Oraux
corrigés et commentés

Concours ECG2

Mathématiques appliquées

HEC



ellipses

Mayeul Bacquelin

Oraux

corrigés et commentés

Concours ECG2

Mathématiques appliquées

HEC

Mayeul Bacquelin

ellipses

Collection

Oraux

corrigés et commentés

Retrouvez tous les livres de la collection sur www.editions-ellipses.fr

Conception graphique couverture : Éric VIGIER

ISBN 9782340-111431

Dépôt légal : janvier 2026

©Ellipses Édition Marketing S.A.
8/10 rue la Quintinie 75015 Paris

DANGER
LE PHOTOCOPILLAGE TUE LE LIVRE

Le Code de la propriété intellectuelle et artistique n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article L. 122-5, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite » (alinéa 1er de l'article L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 1. Étude de fonctions 5
CHAPITRE 2. Intégration 27
CHAPITRE 3 Les suites 45
CHAPITRE 4. Série 65
CHAPITRE 5. Espace vectoriel et calcul matriciel 81
CHAPITRE 6. Application linéaire 103
CHAPITRE 7. Diagonalisation 119
CHAPITRE 8. Équations différentielles 143
CHAPITRE 9. Variables discrètes 153
CHAPITRE 10. Variables aléatoires à densité 177
CHAPITRE 11. Fonctions de plusieurs variables 195
CHAPITRE 12. Couple de variables discrètes 207
CHAPITRE 13. Convergences, approximations et estimation 231

CHAPITRE 1

ÉTUDE DE FONCTIONS

1.1 Exercices avec préparation

Exercice 1 (Oral HEC 2023)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose : $P_n(x) = \sum_{k=0}^{2n} x^k$.

1. **Cours :** Énoncer le théorème de comparaison pour les séries.
2. Écrire un script Python pour représenter P_{100} sur $[-1, 1]$.
3. Pour $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$, montrer que $P_n'(x) = \dfrac{Q_n(x)}{(x-1)^2}$ avec Q_n à déterminer.
4. Déterminer les variations de P_n. Montrer que P_n admet un minimum en un unique point u_n et que $-1 < u_n < 0$.
5. Compléter ce code pour que le script $u(n)$ donne une approximation de u_n à 10^{-3} près :

```
def Q(n,x):
    return ...
def u(n):
    a, b = ..., ...
    while b-a > ...:
        c = (a+b)/2
        ...
```

6. Déterminer un équivalent simple de $(\ln(2n+1-2nu_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$.
7. En déduire la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
8. Déterminer un équivalent de $(u_n+1)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Indication

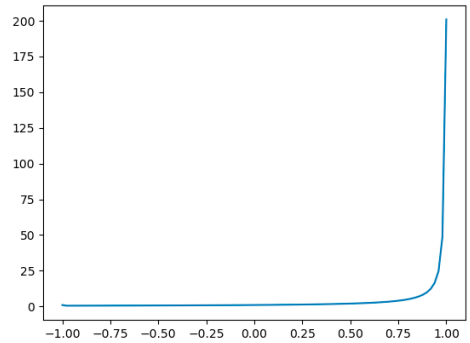
Pour la question 3, reconnaître une somme géométrique. Étudier le signe de Q_n afin d'avoir les variations de P_n. Pour prouver $-1 < u_n < 0$, calculer $Q_n(-1)$. Pour obtenir l'équivalent de la question 6, partez de $-1 < u_n < 0$ afin d'obtenir des bonnes inégalités pour appliquer le théorème des gendarmes et prouver que $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln(2n+1-2nu_n)}{\ln(n)}\right) = 1$.

Solution 1

1. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant v_n$. Le théorème de comparaison affirme que si $\sum v_n$ est convergente alors $\sum u_n$ l'est aussi et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$. Il affirme aussi que si $\sum u_n$ est divergente alors $\sum v_n$ l'est aussi et $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = +\infty$.
2. Voici un script Python permettant de représenter la fonction P_{100} sur $[-1, 1]$:

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
def P(n,x):
    s = 0
    puissancex = 1
    for k in range(0,2*n+1):
        s += puissancex
        puissancex *= x
    return s
abs = np.linspace(-1,1,100)
ord = [P(100,x) for x in abs]
plt.plot(abs,ord)
plt.show()
```

On a obtenu :



3. Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$, on a en reconnaissant une somme géométrique :

$$P_n(x) = \frac{x^{2n+1}-1}{x-1}.$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} P_n'(x) &= \frac{(2n+1)x^{2n}(x-1)-\left(x^{2n+1}-1\right)}{(x-1)^2} \\ &= \frac{Q_n(x)}{(x-1)^2} \text{ avec : } Q_n : x \mapsto 2nx^{2n+1}-(2n+1)x^{2n}+1. \end{aligned}$$

4. P_n comme Q_n sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ par somme. Pour tout réel x, on a :

$$\begin{aligned} Q_n'(x) &= 2n(2n+1)x^{2n}-2n(2n+1)x^{2n-1} \\ &= 2n(2n+1)x^{2n-1}(x-1). \end{aligned}$$

On obtient donc les variations de Q_n puis son signe :

x	$-\infty$	u_n	0		1	$+\infty$
Variations de $Q_n(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	0	↗ $+\infty$
Signe de $Q_n(x)$		$-$	$+$	$+$	$+$	$+$

Q_n est continue et strictement croissante sur $]-\infty, 0]$, elle réalise donc une bijection de $]-\infty, 0]$ sur $\left]\lim\limits_{x\to-\infty}(Q_n(x)), Q_n(0)\right]$, soit $]-\infty, 1]$. Comme $0 \in]-\infty, 1]$, le théorème de la bijection continue assure que Q_n s'annule en un unique point $u_n \in]-\infty, 0]$. Avec la connaissance du signe de Q_n, on a celui de P_n' sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ et les variations globales de P_n puisque P_n est continue. On en déduit que P_n est décroissante sur $]-\infty, u_n]$ et croissante sur $[u_n, +\infty[$. La fonction P_n atteint donc un minimum en un unique point $u_n \in \mathbb{R}$. On résume toutes ces informations dans ce tableau :

x	$-\infty$		u_n		$+\infty$
Variations de $P_n(x)$	$+\infty$	↘	$P_n(u_n)$	↗	$+\infty$

On justifie les limites en $\pm\infty$ grâce à cet équivalent : $P_n(x) \underset{\pm\infty}{\sim} x^{2n}$. Remarquons que $Q_n(-1) = -4n$. On en déduit que $Q_n(-1) < 0 < 1$ et donc $Q_n(-1) < Q_n(u_n) < Q_n(0)$ ce qui entraîne par stricte croissance de Q_n sur $]-\infty, 0]$ les inégalités suivantes :

$$-1 < u_n < 0.$$

5. u_n est l'unique racine de Q_n sur $]-\infty, 0]$. En appliquant l'algorithme de dichotomie, on obtient une approximation de u_n à 10^{-3} près. L'instruction $u(n)$ renverra donc une approximation de u_n à 10^{-3} près si on utilise ce programme :

```
def Q(n, x):
    return 2 * n *x * *(2 *n+1)-(2 *n+1) * x * *(2 * n)+1$

def u(n):
    a, b = -1,0
    while b-a > 2 * 10 * *(-3):
        c = (a+b)/2
        if Q(n,a)*Q(n,c) < 0:
            b=c
        else:
            a=c
    return c
```

6. On a vu en question 4 que : $-1 < u_n < 0$, on en déduit que $2n+1 < 2n+1-2nu_n < 4n+1$ puis, par croissance de ln (en signalant que ces trois nombres sont strictement positifs) et comme $\ln(n) > 0$, on obtient :

$$\frac{\ln(2n+1)}{\ln(n)} < \frac{\ln(2n+1-2nu_n)}{\ln(n)} < \frac{\ln(4n+1)}{\ln(n)}.$$

Comme $\ln(2n+1) = \ln(n) + \ln\left(2+\frac{1}{n}\right)$ et $\ln(4n+1) = \ln(n) + \ln\left(4+\frac{1}{n}\right)$, on en déduit :

$$1 + \frac{\ln\left(2+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} < \frac{\ln(2n+1-2nu_n)}{\ln(n)} < 1 + \frac{\left(4+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}.$$

Par quotient puis somme, on peut affirmer que :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{\ln\left(2+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}\right) = 1 \text{ et } \lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{\ln\left(4+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}\right) = 1.$$

Le théorème des gendarmes entraîne alors que :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln(2n+1-2nu_n)}{\ln(n)}\right) = 1$$

ce qui signifie que : $\ln(2n+1-2nu_n) \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$.

Commentaires

Petit rappel pour prouver que $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, on utilise les opérations possibles (produit, quotient, puissance) en partant de :

- Un polynôme est équivalent en l'infini à son monôme de plus haut degré. Un polynôme équivaut en 0 à son terme de plus bas degré.
- Si α est un réel non nul, si $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) = 0$ alors on sait que : $1-\cos(u_n) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{(u_n)^2}{2}$, $\exp(u_n)-1 \underset{+\infty}{\sim} u_n$, $\ln(1+u_n) \underset{+\infty}{\sim} u_n$, $\sin(u_n) \underset{+\infty}{\sim} u_n$, $\tan(u_n) \underset{+\infty}{\sim} u_n$ et enfin $(1+u_n)^\alpha - 1 \underset{+\infty}{\sim} \alpha u_n$.

On peut aussi tenter de prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right) = 1$ ce qui signifie que $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$. C'est le cas en particulier si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers une même limite non nulle et non infinie.

7. Puisque $Q_n(u_n) = 0$, on trouve que $2nu_n^{2n+1} - (2n+1)u_n^{2n} + 1 = 0$ soit, comme $u_n \neq 0$ car $Q_n(0) \neq 0$, l'égalité suivante :

$$2nu_n^1 - (2n+1)u_n^0 = -\frac{1}{(u_n)^{2n}}$$

ce qui donne $\ln(2n+1-2nu_n) = -2n\ln(-u_n)$ (on signale de nouveau que les quantités intervenant dans ln sont strictement positives). La question précédente nous permet alors d'affirmer que :

$$\ln(-u_n) \sim -\frac{\ln(n)}{2n}.$$

Il vient alors, grâce aux croissances comparées, que $\lim\limits_{n\to+\infty}(\ln(-u_n)) = 0$ et donc, par composition, $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) = -1$.

8. Posons $h_n = u_n + 1$. Remarquons que $-u_n = 1 - h_n$. Ainsi, d'après la question précédente, on en déduit :

$$\ln(1-h_n) \sim -\frac{\ln(n)}{2n}.$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}(h_n) = 0$, donc $h_n \underset{+\infty}{\sim} -\ln(1-h_n)$. Finalement, il reste donc :

$$h_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{2n}.$$

Exercice 2

Soit t un réel positif ou nul fixé. Pour tout réel x, on pose :

$$P_t(x) = x^3 + tx - 1.$$

1. **Cours :** Qu'appelle-t-on *racine* d'un polynôme ? Qu'appelle-t-on *ordre de multiplicité* d'une racine d'un polynôme ?
2. Montrer que le polynôme P_t admet une unique racine réelle $u(t)$.
3. On note $u : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \to \mathbb{R} \\ t & \mapsto u(t) \end{cases}$.
   (a) Montrer que $u(\mathbb{R}_+) \subset]0;1]$.
   (b) Démontrer que la fonction u est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.
   (c) Calculer $\lim\limits_{t\to+\infty}(u(t))$ *(Indication : utiliser l'expression de* $P_t(u(t))$*.)*
   (d) Montrer que l'application u est bijective de $\mathbb{R}_+$ vers $]0;1]$, de réciproque :
   $$v : \begin{cases}]0;1] & \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ y & \longmapsto \dfrac{1-y^3}{y} \end{cases}$$
   (e) Représenter graphiquement grâce au langage `Python` la fonction v sur $]0;1]$. En déduire le tracé de représentation graphique de la fonction u.
   (f) Justifier que la fonction u est continue sur $\mathbb{R}_+$.
   (g) Démontrer que la fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ puis déterminer, pour tout réel positif t, une expression de $u'(t)$ en fonction de t et $u(t)$.

Indication

On joue sur les fonctions réciproques dans cet exercice. Il faut jongler entre le monde des abscisses et celui des images. Pour comparer $u(t)$ et $u(s)$ par exemple, on va comparer $P_t(u(t))$ et $P_t(u(s))$. Pour démontrer des qualités sur u, on va évoquer celle de v.

Solution 2

1. - Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme et $a \in \mathbb{R}$; on dit que a est racine de P si et seulement si $P(a) = 0$.
   - On dit que a est racine d'ordre k de P ($k \in \mathbb{N}^*$) si et seulement si $x \mapsto (x-a)^k$ divise P mais $x \mapsto (x-a)^{k+1}$ ne divise pas P (ce qui signifie qu'il existe un polynôme Q tel que $P(x) = (x-a)^k Q(x)$ pour tout réel x avec $Q(a) \neq 0$).
2. P_t est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (c'est un polynôme) et on a :
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ P_t'(x) = 3x^2 + t$$

et, comme $t \geqslant 0$, pour tout réel non nul x, on a :

$$\begin{aligned} P_t'(x) &\geqslant 3x^2 \\ &> 0. \end{aligned}$$

Comme de plus P_t est continue, on en déduit que P_t est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Rappelons que P_t est continue, on peut alors affirmer, par le théorème de la bijection continue, que P_t réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\left]\lim\limits_{x\to-\infty}(P_t(x)), \lim\limits_{x\to+\infty}(P_t(x))\right[$, soit $\mathbb{R}$ car, comme $P_t(x) \underset{\infty}{\sim} x^3$, on peut affirmer que :

$$\lim_{x\to+\infty}(P_t(x)) = +\infty \text{ et } \lim_{x\to-\infty}(P_t(x)) = -\infty.$$

Le polynôme P_t admet bien une unique racine réelle $u(t)$.

Commentaires

On cherchait ici à prouver qu'une équation a des solutions. Voici trois idées pour réaliser cette tâche :

- **On la résout :** C'est la base et à essayer avant la suite. C'est jouable a priori si c'est une équation du second degré ou une équation faisant intervenir une fonction qu'on peut détruire grâce à des réciproques (ln et exp, $\sqrt{\cdot}$ et $x \mapsto x^2$...)
- **Théorème des valeurs intermédiaires :** On réécrit notre équation sous la forme $f(x) = 0$, on prouve la continuité de f, on cherche deux réels a et b tels que $f(a)$ et $f(b)$ soient de signes opposés. On pourra alors conclure que notre équation a au moins une solution (mais on ne sait pas le nombre de solutions).
- **Théorème de la bijection continue :** On écrit notre équation sous la forme $f(x) = 0$, prouve la continuité et la stricte monotonie de f, explicite l'image de f et on note si 0 appartient (une et une seule solution) ou non (aucune solution) à l'image de f.

3.(a) On a $P_t(0) = -1$, $P_t(u(t)) = 0$ et $P_t(1) = t$ donc :

$$P_t(0) < P_t(u(t)) \leqslant P_t(1)$$

On en déduit, par stricte croissance de P_t, que $0 < u(t) \leqslant 1$ ce qui est le résultat qu'on souhaitait établir.

(b) Soient t et s deux réels strictement positifs tels que $t < s$. On a :

$$\begin{aligned} P_t(u(s)) &= (u(s))^3 + tu(s) - 1 \\ &= (t-s)u(s) \text{ car } (u(s))^3 + su(s) - 1 = 0 \text{ car } P_s(u(s)) = 0 \end{aligned}$$

Or $u(s) > 0$ (d'après la question précédente), donc $P_t(u(s)) < 0$. Or $P_t(u(t)) = 0$, on a donc :

$$P_t(u(s)) < P_t(u(t)).$$

Par stricte croissance de P_t, on en déduit que $u(s) < u(t)$. La fonction u est donc strictement décroissante.

(c) La fonction u est décroissante (d'après la question précédente) sur $\mathbb{R}^+$, elle est minorée (par 0 par exemple puisque $u(\mathbb{R}_+) \subset]0;1]$), elle admet donc une limite ℓ en $+\infty$ d'après le théorème de la limite monotone et on peut affirmer que ℓ appartient à $[0,1]$. On a :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ (u(t))^3 - 1 = -t \times u(t).$$

Si $\ell \neq 0$, alors $\lim\limits_{t\to+\infty} (-t \times u(t)) = -\infty$, donc $\lim\limits_{t\to+\infty} \left((u(t))^3 - 1\right) = -\infty$. Or, par somme, $\lim\limits_{t\to+\infty} \left((u(t))^3 - 1\right)$ est $\ell^3 - 1$, c'est donc (par unicité de la limite) absurde, cela prouve donc que $\ell = 0$.

(d) Soit y un élément de $]0,1]$. Posons $t = v(y)$, on a :

$$\begin{aligned} P_{v(y)}(y) &= y^3 + v(y) \times y - 1 \\ &= y^3 + \frac{1-y^3}{y} \times y - 1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Or $P_{v(y)}$ a un unique zéro, c'est $u(v(y))$. On en déduit que $u(v(y)) = y$. Tout y de $]0,1]$ admet donc $v(y)$ pour antécédent par u, u est donc surjective. Étant injective (car strictement décroissante) et surjective, u est bijective de $\mathbb{R}^+$ vers $]0,1]$. De $u(v(y)) = y$ vérifiée pour tout y de $]0,1]$, on peut alors déduire que u est bijective de $\mathbb{R}_+$ vers $]0;1]$ et v est sa réciproque.

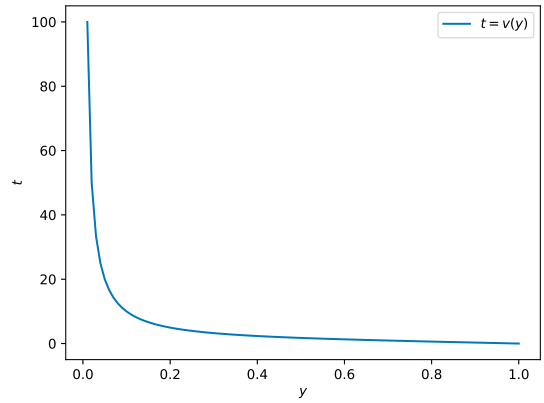
(e) Comme v est l'application $\begin{cases}]0;1] & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ y & \longmapsto & \dfrac{1-y^3}{y} \end{cases}$, il est aisé de la représenter graphiquement. Pour représenter u, qui est la réciproque de v, on peut faire la symétrie par rapport à la première bissectrice. On peut aussi le faire en Python en passant de `plot(t,y)` dans le programme à `plot(y,t)`. On propose donc le programme suivant :

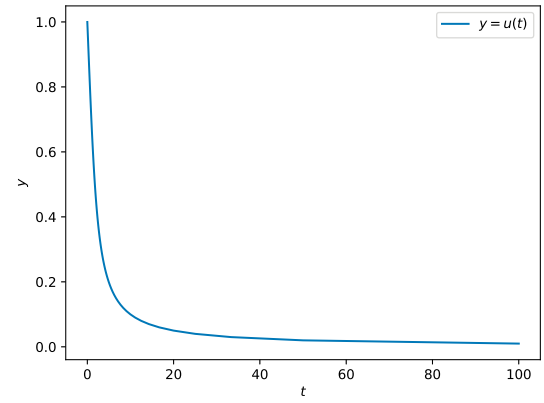
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def v(y):
    return 1/y-y**2

y=np.linspace(0.01,1,100)
t=v(y)
plt.subplots()
plt.xlabel('$y$');plt.ylabel('$t$')
plt.plot(y,t,label=r'$t=v(y)$')
plt.legend()
plt.subplots()
plt.ylabel('$y$');plt.xlabel('$t$')
plt.plot(t,y,label=r'$y=u(t)$')
plt.legend()
```

On a obtenu :





(f) Par quotient, la fonction v est continue et strictement décroissante sur $]0,1]$. Par le théorème de la bijection continue, on peut affirmer que, la fonction u, en tant que réciproque de v, est bien continue sur $\mathbb{R}_+$.

(g) Par quotient, la fonction v est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1]$ et, pour tout y dans $]0,1]$, on a :

$$\begin{aligned} v'(y) &= \frac{-3y^3 - (1-y^3)}{y^2} \\ &= \frac{-2y^3 - 1}{y^2} \end{aligned}$$

La dérivée de v ne s'annulant pas, on sait, d'après le cours, que la fonction u est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $v(]0,1])$, i.e. sur $\mathbb{R}^+$. Or, pour tout réel positif t, on a :

$$u(t)^3 + t \times u(t) - 1 = 0,$$

cela donne alors :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ (3(u(t))^2 + t) \times u'(t) + u(t) = 0$$

soit, pour tout réel positif t, puisque $3(u(t))^2 + t \neq 0$, l'égalité suivante :

$$u'(t) = -\frac{u(t)}{3(u(t))^2 + t}.$$

Exercice 3

1. **Cours :** Donner la définition d'une valeur propre ainsi que d'un sous-espace propre pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Soient n un entier supérieur à 2 et (E_n) l'équation suivante d'inconnue x réel strictement positif :

$$(E_n) :\ f(x) = \frac{1}{n} \text{ avec } f : x \mapsto \frac{\ln^2(x)}{x},$$

   (a) Dresser le tableau de variations de f sur $[1, +\infty[$.
   (b) Démontrer que l'équation (E_n) admet deux solutions, que l'on notera α_n et β_n, telles que : $1 \leqslant \alpha_n \leqslant e^2 \leqslant \beta_n$.
3. À l'aide de l'outil informatique, représenter sur un même graphe la courbe représentative de f ainsi que les droites D_i, $1 \leqslant i \leqslant 6$, où D_i a pour équation $y = \frac{1}{i}$, pour $i \in [\![1, 6]\!]$. Quelles conjectures peut-on émettre sur le sens de variations et les limites de $(\alpha_n)_{n\geqslant 2}$ et $(\beta_n)_{n\geqslant 2}$?
4. (a) Démontrer que la suite $(\beta_n)_{n\geqslant 2}$ est strictement monotone.
   (b) Montrer que la suite $(\beta_n)_{n\geqslant 2}$ admet une limite que l'on précisera.
   (c) Soit la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ définie par $u_n = \frac{\beta_n}{n}$. Prouver que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln^2(n)$ en admettant que $\ln(u_n) = \underset{n\to+\infty}{o}(\ln(n))$.
   (d) En déduire un équivalent de $(\beta_n)_{n\geqslant 2}$.
5. (a) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 2}$ admet une limite que l'on précisera.
   (b) Donner un équivalent de $(\alpha_n - 1)_{n\geqslant 2}$. Comment pourrait-on vérifier ce résultat avec l'outil informatique ?

Indication

Pensez à utiliser le théorème de la bijection continue dans la question 2. Dans les questions 3 et 4, appuyez-vous sur le tableau de variations. Pour comparer β_n et β_{n+1}, comparez avant $f(\beta_n)$ et $f(\beta_{n+1})$. Même astuce avec α_n et α_{n+1}. Pour toutes les histoires d'équivalents, souvenez vous que $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$ signifie que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = 1$.

Solution 3

1. Soit λ un réel.
   - On dit que λ est valeur propre de A lorsqu'il existe une matrice colonne X non nulle qui vérifie $AX = \lambda X$.
   - Le sous-espace propre de A associé à λ est l'ensemble : $\mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)$, c'est donc $\{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ tel que } AX = \lambda X\}$.

2. (a) f est dérivable sur $[1;+\infty[$ par quotient car, pour tout x de $[1;+\infty[$, on a $x > 0$ et $x \neq 0$. Pour tout x de $[1;+\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{\ln(x)(2-\ln(x))}{x^2}.$$

Si $x \in]1;+\infty[$, $\ln(x) > 0$ d'où :

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\iff 2 - \ln(x) > 0 \\ &\iff x < e^2. \end{aligned}$$

Pour compléter le tableau de variations de f, on note que $f(1) = 0$, $f(e^2) = 4e^{-2}$ donc $f(e^2) \approx 0,54$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)) = 0$ par croissances comparées. D'où le tableau de variations de f :

x	1		e^2		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
f	0	↗	$4e^{-2}$	↘	0

(b)
- f étant continue et strictement croissante sur $[1, e^2]$, elle réalise, d'après le théorème de la bijection continue, une bijection de l'intervalle $[1, e^2]$ sur l'intervalle $[f(1), f(e^2)]$, soit $[0, 4e^{-2}]$. Comme $\dfrac{1}{n} \in [0, 4e^{-2}]$ car $4e^{-2} \approx 0,54$ et $\dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{1}{2}$, il existe un unique réel $\alpha_n \in [1, e^2]$ tel que $f(\alpha_n) = \dfrac{1}{n}$.
- De même, f étant continue et strictement décroissante sur $[e^2, +\infty[$, elle réalise une bijection de $[e^2, +\infty[$ sur $]\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)), f(e^2)]$, soit $]0, 4e^{-2}]$: il existe donc un unique réel $\beta_n \in [e^2, +\infty[$ tel que $f(\beta_n) = \dfrac{1}{n}$.

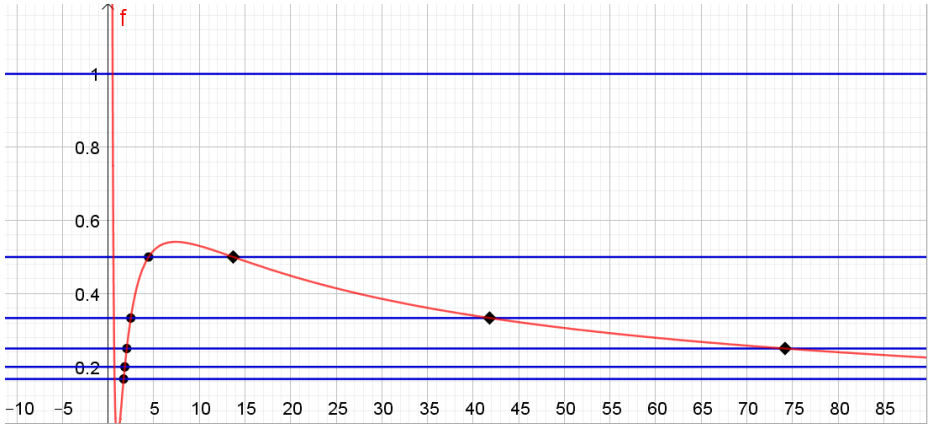
Ainsi l'équation (E_n) admet deux solutions α_n et β_n, et elles vérifient :

$$1 \leqslant \alpha_n \leqslant e^2 \leqslant \beta_n.$$

Commentaires

On remarque que $f \leqslant 4e^{-2}$ d'après la question précédente. Comme $4e^{-2} < 1$, on en déduit que pour tout réel strictement positif, $f(x) \neq 1$, l'équation (E_1) n'admet donc pas de solution.

3. Voici les courbes représentatives de f et des droites D_i d'équation $y = \frac{1}{i}$ avec $i \in [\![1, 6]\!]$:



On a utilisé le programme suivant :

```
import math as m
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def f1(x):
    return(m.log(x)**2/x)

def trace():
    x=np.linspace(1,100,100000)
    y=[f1(t) for t in x]
    plt.plot(x, y)
    for i in range(1,7):
        z=[1/i for t in x]
        plt.plot(x, z)
    plt.show()
```

Au vu du graphique, on peut penser que $(\alpha_n)_{n\geqslant 2}$ (les points) décroît et converge vers 1, $(\beta_n)_{n\geqslant 2}$ (les losanges) croît et tend vers $+\infty$.

4. (a) Par définition, $(\beta_n, \beta_{n+1}) \in [e^2, +\infty[^2$ et vérifient :

$$f(\beta_{n+1}) < f(\beta_n)$$

car $f(\beta_n) = \frac{1}{n}$ et $f(\beta_{n+1}) = \frac{1}{n+1}$. Or f est strictement décroissante sur $[e^2, +\infty[$ donc $\beta_n < \beta_{n+1}$ La suite $(\beta_n)_{n\geqslant 2}$ est bien strictement croissante.

(b) Par l'absurde, supposons que la suite $(\beta_n)_{n\geqslant 2}$ converge. Notons ℓ sa limite, on peut affirmer que $\ell \geqslant e^2$ car, pour tout entier n supérieur à 2, $\beta_n \geqslant e^2$ et on invoque le passage à la limite dans les inégalités. Comme f est continue sur $[e^2, +\infty[$, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(f(\beta_n)) = f(\ell)$. Or, pour tout entier n supérieur à 2, $f(\beta_n) = \frac{1}{n}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(f(\beta_n)) = 0$. On en déduit que $f(\ell) = 0$ ce qui est absurde

car la fonction f ne s'annule pas sur $[e^2, +\infty[$ d'après son tableau de variations. On en déduit que $(\beta_n)_{n\geqslant 2}$ diverge et comme cette suite est croissante, on conclut que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}(\beta_n) = +\infty}.$$

(c) Soit n un entier supérieur à 2. On sait que $u_n = \dfrac{\beta_n}{n}$, on a donc :

$$\begin{aligned}\frac{\ln(u_n)}{\ln(n)} &= \frac{\ln(\beta_n) - \ln(n)}{\ln(n)}\\ &= \frac{\ln(\beta_n)}{\ln(n)} - 1.\end{aligned}$$

D'après l'énoncé, $\ln(u_n) = \underset{n\to+\infty}{o}(\ln(n))$ i.e. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{\ln(u_n)}{\ln(n)}\right) = 0$ soit :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln(\beta_n)}{\ln(n)} - 1\right) = 0.$$

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{\ln(\beta_n)}{\ln(n)}\right) = 1$ autrement dit $\ln(\beta_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.
Par ailleurs $f(\beta_n) = \dfrac{1}{n}$, i.e. $\dfrac{\ln^2(\beta_n)}{\beta_n} = \dfrac{1}{n}$ donc $u_n = \ln^2(\beta_n)$.
Comme on a montré que $\ln(\beta_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$, on conclut que

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln^2(n).$$

(d) Comme $\beta_n = nu_n$, on en déduit que : $\beta_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln^2(n)$.

5.(a) $(\alpha_n, \alpha_{n+1}) \in [1, e^2]^2$ et vérifient $f(\alpha_n) > f(\alpha_{n+1})$ car $\dfrac{1}{n} > \dfrac{1}{n+1}$. Or f est strictement croissante sur $[1, e^2]$ donc $\alpha_{n+1} < \alpha_n$. La suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 2}$ est donc strictement décroissante. $(\alpha_n)_{n\geqslant 2}$ étant de plus minorée par 1, elle converge vers une limite ℓ, $\ell \in [1, e^2]$ car, pour tout entier n supérieur à 2, $\alpha_n \in [1, e^2]$ et par passage à la limite dans les inégalités.

Commentaires

Attention, on ne peut pas passer automatiquement de $u_n \geqslant v_n$ à $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) \geqslant \lim\limits_{n\to+\infty}(v_n)$ en invoquant le passage à la limite dans les inégalités. Il faut absolument prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n)$ existent et sont finies avant!

f étant continue sur $[1, e^2]$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}(f(\alpha_n)) = f(\ell)$ soit $f(\ell) = 0$ car $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n}\right) = 0$. Comme f ne s'annule qu'en 1 sur $[1, e^2]$, on peut affirmer que $\ell = 1$. En conclusion, $(\alpha_n)_{n\geqslant 2}$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty}(\alpha_n) = 1$.

(b) $\ln(x) \underset{x\to 1}{\sim} x-1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(\alpha_n)=1$ donc $\ln(\alpha_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha_n - 1$.
Par ailleurs, $f(\alpha_n)=\dfrac{1}{n}$ donc $\ln^2(\alpha_n)=\dfrac{\alpha_n}{n}$ donc $\ln^2(\alpha_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$ car $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\to} 1$.
On en déduit que $\ln(\alpha_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ puis, comme $\ln(\alpha_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha_n - 1$, cet équivalent :

$$\alpha_n - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Pour vérifier ce résultat avec l'outil informatique, on peut utiliser l'algorithme de Newton ou de dichotomie pour calculer une valeur approchée de α_n solution de l'équation $f(x)-\dfrac{1}{n}=0$ sur $[1,e^2]$, puis on vérifie que, pour n suffisamment grand, $\sqrt{n}(\alpha_n-1)$ est proche de 1.

1.2 Exercices sans préparation

Exercice 4 (Oral HEC 2016)

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, soit f_n la fonction définie sur l'intervalle $[0,1]$ par :

$$\forall x\in[0,1],\ f_n(x)=\int_0^x e^{nt^2}\,dt-\int_x^1 e^{-nt^2}\,dt.$$

1. Montrer que la fonction f_n est strictement monotone sur $[0,1]$.
2. Établir l'existence d'un unique réel de $[0,1]$, noté c_n, tel que :
$$\int_0^{c_n} e^{nt^2}\,dt=\int_{c_n}^1 e^{-nt^2}\,dt.$$
3. Montrer que la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Indication

Il faut dériver f_n pour s'en sortir. On vous rappelle que si $g(x)=\displaystyle\int_0^x h(t)dt$ et si $k(x)=\displaystyle\int_x^0 h(t)dt$ alors $g'(x)=h(x)$ et $k'(x)=-h(x)$. Après, c'est du classique théorème de la bijection continue.

Solution 4

1. Comme les intégrandes sont ici continues, le théorème fondamental du calcul intégral permet de dire que f_n est dérivable et, pour tout x de $[0,1]$, on a :
$$f_n'(x)=e^{nx^2}+e^{-nx^2}$$

donc, par somme, $f_n' > 0$, on peut donc affirmer que f_n est strictement croissante sur $[0,1]$.

2. La fonction f_n continue et strictement croissante sur $[0,1]$, elle réalise donc, d'après le théorème de la bijection continue, une bijection de $[0,1]$ sur $[f_n(0), f_n(1)]$. Comme $f_n(0) = -\int_0^1 e^{-nt^2}\,dt$ et $f_n(1) = \int_0^1 e^{nt^2}$, par positivité de l'intégration (invocable car les intégrandes sont continues et positives et les bornes sont dans le sens croissant), on peut affirmer que :

$$f_n(0) \leqslant 0 \text{ et } 0 \leqslant f_n(1).$$

On peut donc conclure que l'équation $f_n(x) = 0$ d'inconnue $x \in [0,1]$ admet une unique solution c_n, cela veut précisément dire qu'il existe un unique réel c_n de $[0,1]$ tel que :

$$\int_0^{c_n} e^{nt^2}\,dt = \int_{c_n}^1 e^{-nt^2}\,dt.$$

3. Par croissance de la fonction exponentielle, on peut affirmer que pour tout t de $[0,1]$, on a :

$$e^{(n+1)t^2} \geqslant e^{nt^2} \text{ et } -e^{-(n+1)t^2} \geqslant -e^{-nt^2}$$

ce qui donne par croissance de l'intégration (invocable par continuité des intégrandes et car les bornes sont dans le sens croissant car $c_n \geqslant 0$) les inégalités suivantes :

$$\int_0^{c_n} e^{(n+1)t^2}\,dt \geqslant \int_0^{c_n} e^{nt^2}\,dt \text{ et } \int_0^{c_n} -e^{-(n+1)t^2}\,dt \geqslant \int_0^{c_n} -e^{-nt^2}\,dt$$

et donc, par somme, l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} f_{n+1}(c_n) &\geqslant \int_0^{c_n} e^{nt^2}\,dt - \int_{c_n}^1 e^{-nt^2}\,dt \\ &\geqslant 0 \end{aligned}$$

que l'on traduit en $f_{n+1}(c_n) \geqslant f_{n+1}(c_{n+1})$. Puisque f_{n+1} est strictement croissante sur $[0,1]$, on a : $c_n \geqslant c_{n+1}$. La suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et, d'après la question précédente, minorée (par 0), elle est donc convergente d'après le théorème de la limite monotone.

Exercice 5

Pour tout réel x, on pose : $\text{th}\,(x) = \dfrac{\exp(x) - \exp(-x)}{\exp(x) + \exp(-x)}$.

1. Montrer que la fonction th est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$. On note Argth sa bijection réciproque.
2. Calculer Argth (0) et Argth $\left(\dfrac{1}{3}\right)$.
3. On admet que Argth est dérivable sur $]-1,1[$ et que, pour tout y de $]-1,1[$, on a :
$$\text{Argth}\,'(y) = \frac{1}{\text{th}\,'(\text{Argth}\,(y))}.$$
Simplifier l'expression de Argth $'$.
4. Soit la fonction f suivante : $f : x \mapsto \text{Argth}\left(\dfrac{1+3\text{th}\,(x)}{3+\text{th}\,(x)}\right)$. Déterminer le domaine de définition D_f de f, montrer que f est dérivable et expliciter f'.
5. Trouver deux réels a et b tels que $f : x \mapsto ax + b$.

Indication

Au début, c'est de nouveau le théorème de la bijection continue. Dans la quatrième question, vous allez obtenir un résultat particulièrement simple qui expliquera la dernière question.

Solution 5

1. Par quotient ($\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) + \exp(-x) > 0$ donc $\exp(x) + \exp(-x) \neq 0$), th est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, on a :
$$\begin{aligned}\text{th}\,'(x) &= \frac{(\exp(x)+\exp(-x))^2 - (\exp(x)-\exp(-x))^2}{(\exp(x)+\exp(-x))^2} \\ &= \frac{4}{(\exp(x)+\exp(-x))^2}.\end{aligned}$$
On en déduit que th $' > 0$. th est donc strictement croissante. Or th est continue donc, par le théorème de la bijection continue, th réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\left]\lim\limits_{x\to-\infty}(\text{th}\,(x)), \lim\limits_{x\to+\infty}(\text{th}\,(x))\right[$, soit $]-1,1[$ car :
$$\begin{aligned}\text{th}\,(x) &\underset{+\infty}{\sim} \frac{\exp(x)}{\exp(x)} \\ &\underset{+\infty}{\sim} 1.\end{aligned}$$
De plus, th est impaire donc $\lim\limits_{x\to-\infty}(\text{th}\,(x)) = -\lim\limits_{x\to+\infty}(\text{th}\,(x))$.

2. • $\text{th}\,(0) = 0$ donne $\text{Argth}\,(0) = 0$.
   • Pour tout réel x, on a :

$$\begin{aligned} x = \text{Argth}\left(\frac{1}{3}\right) &\iff \frac{1}{3} = \text{th}\,(x) \\ &\iff 3(\exp(x) - \exp(-x)) = \exp(x) + \exp(-x) \\ &\iff 3(\exp(2x) - 1) = \exp(2x) + 1 \\ &\iff \exp(2x) = 2 \\ &\iff x = \ln(\sqrt{2}). \end{aligned}$$

   On en déduit que $\text{Argth}\left(\frac{1}{3}\right) = \ln(\sqrt{2})$.

3. Pour tout réel x, on a :

$$\begin{aligned} 1 - \text{th}^{\,2}(x) &= \frac{(\exp(x) + \exp(-x))^2 - (\exp(x) - \exp(-x))^2}{(\exp(x) + \exp(-x))^2} \\ &= \frac{\exp(2x) + \exp(-2x) + 2 - \exp(2x) - \exp(-2x) + 2}{(\exp(x) + \exp(-x))^2} \\ &= \frac{4}{(\exp(x) + \exp(-x))^2} \\ &= \text{th}\,'(x). \end{aligned}$$

   On en déduit donc que, pour tout y de $]-1,1[$, on a :

$$\begin{aligned} \text{Argth}\,'(y) &= \frac{1}{\text{th}\,'(\text{Argth}\,(y))} \\ &= \frac{1}{1 - \text{th}^{\,2}(\text{Argth}\,(y))} \\ &= \frac{1}{1 - y^2}. \end{aligned}$$

4. Argth est définie sur $]-1,1[$, on en déduit que par quotient et composition, pour tout réel x, on a :

$$\begin{aligned} f(x) \text{ est définie} &\iff \begin{cases} 3 + \text{th}\,(x) & \neq 0 \\ -1 < \dfrac{1 + 3\text{th}\,(x)}{3 + \text{th}\,(x)} & < 1 \end{cases} \\ &\iff -1 < \frac{1 + 3\text{th}\,(x)}{3 + \text{th}\,(x)} < 1 \text{ car } \text{th}\,(x) \in]-1,1[\text{ donc } 3 + \text{th}\,(x) \neq 0 \\ &\iff -3 - \text{th}\,(x) < 1 + 3\text{th}\,(x) < 3 + \text{th}\,(x) \text{ car } 3 + \text{th}\,(x) > 0 \\ &\iff \begin{cases} -4 & < 4\text{th}\,(x) \\ 2\text{th}\,(x) & < 2 \end{cases} \\ &\iff -1 < \text{th}\,(x) < 1. \end{aligned}$$

   Or, pour tout réel x, on a $\text{th}\,(x) \in]-1,1[$. D'après cette démonstration, f est définie sur $\mathbb{R}$. On a vu que Argth est dérivable sur $]-1,1[$. Par composition, f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

5. Pour tout réel x, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \text{Argth}\,'\left(\frac{1+3\text{th}\,(x)}{3+\text{th}\,(x)}\right) \times \frac{3\text{th}\,'(x)(3+\text{th}\,(x)) - \text{th}\,'(x)(1+3\text{th}\,(x))}{(3+\text{th}\,(x))^2} \\ &= \text{Argth}\,'\left(\frac{1+3\text{th}\,(x)}{3+\text{th}\,(x)}\right) \times \frac{8\text{th}\,'(x)}{(3+\text{th}\,(x))^2}. \end{aligned}$$

On a vu que, pour tout y de $]-1,1[$, on a :

$$\text{Argth}\,'(y) = \frac{1}{1-y^2}.$$

On peut alors terminer notre calcul de dérivée. Pour tout réel x, on a alors :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \text{Argth}\,'\left(\frac{1+3\text{th}\,(x)}{3+\text{th}\,(x)}\right) \times \frac{8\text{th}\,'(x)}{(3+\text{th}\,(x))^2} \\ &= \frac{1}{1-\left(\frac{1+3\text{th}\,(x)}{3+\text{th}\,(x)}\right)^2} \times \frac{8(1-\text{th}\,^2(x))}{(3+\text{th}\,(x))^2} \\ &= \frac{8(1-\text{th}\,^2(x))}{(3+\text{th}\,(x))^2-(1+3\text{th}\,(x))^2} \\ &= \frac{8-8\text{th}\,^2(x)}{9+6\text{th}\,(x)+\text{th}\,^2(x)-1-6\text{th}\,(x)-9\text{th}\,^2(x)} \\ &= \frac{8-8\text{th}\,^2(x)}{8-8\text{th}\,^2(x)} \\ &= 1. \end{aligned}$$

f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' : x \mapsto 1$. On déduit des calculs précédents qu'il existe un réel a tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x + a.$$

De $f(0) = \text{Argth}\left(\frac{1}{3}\right)$, soit $f(0) = \ln(\sqrt{2})$, on déduit que, pour tout réel x, on a :

$$f(x) = x + \ln(\sqrt{2}).$$

Commentaires

Pour comprendre $\text{Argth}\,'(y) = \dfrac{1}{\text{th}\,'(\text{Argth}\,(y))}$ et le domaine de dérivabilité de Argth , prenons une fonction f dérivable sur I et bijective sur I. Pour trouver l'ensemble sur lequel f^{-1} est dérivable, il faut d'abord chercher la partie J de I sur laquelle f' ne s'annule pas et en prendre l'image par f (forcément, l'ensemble de dérivabilité de f^{-1} est une partie de l'ensemble de définition de f^{-1} donc une partie de l'ensemble d'arrivée de f). f^{-1} est dérivable sur $f(J)$. D'autre part, $\forall x \in f(J)$, on a : $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$. Pour retrouver cette formule, partez de l'égalité évidente $f^{-1} \circ f = id$ que vous dérivez comme une composée :

$$((f^{-1})' \circ f) \times f' = 1$$

ce qui donne, si $f'(x) \neq 0$, l'égalité $(f^{-1})'(f(x)) = \dfrac{1}{f'(x)}$ puis celle voulue en posant $y = f(x)$ (soit $x = f^{-1}(y)$).

Exercice 6

Soit n un entier naturel non nul. Pour tout réel x, on pose :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor \frac{x+k}{n} \right\rfloor \quad \text{et} \quad g(x) = f(x) - \lfloor x \rfloor .$$

1. Démontrer que, pour tout réel x, pour tout entier m, on a :
$$\lfloor x + m \rfloor = \lfloor x \rfloor + m.$$
2. Démontrer que, pour tout réel x, $f(x+1) - f(x) = 1$.
3. Que peut-on en déduire pour g ?
4. En déduire que : $f : x \mapsto \lfloor x \rfloor$.
5. En déduire que, pour tout entier m, on a : $\left\lfloor \dfrac{m}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \dfrac{m+1}{2} \right\rfloor = m.$

Indication

Rappelons que $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x. Pensez à bien réinvestir les questions, la question 2 donne la réponse à la question 3 puis celle-ci donne la réponse de la question 4. Pour la question 4, commencez par calculer $g(x)$ pour x dans $[0, 1[$ puis utilisez la propriété découverte dans la question 3.

Solution 6

1. Soient x un réel et m un entier.

Commentaires

On rappelle que $\lfloor x \rfloor$ est le plus grand entier plus petit que x, c'est comme ça qu'on le calcule. Attention, $\lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$ et $\lfloor x \times y \rfloor = \lfloor x \rfloor \times \lfloor y \rfloor$ sont des propriétés fausses en général. Avancez avec prudence!

   (a) Comme $\lfloor x \rfloor \leqslant x$, on a bien $\lfloor x \rfloor + m \leqslant x + m$.

   (b) Soit p un entier tel que $p \leqslant x + m$. Dans ce cas $p - m \leqslant x$. Or $p - m$ est un entier, on en déduit, d'après les propriétés de $\lfloor x \rfloor$, que :

$$p - m \leqslant \lfloor x \rfloor$$

   ce qui implique $p \leqslant \lfloor x \rfloor + m$.

   De plus, par somme, $\lfloor x \rfloor + m$ est un entier. $\lfloor x \rfloor + m$ est donc le plus grand entier plus petit que $x + m$, ce qui signifie que $\lfloor x + m \rfloor = \lfloor x \rfloor + m$.

2. D'après la définition de f, on a :

$$\begin{aligned} f(x+1) - f(x) &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor \frac{x+1+k}{n} \right\rfloor\right) - \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor \frac{x+k}{n} \right\rfloor \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n} \left\lfloor \frac{x+k}{n} \right\rfloor\right) - \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor \frac{x+k}{n} \right\rfloor \text{ par changement d'indice} \\ &= \left\lfloor \frac{x+n}{n} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x+0}{n} \right\rfloor \text{ par télescopage} \\ &= \left\lfloor \frac{x}{n} + 1 \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor \\ &= \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor + 1 - \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor \text{ d'après la question précédente} \\ &= 1. \end{aligned}$$

3. On en déduit :

$$\begin{aligned} g(x+1) &= f(x) + 1 - \lfloor x+1 \rfloor \\ &= f(x) + 1 - \lfloor x \rfloor - 1 \text{ d'après la première question} \\ &= g(x). \end{aligned}$$

   g est donc une fonction périodique de période 1.

4. Soit x un élément de $[0;1[$. Pour tout k de $[\![0, n-1]\!]$, on a : $0 \leqslant x + k < n$ et donc $0 \leqslant \dfrac{x+k}{n} < 1$. Ainsi, pour tout k de $[\![0, n-1]\!]$, on a :

$$\left\lfloor \frac{x+k}{n} \right\rfloor = 0$$