1 + E_2 + ... + E_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & 1 \end{pmatrix}^T$.

Nous allons travailler sur les colonnes. Comme le déterminant de M est égal à celui de M^T,

$$\det M = \begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_2 & . & . & . & b_n \\ b_1 & a_2+b_2 & b_3 & . & . & b_n \\ . & b_2 & a_3+b_3 & b_4 & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & b_{n-2} & a_{n-1}+b_{n-1} & b_n \\ b_1 & . & . & . & b_{n-1} & a_n+b_n \end{vmatrix}.$$

On peut donc écrire $\det M$ comme le déterminant (dans la base canonique) :
$\det M = \det(a_1E_1 + b_1U, a_2E_2 + b_2U, ..., a_nE_n + b_nU)$.
Développons selon la première variable, $\det M$ vaut :

$$a_1 \det(E_1, a_2E_2 + b_2U, ..., a_nE_n + b_nU) + b_1 \det(U, a_2E_2 + b_2U, ..., a_nE_n + b_nU).$$

Le premier déterminant se scinde à son tour en :

$$a_1a_2 \det(E_1, E_2, ..., a_nE_n + b_nU) + a_1b_2 \det(E_1, U, ..., a_nE_n + b_nU)$$

et le deuxième déterminant se scinde en :

$$b_1a_2 \det(U, E_2, ..., a_nE_n + b_nU) + b_1b_2 \det(U, U, ..., a_nE_n + b_nU).$$

On remarque que $\det(U, U, ..., a_nE_n + b_nU)$ est nul.
En continuant le développement, on aboutit à une somme composée de $n + 1$ déterminants seulement car les autres déterminants sont nuls.
Le premier des déterminants de cette somme a la particularité de n'avoir aucun U, c'est le déterminant $\det(a_1E_1, a_2E_2, ..., a_nE_n) = \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right) \times \det(E_1, E_2, ..., E_n)$.
Or, $\det(E_1, E_2, ..., E_n) = \det I_n = 1$. Finalement,

$$\det(a_1E_1, a_2E_2, ..., a_nE_n) = \prod_{k=1}^{n} a_k.$$

Les n autres déterminants de la somme ont la particularité d'avoir la composante U une et une seule fois, ce sont les déterminants de la forme :

$$\Delta_i = \det(a_1E_1, a_2E_2, ..., a_{i-1}E_{i-1}, b_iU, a_{i+1}E_{i+1}, ..., a_nE_n)$$

$$= b_i \left(\prod_{k=1, k\neq i}^{n} a_k\right) \det(E_1, E_2, ..., E_{i-1}, U, E_{i+1}, ..., E_n),$$

où i est un entier variant de 1 à n. Fixons i, Δ_i s'écrit :

$$b_i \left(\prod_{k=1, k\neq i}^{n} a_k\right) \times \begin{vmatrix}
1 & 0 & . & . & . & . & 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\
0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\
0 & 0 & 1 & . & . & . & 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\
. & . & 0 & 1 & 0 & . & . & 1 & 0 & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & 1 & 1 & 0 & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & 0 & 1 & 0 & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & 0 & 1 & 1 & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & 0 & 1 & 0 & . & 1 & 0 & . \\
. & . & . & . & . & . & 0 & 1 & 0 & . & 0 & 1 & 0 \\
0 & . & . & . & . & . & 0 & 1 & 0 & . & . & 0 & 1
\end{vmatrix}.$$

Il reste à faire sur ce déterminant quelques opérations élémentaires.

$C_i \leftarrow C_i - C_1$, $C_i \leftarrow C_i - C_2$, ..., $C_i \leftarrow C_i - C_{i-1}$, $C_i \leftarrow C_i - C_{i+1}$, ..., $C_i \leftarrow C_i - C_n$.
À chaque opération élémentaire, la colonne C_i, qui correspond au départ à U, a un 0 de plus.
À la fin, la colonne C_i est E_i. On a : $\det(E_1, E_2, ..., E_{i-1}, U, E_{i+1}, ..., E_n) = 1$.

Ainsi, pour $i \in [\![1, n]\!]$, $\Delta_i = \det(a_1E_1, a_2E_2, ..., a_{i-1}E_{i-1}, b_iU, a_{i+1}E_{i+1}, ..., a_nE_n) = b_i \prod_{k=1, k\neq i}^{n} a_k$.

Le déterminant de M est donc composé de la somme de $\prod_{k=1}^{n} a_k$ avec tous les termes $b_i \prod_{k=1, k\neq i}^{n} a_k$, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

Donc : $\det M = \prod_{k=1}^{n} a_k + \sum_{i=1}^{n} b_i \left(\prod_{k=1, k\neq i}^{n} a_k \right)$.

PLANCHE 13

Enoncé

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Q1. Calculer M^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Q2. Déterminer une base de $F = \text{Vect}\left((M^n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$.

Q3. Montrer que le commutant de $M = \{A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ AM = MA\}$ est F.

Correction de la planche 13

Décryptage et indications

Cet exercice est l'étude du commutant C_M d'une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, c'est-à-dire l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ commutant avec M.
Q1 est très classique et c'est une question qui se fait souvent en première année, dès que les matrices sont vues. Indication (pour les nuls) : on pose $M = J + I_3$, où J est nilpotente et il reste à appliquer la formule du binôme de Newton.
Q2 peut se faire par double inclusion en remarquant que M^n est une combinaison linéaire de I_3, de J et de J^2.
Q3 se fait par double inclusion. Pour montrer que $C_M \subset F$, on pourra poser A une matrice quelconque de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on développera l'égalité $AM = MA$.

Q1. Posons $M = J + I_3$, avec $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Alors $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $J^3 = 0$.

Comme J et I_3 commutent, on peut appliquer la formule du binôme de Newton.

$$M^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} J^k I_3^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} J^3 = \binom{n}{0} I_3 + \binom{n}{1} J + \binom{n}{2} J^2.$$

Il reste à simplifier les coefficients binomiaux.

$$M^n = I_3 + nJ + \frac{n(n-1)}{2} J^2 = \begin{pmatrix} 1 & n & n + \frac{1}{2}n(n-1) \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Commentaires

Un certain nombre de candidats se lanceraient dans la diagonalisation de M afin de calculer M^n. Or ici, M n'est pas diagonalisable car sinon comme 1 est la seule valeur propre, M serait semblable à I_3 donc égale à I_3.

Q2. On remarque que M^n est une combinaison linéaire de I_3, de J et de J^2.

Ainsi $F \subset \text{Vect}(I_3, J, J^2)$.

Puis $I_3 = M^0 \in F$, $J = M - I_3 \in F$ et $J^2 = (M - I_3)^2 M^2 + I_3 - 2M \in F$.

Et donc : $\text{Vect}(I_3, J, J^2) \subset F$.

Déjà on peut dire que la famille (I_3, J, J^2) est une famille génératrice de F.

Montrons que (I_3, J, J^2) est libre. Posons $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

$$aI_3 + bJ + cJ^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b & b+c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow a = b = c = 0.$$

On peut conclure que (I_3, J, J^2) est une base de F.

Q3. On va raisonner comme à **Q2** par double inclusion.

Notons $C_M = \{A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ AM = MA\}$ le commutant de M.

Si A et B commutent avec M alors toute combinaison linéaire de A et de B commute avec M. Donc C_M est un espace vectoriel. Or $M^n \in C_M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc $F \subset C_M$.

Il reste à montrer l'inclusion inverse. Considérons $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ une matrice quelconque telle que $AM = MA$. Traduisons cette égalité en faisant le produit matriciel.

$$\begin{pmatrix} a & a+b & a+b+c \\ d & d+e & d+e+f \\ g & g+h & g+h+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+d+g & b+e+h & c+f+i \\ d+g & e+h & f+i \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d+g=0, & a=e+h, & a+b=f+i \\ g=0, & d=h, & d+e=i \\ g=g, & g=0, & g+h=0 \end{cases}.$$

Alors $g = 0$, $d = 0$, $h = 0$, $a = e = i$, $b = f$ et il reste $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = aI_3 + bJ + (c-b)J^2$.

Donc toute matrice $A \in C_M$ appartient à $\text{Vect}(I_3, J, J^2)$. Et ainsi $C_M \subset F$.
En conclusion, $C_M = F$.

Mines-Telecom

PLANCHE 14

Enoncé

Soit $(m,a,b) \in \mathbb{R}^3$. Résoudre le système $(\mathcal{S}_m)$: $\left\{ \begin{array}{rcl} mx+my+mz+t & = & a \\ x+my+z+mt & = & b \end{array} \right.$, d'inconnue $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ selon les valeurs m, a et b.

Correction de la planche 14

Décryptage et indications

Cet exercice d'un abord simple doit être abordé méthodiquement et notamment savoir discuter selon m. Nous choisirons de partir de $m=0$ puis de faire $m \neq 0$ dans la solution mais on pourrait partir autrement. En tout cas, il n'est pas question d'introduire un quelconque déterminant car on a deux équations et quatre inconnues.

• *Cas* $m=0$. Ici le système devient $(\mathcal{S}_0)$: $\left\{ \begin{array}{rcl} t & = & a \\ x+z & = & b \end{array} \right.$.

Et l'ensemble des solutions est donc : $\{(b-z,y,z,a),\ (y,z) \in \mathbb{R}^2\}$.

• *Cas* $m \neq 0$. On divise la ligne L_1 par m : $(\mathcal{S}_m)$ devient $\left\{ \begin{array}{rcl} x+y+z+\frac{1}{m}t & = & \frac{a}{m} \\ x+my+z+mt & = & b \end{array} \right.$.

$L_1 - L_2$ donne (1) : $(m-1)y + \left(m-\frac{1}{m}\right)t = b - \frac{a}{m}$. On distingue plusieurs cas.

▷ *Cas* $m=1$. Il reste $0 = b-a$ donc si $a \neq b$, il n'y a pas de solution.

Et si $a=b$, il reste le système : $(\mathcal{S}_1)$: $\left\{ \begin{array}{rcl} x+y+z+t & = & a \\ x+y+z+t & = & a \end{array} \right.$.

L'ensemble des solutions est $\{(a-y-z-t,y,z,t),\ (y,z,t) \in \mathbb{R}^3\}$.

▷ *Cas* $m \neq 1$. Comme $m - \frac{1}{m} = \dfrac{m^2-1}{m}$, (1) devient en divisant par $m-1$:

$$y + \frac{m+1}{m}t = \frac{1}{m-1}\left(b - \frac{a}{m}\right) = \frac{mb-a}{m(m-1)} \Rightarrow y = -\frac{m+1}{m}t + \frac{mb-a}{m(m-1)}.$$

Reprenons L_1 de $(\mathcal{S}_m)$, après la division par m.

$$x+y+z+\frac{1}{m}t = \frac{a}{m} \Rightarrow x+z+\frac{1}{m}t - \frac{m+1}{m}t + \frac{mb-a}{m(m-1)} = \frac{a}{m}.$$

On arrange les termes en t et les termes constants.

$$x+z-t=\frac{a-b}{m-1}\Rightarrow x=\frac{a-b}{m-1}+t-z.$$

L'ensemble des solutions est alors $\left\{\left(\frac{a-b}{m-1}-z+t,\ -\frac{m+1}{m}t+\frac{mb-a}{m(m-1)},\ z,\ t\right),\ (z,t)\in\mathbb{R}^2\right\}$.

Commentaires

La discussion aurait pu aussi commencer par le cas $m=1$ puis $m\neq 1$. Dans ce cas, pour $m=1$, on retrouve ce que l'on a écrit plus haut et pour le cas $m\neq 1$, on fait encore L_1-L_2 et on continue. La discussion avec $m=0$ ou $m\neq 0$ apparaîtra plus loin.
À vous de terminer !

PLANCHE 15

Enoncé

Soient E et F deux espaces vectoriels, $u\in\mathcal{L}(E,F)$ et $v\in\mathcal{L}(F,E)$ tels que $v\,o\,u=Id_E$.

Q1. Démontrer que $\mathrm{Ker}(u\,o\,v)=\mathrm{Ker}(v)$.

Q2. Démontrer que $\mathrm{Im}(u\,o\,v)=\mathrm{Im}(u)$.

Q3. Montrer que $\mathrm{Ker}(v)\oplus\mathrm{Im}(u)=F$.

Correction de la planche 15

Décryptage et indications

Cet exercice n'est pas très compliqué, à condition de savoir manier les noyaux et les images. Pour les deux premières questions, il faudra raisonner par double inclusion. On prend un vecteur quelconque du premier sous-espace et on démontre qu'il appartient au second. Pour **Q3**, attention, résistez à la tentation de plaquer le théorème du rang à tout prix. Ici on n'est pas nécessairement en dimension finie. Pour montrer l'égalité $F=\mathrm{Ker}(v)+\mathrm{Im}(u)$, la seule méthode valide est par analyse-synthèse. On commence par l'analyse, c'est-à-dire que l'on suppose le résultat vrai en partant de $x\in F$ avec l'égalité $x=z+u(y)$, où $z\in\mathrm{Ker}(v)$ et $y\in E$. On en déduit y et z en fonction de x puis on passe à la synthèse. Un dernier conseil : ne mélangez pas E et F. Ainsi les éléments de $\mathrm{Ker}(v)$ et de $\mathrm{Im}(u)$ sont dans F.

Q1. On procède par double inclusion pour montrer l'égalité.

• *Inclusion directe* : soit $x \in \mathrm{Ker}(u \circ v)$ alors $(u \circ v)(x) = 0$ et donc $v(u \circ v)(x)) = 0$.
Comme $v \circ u = Id_E$, on écrit $v(u \circ v)(x)) = (v \circ u)(v(x)) = v(x) = 0$ et donc $x \in \mathrm{Ker}(v)$.

• *Inclusion réciproque* : soit $x \in \mathrm{Ker}(v)$ alors $v(x) = 0$ d'où $u(v(x)) = u(0) = 0$ ainsi $u \circ v(x) = 0$ et on peut en conclure que $x \in \mathrm{Ker}(u \circ v)$.

Q2. On procède ici aussi par double inclusion pour montrer l'égalité.

• *Inclusion directe* : Soit $y \in \mathrm{Im}(u \circ v)$ alors il existe $x \in F$ tel que $y = u \circ v(x)$ d'où $u(v(x)) = y$ et donc $y \in \mathrm{Im}u$.

• *Inclusion réciproque* : Soit $y \in \mathrm{Im}(u)$ alors il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$. Or : $x = v \circ u(x)$ car $v \circ u = Id_E$. D'où $y = u(x) = (u \circ v)(u(x))$ et donc $y \in \mathrm{Im}(u \circ v)$. Ainsi $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Im}(u \circ v)$.

Q3. Nous allons montrer séparément $\mathrm{Ker}(v) \cap \mathrm{Im}(u) = \{0\}$ et $\mathrm{Ker}(v) + \mathrm{Im}(u) = F$.

• *Preuve de* $\mathrm{Ker}(v) \cap \mathrm{Im}(u) = \{0\}$

Soit $y \in \mathrm{Ker}(v) \cap \mathrm{Im}(u)$. Alors $v(y) = 0$ et il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$.

D'où : $v(y) = v \circ u(x) = id_E(x) = x \Rightarrow x = 0$. Ainsi $\mathrm{Ker}(v) \cap \mathrm{Im}(u) = \{0\}$.

• *Preuve de* $\mathrm{Ker}(v) + \mathrm{Im}(u) = F$

Raisonnons par analyse-synthèse.
Analyse : on suppose que $\mathrm{Ker}(v) + \mathrm{Im}(u) = F$.
Partons de $x \in F$ avec $x = z + u(y)$, où $z \in \mathrm{Ker}(v)$ et $y \in E$.
Comme $v(z) = 0$, $v(x) = v(z) + v \circ u(y) = y$.
Alors $x = z + u(y) = z + u \circ v(x)$ et donc $z = x - u \circ v(x)$.

Synthèse : soit $x \in F$ alors $x = x - u \circ v(x) + u \circ v(x)$. Déjà $u \circ v(x) \in \mathrm{Im}(u)$.
Il reste à prouver que $x - u \circ v(x) \in \mathrm{Ker}(v)$.

$$v(x - u \circ v(x)) = v(x) - v \circ u(v(x) = v(x) - id_E(v(x)) = v(x) - v(x) = 0.$$

Alors $x - u \circ v(x) \in \mathrm{Ker}(v)$ et $F \subset \mathrm{Ker}(v) + \mathrm{Im}(u)$.
la réciproque est immédiate, en effet comme $\mathrm{Im}(u) \subset F$ et $\mathrm{Ker}(v) \subset F$, on a $\mathrm{Ker}(v) + \mathrm{Im}(u) \subset F$ et donc finalement, on a : $F = \mathrm{Ker}(v) + \mathrm{Im}(u)$.

En conclusion, on a bien : $\mathrm{Ker}(v) \oplus \mathrm{Im}(u) = F$.

PLANCHE 16

Enoncé

Soit n un entier non nul. On considère la matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par les coefficients :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ A_{i,j} = \sin(i+j)$$

Déterminer le rang de A. En déduire le déterminant de A.

Pour $n \geqslant 3$, on pourra appeler $X = \begin{pmatrix} \cos 1 \\ \vdots \\ \cos n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} \sin 1 \\ \vdots \\ \sin n \end{pmatrix}$.

Correction de la planche 16

Décryptage et indications

L'indice donné dans l'énoncé peut faire penser à développer les quantités $\sin(i+j)$ pour $i \in [\![1,n]\!]$ et à faire le lien avec X et Y. Sachez que l'on rencontre aussi cet exercice avec comme seule question : calculer le déterminant de A. L'idée reste la même, c'est-à-dire introduire X et Y.

- Si $n=1$, $A=(\sin 2)\neq 0$ donc son rang est 1 et $\det A=\sin 2$.
- Si $n=2$, $A=\begin{pmatrix}\sin 2 & \sin 3\\ \sin 3 & \sin 2\end{pmatrix}$. Il est clair que le rang de A est 2 et $\det A=\sin^2 2-\sin^2 3$.
- Supposons $n\geqslant 3$ et posons $X=\begin{pmatrix}\cos 1\\ \vdots\\ \cos n\end{pmatrix}$ et $Y=\begin{pmatrix}\sin 1\\ \vdots\\ \sin n\end{pmatrix}$.

Pour tout $i\in[\![1,n]\!]$ et tout $j\in[\![1,n]\!]$, $\sin(i+j)=\sin i\cos j+\sin j\cos i$.

Ainsi pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, la colonne C_i de A est $X\sin i+Y\cos i$.

Comme $C_i\in \mathrm{Vect}\{X,Y\}$ et comme X et Y sont indépendants car non proportionnels, le rang de A est 2 et par voie de conséquence, $\det A=0$.

PLANCHE 17

Enoncé

Soient $(a_1,\dots,a_n,\,b_1,\dots,\,b_n)\in\mathbb{R}^{2n}$ et les matrices colonnes $B\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $A_i\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ avec $B^T=\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n\end{pmatrix}$ et $A_i^T=\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_i & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}$, où a_i est en $i^{\text{ème}}$ position.

Q1. Calculer $\det(A_1,\,A_2,\,...,\,A_n)$.

Q2. Calculer pour tout $i\in[\![2,n-1]\!]$, $\det(A_1,A_2,...,A_{i-1},B,A_{i+1},...,A_n)$.

Q3. Calculer $\det(B,A_2,A_3,...,A_n)$ et $\det(A_1,A_2,...,A_{n-1},B)$.

Q4. En déduire $\Delta=\begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1 & . & . & . & b_1\\ b_2 & a_2+b_2 & b_2 & . & . & b_2\\ . & . & . & . & . & .\\ . & . & . & . & . & .\\ . & . & . & . & . & .\\ b_{n-1} & . & . & . & a_{n-1}+b_{n-1} & b_{n-1}\\ b_n & . & . & . & b_n & a_n+b_n\end{vmatrix}$.

Correction de la planche 17

Décryptage et indications

Les questions **Q1** à **Q3** sont classiques (il faudra développer selon la bonne rangée). Pour **Q4**, le fait de poser les deux matrices de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$:

$$B^T = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix}, A_i^T = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_i & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

où a_i est en $i^{\text{ème}}$ position dans la matrice colonne A_i, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ permet d'écrire le déterminant appelé Δ sous la forme $\det(A_1 + B_1, A_2 + B_2, ..., A_n + B_n)$. On applique ensuite la multilinéarité du déterminant.

Q1. On a : $\det(A_1,\, A_2,\, ...,\, A_n) = \prod_{i=1}^{n} a_i$.

Commentaires

On a reconnu un déterminant diagonal avec les coefficients $a_1, ..., a_n$ sur la diagonale principale.

Q2. Calculons pour tout $i \in [\![2, n-1]\!]$, $\det(A_1, A_2, ..., A_{i-1}, B, A_{i+1}, ..., A_n)$.

Commentaires

Conformément à l'énoncé, on différencie les cas $i \in [\![2, n-1]\!]$ des cas $i = 1$ et $i = n$ (que l'on traite dans la question suivante) uniquement pour la rigueur des écritures car dans le cas $i = 1$, A_{i-1} n'existe pas et dans le cas $i = n$, A_{i+1} n'existe pas.

On écrit $\det(A_1, A_2, ..., A_{i-1}, B, A_{i+1}, ..., A_n) = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 & b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{i-1} & b_{i-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_i & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{i+1} & a_{i+1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_n & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$.

On développe $\det(A_1, A_2, ..., A_{i-1}, B, A_{i+1}, ..., A_n)$ selon la $i^{\text{ème}}$ ligne.

$$\det(A_1, A_2, ..., A_{i-1}, B, A_{i+1}, ..., A_n) = (-1)^{2i} b_i \Delta_i,$$

où Δ_i est un déterminant diagonal d'ordre $n-1$ qui a dans cet ordre sur sa diagonale principale les quantités $a_1, ..., a_{i-1}, a_{i+1}, ..., a_n$. On peut conclure.

$$\forall i \in [\![2, n-1]\!],\ \det(A_1, A_2, ..., A_{i-1}, B, A_{i+1}, ..., A_n) = a_1...a_{i-1}b_ia_{i+1}...a_n = b_i \prod_{j=1, j\neq i}^{n} a_j.$$

Q3. On calcule $\det(B, A_2, A_3, ..., A_n)$ et $\det(A_1, A_2, ..., A_{n-1}, B)$ sans problème car ce sont des déterminants triangulaires, inférieur pour le premier et supérieur pour le second.

$$\det(B, A_2, A_3, ..., A_n) = b_1 \prod_{j=2}^{n} a_j \text{ et } \det(A_1, A_2, ..., A_{n-1}, B) = b_n \prod_{j=1}^{n-1} a_j.$$

Q4.

Commentaires

Ici, on va utiliser la multilinéarité et l'antisymétrie du déterminant. Cela peut dérouter car on utilise plutôt des opérations élémentaires ou un développement selon une rangée pour calculer un déterminant.

Le déterminant cherché est $\Delta = \det(A_1 + B, A_2 + B, ..., A_n + B)$.
Par multilinéarité du déterminant, Δ est une somme de 2^n déterminants dont toutes les colonnes sont constituées de colonne A_i seule ou B seule. Parmi ces déterminants, ceux de la forme $\det(..., B, ..., B, ...)$ donc ayant au moins deux colonnes B identiques sont nuls. Il reste donc parmi les 2^n déterminants que $n + 1$ déterminants :

- D'abord les n déterminants $\det(A_1, ..., A_{i-1}, B, A_{i+1}, ..., A_n)$ avec $i \in [\![1, n]\!]$.
- Puis le déterminant $\det(A_1, ..., A_n)$ de valeur $a_1a_2...a_n$.
- Il reste à sommer ces valeurs de déterminants.

$$\Delta = a_1a_2...a_n + \sum_{i=1}^{n} b_i \prod_{j=1, j\neq i}^{n} a_j.$$

PLANCHE 18

Enoncé

On veut déterminer toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ telles que $M^2 = O_3$.

Q1. Soit ϕ l'endomorphisme associé canoniquement à M vérifiant $M^2 = O_3$ en supposant $M \neq O_3$.

Q1-a Comparer $\operatorname{Im}\phi$ et $\operatorname{Ker}\phi$ et donner leurs dimensions.

Q1-b Soit un vecteur $\vec{x}$ tel que $\phi(\vec{x}) \neq \vec{0}$. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{K}^3$ de la forme $(\vec{x}, \phi(\vec{x}), \vec{z})$, où $\vec{z}$ est dans $\operatorname{Ker}\phi$.

Q2. En déduire toutes les matrices M solutions du problème.

Correction de la planche 18

Décryptage et indications

Dans la pratique, de façon générale, pour résoudre une équation polynomiale d'inconnue $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, l'idée est de se placer dans une base où l'endomorphisme associé canoniquement à M a une matrice avec beaucoup de zéros, l'idéal est qu'elle soit diagonale. On détermine alors les solutions. Si T est une matrice solution, PTP^{-1} est la forme de la solution en se ramenant à la base canonique. Plus précisément dans cette planche, on commencera par montrer que si ϕ est l'endomorphisme associé à M alors $\operatorname{Im}\phi \subset \operatorname{Ker}\phi$. Puis on suit le fil des questions.

Q1-a Supposons que ϕ l'endomorphisme associé canoniquement à M, ne soit pas l'endomorphisme nul. Il existe donc un vecteur $\vec{x}$ tel que $\phi(\vec{x}) \neq \vec{0}$. Donc $\operatorname{Im}\phi$ est au moins de dimension un. Par ailleurs si $\vec{y} \in \operatorname{Im}\phi$, il existe $\vec{z} \in \mathbb{K}^3$ tel que $\vec{y} = \phi(\vec{z})$.

On a l'implication : $\phi^2 = 0 \Rightarrow \phi(\vec{y}) = \phi^2(\vec{z}) = 0 \Rightarrow \vec{y} \in \operatorname{Ker}\phi$.

On a donc : $\operatorname{Im}\phi \subset \operatorname{Ker}\phi$ et comme $\dim \operatorname{Im}\phi + \dim \operatorname{Ker}\phi = 3$ d'après le théorème de rang, nécessairement $\dim \operatorname{Im}\phi = 1$ et $\dim \operatorname{Ker}\phi = 2$.

Q1-b Soit un vecteur $\vec{x}$ tel que $\phi(\vec{x}) \neq \vec{0}$. Comme $\phi(\vec{x}) \in \operatorname{Ker}\phi$, il existe $\vec{z} \in \operatorname{Ker}\phi$ tel que la famille $(\phi(\vec{x}), \vec{z})$ soit une base de $\operatorname{Ker}\phi$.

Considérons la famille $\mathcal{F} = (\vec{x}, \phi(\vec{x}), \vec{z})$. Montrons que $\mathcal{F}$ est libre (et donc est une base de $\mathbb{K}^3$). On prend trois scalaires a, b et c tels que $a\,\vec{x} + b\,\phi(\vec{x}) + c\,\vec{z} = 0$. On applique ϕ à cette égalité : $\phi\left(a\vec{x} + b\phi(\vec{x}) + c\vec{z}\right) = \phi(0) = 0 \Rightarrow a\phi(\vec{x}) + b\phi^2(\vec{x}) + c\phi(\vec{z}) = a\,\phi(\vec{x}) \Rightarrow a = 0$.

En effet, $\phi^2 = 0$, $\phi(\vec{z}) = 0$ et $\phi(\vec{x}) \neq 0$. Il reste $b\,\phi(\vec{x}) + c\,\vec{z} = 0$. Et comme $\{\phi(\vec{x}), \vec{z}\}$ est une base de $\operatorname{Ker}\phi$, c'est une famille libre et $b = c = 0$.

Q2. On peut écrire alors la matrice A de ϕ (supposé toujours non nul) dans cette base $\mathcal{F}$. Les colonnes de A sont les coordonnées dans l'ordre de $\phi(\vec{x})$, de $\phi^2(\vec{x}) = 0$ et de $\phi(\vec{z}) = 0$ dans cette base $\mathcal{F}$. Et on obtient : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Or il existe $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{K})$ tel que $M = PAP^{-1}$. Et on a bien $M^2 = 0$.

Réciproquement toute matrice de la forme $P^{-1}AP$ avec $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{K})$ est solution.

En effet : $P^{-1}APP^{-1}AP = P^{-1}A^2P = P^{-1}0P = 0$.

Les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ qui vérifient $M^2 = 0$ sont soit la matrice nulle, soit toutes les matrices semblables à A, c'est-à-dire de la forme $P^{-1}AP$ avec $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{K})$.

PLANCHE 19

Enoncé

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, on considère $\phi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$, $P(X) \mapsto P(X+1) - P(X-1)$.

Vérifier que ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ puis déterminer $\operatorname{Im}\phi$.

Correction de la planche 19

Décryptage et indications

Cet exercice commence tranquillement. La linéarité ne devrait poser aucun problème. Par contre, n'oubliez pas qu'il faut justifier rapidement que si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ alors $\phi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$. Vous pouvez vous lancer dans la matrice de ϕ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ mais ce n'est pas nécessaire. Vous pouvez aussi chercher le noyau qui sera l'ensemble des polynômes P ayant une certaine période à trouver. Et utiliser le théorème du rang pour trouver $\operatorname{Im}\phi$.

Posons P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ et $a \in \mathbb{R}$, alors :

$$\phi(P+aQ) = (P+aQ)(X+1) - (P+aQ)(X-1)$$

$$= P(X+1) - P(X-1) + a(Q(X+1) - Q(X-1)) = \phi(P) + a\phi(Q).$$

Puis si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ alors $P(X+1) \in \mathbb{R}_n[X]$ et $P(X-1) \in \mathbb{R}_n[X]$ donc on peut en conclure que $P(X+1) - P(X-1) \in \mathbb{R}_n[X]$. Et $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$.
On a : $\phi(1) = 0$, $\phi(X) = X + 1 - X + 1 = 2$, $\phi(X^2) = (X+1)^2 - (X-1)^2 = 4X$.

Et pour $k \in [\![1, n]\!]$, $\phi(X^k) = (X+1)^k - (X-1)^k = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} X^{k-j} - \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^j X^{k-j}$.

Ce qui donne $\phi(X^k) = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (1 + (-1)^{j+1}) X^{k-j}$.

Or $1 + (-1)^{j+1} = 0$ pour $j = 0$. Ainsi $\phi(X^k) = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} (1 + (-1)^{j+1}) X^{k-j} \in \mathbb{R}_{k-1}[X]$.
Par linéarité, $\phi(P) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Donc $\operatorname{Im}\phi \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
Précisons le noyau de ϕ.

$$P \in \operatorname{Ker}\phi \Leftrightarrow P(X+1) = P(X-1) \Leftrightarrow P(X+2) = P(X).$$

Donc $P \in \operatorname{Ker}\phi$ si et seulement si P est de période 2 donc si et seulement si P est constant. Donc $\operatorname{Ker}\phi = \mathbb{R}_0[X]$ et d'après le théorème du rang,

$$\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1 = \dim \operatorname{Ker}\phi + \dim \operatorname{Im}\phi = 1 + \dim \operatorname{Im}\phi \Rightarrow \dim \operatorname{Im}\phi = n.$$

Alors $\operatorname{Im}\phi \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $\dim \operatorname{Im}\phi = n = \dim \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Ainsi $\operatorname{Im}\phi = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Commentaires

Comment justifier rigoureusement que si P est un polynôme de période T alors P est constant ? Supposons $T > 0$ par exemple et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $P(n) = P(n+T)$. Donc d'après le théorème de Rolle, il existe $c_n \in]n, n+T[$ tel que $P'(c_n) = 0$. Or la suite (c_n) est strictement croissante. Il existe donc une infinité de racines distinctes pour P' qui est donc le polynôme nul et P est donc constant.

Centrale-Supelec

PLANCHE 20

Enoncé

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et $\Delta : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X], P \mapsto P(X+1) - P(X)$.

Q1. Montrer que $\Delta \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$ et qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\Delta^p = 0$.

Q2. En déduire pour tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$:

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \left(\begin{array}{c} n \\ j \end{array} \right) P(X+j) = 0.$$

Correction de la planche 20

Décryptage et indications

La fonction Δ définie dans cette planche est classique et se retrouve dans une série d'autres planches, à Centrale-Supelec comme dans les autres concours. Ici, on s'intéresse au caractère nilpotent de Δ.
Pour **Q1**, on remarquera que $P(X)$ et $P(X+1)$ sont deux polynômes de même degré et de même coefficient dominant. Donc $\deg(\Delta(P)) < \deg(P)$.
Pour **Q2**, on commencera par calculer $\Delta^2(P)$ puis $\Delta^3(P)$ puis on « devinera » une formule qui donne $\Delta^r(P)$ pour r entier en s'inspirant de la formule à démontrer.

Q1. Pour commencer si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ alors $\Delta(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.
Considérons un couple $(P, Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$ et un couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\Delta(aP + bQ) = (aP + bQ)(X+1) - (aP + bQ)(X).$$

C'est-à-dire : $\Delta(aP + bQ) = a\left[P(X+1) - P(X)\right] + b\left[Q(X+1) - Q(X)\right]$.
Et on a bien l'égalité : $\Delta(aP + bQ) = a\Delta(P) + b\Delta(Q)$.
Il faut maintenant montrer que Δ est nilpotent.

Commentaires

À retenir : encore une fois, on travaille sur les degrés, c'est important dans $\mathbb{R}[X]$!

On remarque que $P(X)$ et $P(X+1)$ sont deux polynômes de même degré et de même coefficient dominant. Donc le degré de $\Delta(P)$ est inférieur strictement à celui de P.
Par récurrence immédiate, celui de $\Delta^k(P)$ est inférieur ou égal à $\deg P - k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$.
Ainsi, si $k = n$, $\Delta^n(P)$ est constant et donc pour tout P de degré au plus n : $\Delta^{n+1}(P) = 0$.

Q2. On commence par remarquer, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$:

$$\Delta^2(P) = \Delta(P(X+1) - P(X)) = P(X+2) - P(X+1) - (P(X+1) - P(X)).$$

C'est-à-dire : $\Delta^2(P) = P(X+2) - 2P(X+1) + P(X)$.
Puis, on continue à l'ordre 3 pour deviner la formule qu'il faudra prouver.

$$\Delta^3(P) = \Delta(\Delta^2(P)) = \Delta(P(X+2) - 2P(X+1) + P(X)).$$

On arrange encore.

$$\Delta^3(P) = P(X+3) - 2P(X+2) + P(X+1) - [P(X+2) - 2P(X+1) + P(X)]\,.$$

Et encore : $\Delta^3(P) = P(X+3) - 3P(X+2) + 3P(X+1) - P(X)$.
On reconnaît les coefficients de la formule du binôme de Newton avec une alternance de signe.
On conjecture une formule : $\forall r \in \mathbb{N}$, $\Delta^r(P) = \displaystyle\sum_{j=0}^{r} (-1)^{r-j} \binom{r}{j} P(X+j)$.

Commentaires

L'initialisation est faite et même pour $r \in \{0, 1, 2, 3\}$.

On suppose la formule vraie pour r donné, entier non nul.

$$\Delta^{r+1}(P) = \Delta(\Delta^r(P)) = \Delta\left(\sum_{j=0}^{r} (-1)^{r-j} \binom{r}{j} P(X+j)\right)$$

ce qui donne, en utilisant la définition de Δ :

$$\Delta^{r+1}(P) = \sum_{j=0}^{r} (-1)^{r-j} \binom{r}{j} P(X+j+1) - \sum_{j=0}^{r} (-1)^{r-j} \binom{r}{j} P(X+j).$$

On fait un changement de variable dans la première somme :

$$\Delta^{r+1}(P) = \sum_{j=1}^{r+1} (-1)^{r-j+1} \binom{r}{j-1} P(X+j) - \sum_{j=0}^{r} (-1)^{r-j} \binom{r}{j} P(X+j).$$

Commentaires

Cela ressemble étrangement à la preuve de la formule de Leibniz ou du binôme de Newton, modulo l'alternance des signes. Que de bons souvenirs !

On regroupe en isolant les termes en trop. $\Delta^{r+1}(P)$ vaut :

$$\sum_{j=1}^{r}(-1)^{r+1-j}\left[\begin{pmatrix} r \\ j-1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} r \\ j \end{pmatrix}\right]P(X+j)+P(X+r+1)-(-1)^{r}P(X).$$

On pense à la (fameuse) formule de Pascal :

$$\begin{pmatrix} r \\ j-1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} r \\ j \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r+1 \\ j \end{pmatrix}.$$

Notre $\Delta^{r+1}(P)$ devient :

$$\sum_{j=1}^{r}(-1)^{r+1-j}\begin{pmatrix} r+1 \\ j \end{pmatrix}P(X+j)+\begin{pmatrix} r+1 \\ r+1 \end{pmatrix}P(X+r+1)+(-1)^{r+1}P(X).$$

Finalement :

$$\Delta^{r+1}(P)=\sum_{j=0}^{r+1}(-1)^{r+1-j}\begin{pmatrix} r+1 \\ j \end{pmatrix}P(X+j).$$

C'est bien la formule au rang $r+1$.
Il reste à démontrer l'égalité de l'énoncé. On a une information importante. P est de degré strictement inférieur à n, ce qui permet d'écrire $\Delta^n(P)=0$ en se rappelant la première question.
Il reste à appliquer la formule démontrée à l'instant pour le cas $r=n$ et on a le résultat.

PLANCHE 21

Enoncé

Soit pour tout entier $k \in [\![0,n]\!]$: $P_k = X^k(1-X)^{n-k}$.

Q1. Montrer que la famille $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Q2. Donner la décomposition de $Q=\dfrac{d^n}{dX^n}\left(X^n(1-X)^n\right)$ dans cette base.

Q3. En déduire la valeur de la somme :

$$\sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}^2.$$