MPSI
MP2I

MATHS

36 semaines pour réviser et approfondir son cours

- 243 exercices corrigés
- 17 problèmes corrigés

ellipses

Cédric Thomas

MPSI
MP2I

MATHS

36 semaines pour réviser et approfondir son cours

Cédric Thomas

Professeur agrégé de mathématiques

ellipses

Du même auteur aux éditions Ellipses

Maths Spé, Première, 14 sujets-type corrigés de l'épreuve anticipée du Bac, Annales 2026, 2e édition, 2026.

Maths Techno, Première, 10 sujets-type corrigés de l'épreuve anticipée du Bac, 2026.

Maths Tronc commun, Première, 10 sujets-type corrigés de l'épreuve anticipée du Bac, 2025.

ISBN 9782340-117969

Dépôt légal : août 2026

©Ellipses Édition Marketing S.A.
8/10 rue la Quintinie 75015 Paris

DANGER LE PHOTOCOPILLAGE TUE LE LIVRE

Le Code de la propriété intellectuelle et artistique n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article L. 122-5, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite » (alinéa 1er de l'article L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

A ma femme,
A mes enfants,
A mes parents.

Selon que notre idée est plus ou moins obscure,
L'expression la suit, ou moins nette, ou plus pure.
Ce que l'on conçoit bien s'énonce clairement,
Et les mots pour le dire arrivent aisément.

Hâtez-vous lentement ; et, sans perdre courage,
Vingt fois sur le métier remettez votre ouvrage :
Polissez-le sans cesse et le repolissez ;
Ajoutez quelquefois, et souvent effacez.

A tous les professeurs
Qui m'ont ouvert l'esprit aux mathématiques.
Et à tous ceux qui aujourd'hui
Poursuivent leur œuvre, résistent.

Avant-propos

Cet ouvrage a été conçu pour être un **compagnon** de l'étudiant de première année de classe préparatoire.

Sa **structure chronologique**, fondée sur une progression classique, permet aussi bien :

- un **accompagnement quotidien et différencié** semaine/week-end ;
- un accompagnement pendant les vacances scolaires pour les **révisions** des notions étudiées lors de la période précédente ;
- un accompagnement pour un travail de **consolidation** des notions de première année avant l'entrée en deuxième année.

Ce livre comprend **243 exercices** (parfois regroupés) et **17 problèmes**. Ces exercices et ces problèmes bénéficient dans leur totalité de **corrigés très détaillés et illustrés** de représentations graphiques lorsque le sujet s'y prête.

Les exercices sont de longueur et de difficulté variées. Ils abordent **l'ensemble des savoir-faire** utiles et nécessaires à la réussite en première année. Leur résolution fait aussi bien appel à des méthodes classiques qu'à des prises d'initiative plus originales.
L'aspect technique, qui est essentiel en mathématiques et qui pose problème à de nombreux étudiants, n'est pas oublié. Une bonne habileté calculatoire est en effet un **atout précieux** et j'ai pour habitude de dire qu'on ne s'entraîne jamais trop à calculer. Et personne ne contestera qu'en tout état de cause, on ne calcule jamais trop bien.

Les 17 problèmes nécessitent un temps de recherche plus long. Ils balayent les grandes notions de première année et constituent un **entraînement** idéal pour les **devoirs surveillés** et les épreuves de concours.

Le contenu de cet ouvrage est fondé sur le programme officiel de **MPSI/MP2I** et c'est d'abord aux étudiants de cette filière qu'il s'adresse.
Je le pense également capable de rendre de fiers services aux étudiants de toute filière contenant une solide composante mathématique, en classes préparatoires comme à l'université (**PCSI, BCPST, L1/L2 etc...**)
Il peut enfin constituer une intéressante source d'entraînement pour les étudiants préparant le **CAPES** ou l'**Agrégation** de mathématiques.

Malgré le soin apporté à la réalisation de ce livre, des coquilles voire des erreurs peuvent subsister. Le lecteur pourra s'il le souhaite m'adresser directement toute correction, et plus généralement tout commentaire à l'adresse électronique : thomasprofmaths@gmail.com.

Je remercie enfin Jonathan Etrog et Rémi Chmura pour la relecture de certains chapitres de ce livre.

Table des matières

Index des notations et abréviations 7
Index des problèmes 8

Semaine	*Chapitre*	*Énoncés*	*Corrigés*
1	**Calcul algébrique**	9	12
2	**Logique et raisonnements**	21	23
3	**Ensembles et applications**	33	35
4	**Relations binaires**	45	48
5	**Rappels et compléments sur les fonctions**	55	57
6	**Fonctions usuelles**	65	67
7	**Nombres complexes**	75	77
8	**Compléments sur les réels**	87	89
9	**Suites numériques**	95	98
10	**Primitives et changement de variable**	107	111
11	**Équations différentielles linéaires**	125	127
12	**Structures algébriques usuelles**	143	146
13	**Arithmétique dans $\mathbb{Z}$**	155	158
14	**Polynômes**	169	171
15	**Arithmétique des polynômes**	179	183
16	**Fractions rationnelles**	197	199
17	**Matrices et systèmes linéaires**	211	213
18	**Limites et continuité**	221	224
19	**Dérivabilité**	237	240
20	**Fonctions convexes**	251	253
21	**Analyse asymptotique de niveau 1**	261	264
22	**Espaces vectoriels (sans la notion de dimension)**	273	276

23	**Applications linéaires (sans la notion de dimension)**	287	291
24	**Espaces vectoriels ayant une partie génératrice finie**	307	310
25	**Matrices et applications linéaires**	323	327
26	**Intégration**	341	344
27	**Séries numériques**	353	356
28	**Développements limités et développements asymptotiques**	365	368
29	**Groupes symétriques**	377	379
30	**Déterminants**	385	389
31	**Familles sommables**	395	397
32	**Espaces préhilbertiens réels**	407	411
33	**Dénombrement**	423	426
34	**Espaces probabilisés finis**	433	436
35	**Indicateurs de position et de dispersion d'une variable aléatoire**	445	449
36	**Fonctions de deux variables**	459	462

Index des notations et abréviations

F^E : ensemble des applications de E dans F.
$\mathcal{L}(E,F)$: ensemble des applications linéaires de E dans F.
$|E|$: cardinal de l'ensemble E.
cf. : confer.
$\mathcal{C}^k(I,J)$: ensemble des fonctions de classe C^k sur I à valeurs dans J.
$M_{i,j}$: coefficient situé à l'intersection de la i^e ligne et de la j^e colonne de M.
$\mathbb{K}$: corps des réels $\mathbb{R}$ ou des complexes $\mathbb{C}$.
$\mathcal{C}_f$: courbe représentative de la fonction f.
(i,j,k) : cycle dans le contexte des permutations.
$DL(a;n)$: développement limité à l'ordre n en a.
$a|b, P|Q$: l'entier a divise l'entier b, le polynôme P divise le polynôme Q.
$\mathcal{L}(E)$: ensemble des endomorphismes de l'espace vectoriel E.
(HR) : hypothèse de récurrence.
id_E : application identité de l'ensemble E, notée id s'il n'y a pas d'ambigüité.
i.e : id est (c'est-à-dire).
$GL(E)$: ensemble des isomorphismes de l'espace vectoriel E.
$j : e^{\frac{2i\pi}{3}}$ (dans le contexte des nombres complexes).
$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$: ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficient dans $\mathbb{K}$.
$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficient dans $\mathbb{K}$.
$GL_n(\mathbb{K})$: ensemble des matrices inversibles d'ordre n à coefficient dans $\mathbb{K}$.
$M(u,\mathcal{B},\mathcal{B}')$: matrice de l'application linéaire u dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.
$M(u,\mathcal{B})$: matrice de l'endomorphisme u dans la base $\mathcal{B}$.
$a\mathbb{Z}+b$: ensemble des nombres de la forme $ak+b$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
$o(x_i)$: ordre de multiplicité de la racine x_i.
$\mathcal{P}(E)$: ensemble des parties de l'ensemble E.
S_n : ensemble des permutations de $[\![1;n]\!]$.
$a \wedge b, P \wedge Q$: pgcd des entiers a et b, des polynômes P et Q.
$\mathbb{K}[X]$: ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.
$\mathbb{K}_n[X]$: ensemble des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ de degrés inférieurs ou égaux à n.
$(u|v)$: produit scalaire des vecteurs u et v.
Résolution de systèmes : $\xrightarrow{L_1 \leftarrow 3L_1 - 2L_2}$ indique qu'on remplace la 1ère ligne par 3 fois la 1ère ligne moins 2 fois la 2e, et que les systèmes sont équivalents.
$f_{|A}$: restriction de la fonction f à une partie A.
sev : sous-espace vectoriel.
M^T : transposée de la matrice M.

Index des problèmes

Chapitre	Thème	Enoncés	Corrigés
Nombres complexes	**Etude d'une équation avec paramètre**	76	83
Primitives	**Intégrales abéliennes**	109	119
Equations différentielles	**Recherche de solutions périodiques**	126	136
Structures Algébriques	**Sous-groupes additifs de** $(\mathbb{R},+)$	145	151
Arithmétique dans $\mathbb{Z}$	**Equation diophantienne avec paramètre**	156	164
Polynômes	**Polynômes de Tchebychev**	170	176
Polynômes	**Polynômes de Legendre**	181	191
Continuité	**Equation fonctionnelle**	222	232
Espaces vectoriels	**Equations différentielles et suites récurrentes**	274	283
Applications linéaires	**Opérateur de différence finie**	289	300
Espaces vectoriels	**Dualité**	308	317
Applications linéaires	**Commutateurs de** $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$	325	335
Séries numériques	**Problème de Bâle**	355	362
Déterminants	**Déterminants tridiagonaux**	387	392
Familles sommables	**Réarrangement de Riemann**	396	403
Espaces préhilbertiens	**Produit vectoriel**	409	417
Probabilités	**Collectionneur de vignettes**	447	455

Calcul algébrique

Exercices de la semaine

Exercice 1. Opérations sur les inégalités, valeur absolue

1- Sans étude des variations, encadrer pour tout $x \in [1;5]$, la quantité :

$$q(x) = \frac{4x^2 - 3}{2x - 1}$$

2- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $|x - 3| \leq |2x + 2|$.

Exercice 2. Opérations sur les inégalités, valeur absolue, racine carrée

1- Montrer que :

$$\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}} = \frac{12 + 5\sqrt{6}}{6}$$

2- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\sqrt{x^2 - 9} \leq x - 5$.

Exercice 3. Calcul de sommes

1- Soit $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer :

$$\sum_{k=0}^{n} z^{2k+1}$$

2- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{i=0}^{n} i \times i! = (n+1)! - 1$$

3- Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} \frac{1}{j}$$

Exercice 4. Calcul de sommes, coefficients binomiaux

1- Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

2- Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{p=0}^{n} (-1)^p \binom{n}{p}$$

3- Montrer que pour tout $(m; n) \in \mathbb{N}^2$:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{m+k}{m} = \binom{m+n+1}{m+1}$$

Exercice 5. Calcul de produits

n désigne un entier naturel.

1- Exprimer à l'aide de factorielles les produits suivants :

$$P_1 = \prod_{i=0}^{n} (i+3) \quad \text{et} \quad P_2 = \prod_{j=1}^{n} (n+j)$$

2- Calculer :

$$P = \prod_{m=1}^{n} \frac{3m+2}{3m+5}$$

EXERCICES DU WEEKEND

Opérations sur les inégalités, calcul de sommes et de produits

Partie A

Montrer que pour tout $(a; b) \in]-1; 1[^2$:

$$\left|\frac{a+b}{1+ab}\right| < 1$$

Partie B

n désigne un entier naturel.

1- Calculer :

$$\prod_{1\leq i,j\leq n} ij$$

2- Soit $z \in \mathbb{C}$. Calculer :

$$\prod_{1\leq i\leq j\leq n} z^{i+j}$$

Partie C

Pour tous entiers naturels n et p, on note :

$$u_{n,p} = \sum_{k=0}^{n} ((k+1)^p - k^p)$$

1- En considérant la suite $(u_{n,2})$, retrouver que :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

2- De même, retrouver l'expression de :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} k^3$$

3- En considérant la suite $(u_{n,5})$, montrer que pour tout entier naturel n :

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

Corrigé des exercices de la semaine

Exercice 1

1- $1 \leq x \leq 5 \Rightarrow 1 \leq x^2 \leq 25$ ($x \mapsto x^2$ est croissante sur $[0;+\infty[$)

$1 \leq x \leq 5 \Rightarrow 4 \leq 4x^2 \leq 100$ ($4 > 0$)

$1 \leq x \leq 5 \Rightarrow 1 \leq 4x^2 - 3 \leq 97$

De plus :

$1 \leq x \leq 5 \Rightarrow 2 \leq 2x \leq 10$ car $2 > 0$

$1 \leq x \leq 5 \Rightarrow 1 \leq 2x - 1 \leq 9$

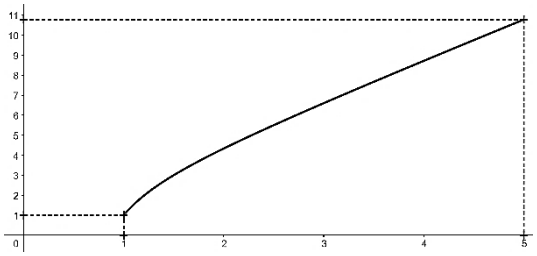
$1 \leq x \leq 5 \Rightarrow 1 \geq \dfrac{1}{2x-1} \geq \dfrac{1}{9}$ ($x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $]0;+\infty[$)

$1 \leq x \leq 5 \Rightarrow \dfrac{1}{9} \leq \dfrac{1}{2x-1} \leq 1$

On peut ensuite multiplier ces inégalités entre quantités **positives** :

$$\frac{1}{9} \leq \frac{4x^2-3}{2x-1} \leq 97$$

Les valeurs extrêmes des quantités intermédiaires encadrées n'étant pas forcément obtenues pour la même valeur de la variable, on est en général assez loin d'obtenir les extrema de la fonction (voir ci-dessous pour l'exemple précédent).



2- La stratégie générale consiste à se défaire des valeurs absolues.

$|x-3| = \begin{cases} x-3 & \text{si } x \geq 3 \\ 3-x & \text{sinon} \end{cases}$ et $|2x+2| = \begin{cases} 2x+2 & \text{si } x \geq -1 \\ -2x-2 & \text{sinon} \end{cases}$

On peut résumer les différents cas dans un tableau :

x	$x \leq -1$	$-1 \leq x \leq 3$	$x \geq 3$
$\lvert x-3\rvert$	$3-x$	$3-x$	$x-3$
$\lvert 2x+2\rvert$	$-2x-2$	$2x+2$	$2x+2$
$\lvert x-3\rvert \leq \lvert 2x+2\rvert$	$3-x \leq -2x-2$	$3-x \leq 2x+2$	$x-3 \leq 2x+2$

Premier cas

Dans $]-\infty;-1]$:

$\lvert x-3\rvert \leq \lvert 2x+2\rvert \Leftrightarrow 3-x \leq -2x-2$

$\lvert x-3\rvert \leq \lvert 2x+2\rvert \Leftrightarrow x \leq -5$

On obtient $]-\infty;-5]$ comme premier intervalle solution.

Deuxième cas

Dans $[-1;3]$:

$\lvert x-3\rvert \leq \lvert 2x+2\rvert \Leftrightarrow 3-x \leq 2x+2$

$\lvert x-3\rvert \leq \lvert 2x+2\rvert \Leftrightarrow 3x \geq 1$

$\lvert x-3\rvert \leq \lvert 2x+2\rvert \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{3} \quad (3>0)$

On obtient $\left[\frac{1}{3};3\right]$ comme deuxième intervalle solution.

Troisième cas

Dans $[3;+\infty[$:

$\lvert x-3\rvert \leq \lvert 2x+2\rvert \Leftrightarrow x-3 \leq 2x+2$

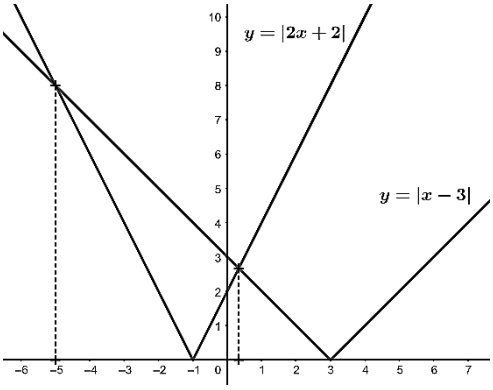
$\lvert x-3\rvert \leq \lvert 2x+2\rvert \Leftrightarrow x \geq -5$

On obtient $[3;+\infty[$ comme troisième intervalle solution.

Finalement :

$$\mathcal{S} =]-\infty;-5] \cup \left[\frac{1}{3};+\infty\right[$$

Graphiquement :



□

Exercice 2

1- On multiplie le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée du dénominateur :

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}=\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})}{(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})}$$

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}=\frac{6+2\sqrt{6}+3\sqrt{6}+6}{(3\sqrt{2})^2-(2\sqrt{3})^2}$$

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}=\frac{12+5\sqrt{6}}{18-12}=\frac{12+5\sqrt{6}}{6}$$

Cette stratégie permet de systématiquement éliminer les racines carrées du dénominateur.

2- On peut se placer dans l'intervalle $[5;+\infty[$ puisque $x-5\geq 0$ est une condition nécessaire évidente.
Dans cet intervalle les deux membres sont positifs et on peut alors passer aux carrés pour se défaire de la racine.

Dans $[5;+\infty[$:

$\sqrt{x^2-9}\leq x-5 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-9}^2\leq (x-5)^2$ ($x\mapsto x^2$ croissante sur $[0;+\infty[$)

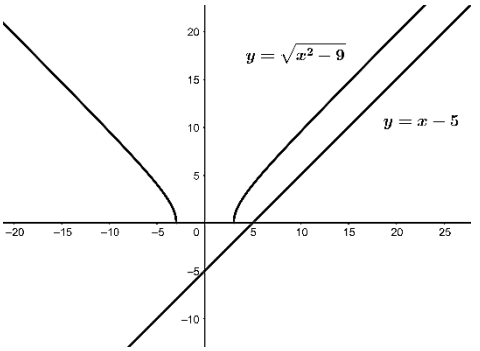
$\sqrt{x^2-9}\leq x-5 \Leftrightarrow x^2-9\leq x^2-10x+25$

$\sqrt{x^2-9}\leq x-5 \Leftrightarrow 10x\leq 34$

$\sqrt{x^2-9}\leq x-5 \Leftrightarrow x\leq 3{,}4 \quad (10>0)$

Finalement $\mathcal{S}=\emptyset$ puisque les conditions $x\geq 5$ et $x\leq 3{,}4$ sont incompatibles.

Graphiquement :



□

Exercice 3

1- On peut se ramener au calcul d'une somme de termes consécutifs d'une suite géométrique en observant que pour tout $z\in\mathbb{C}$ et tout $k\in\mathbb{Z}$:

$$z^{2k+1}=z\times(z^2)^k$$

Soit $z \in \mathbb{C}$ et soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=0}^{n} z^{2k+1} = \sum_{k=0}^{n} z \times (z^2)^k = z \times \sum_{k=0}^{n} (z^2)^k$$

Il faut différencier les cas $z^2 = 1$ et $z^2 \neq 1$.

- Si $z^2 = 1$ i.e si $z = \pm 1$ alors :

$$\sum_{k=0}^{n} z^{2k+1} = z \sum_{k=0}^{n} 1 = (n+1)z = \begin{vmatrix} n+1 & \text{si } z = 1 \\ -n-1 & \text{si } z = -1 \end{vmatrix}$$

- Si $z^2 \neq 1$ alors :

$$\sum_{k=0}^{n} z^{2k+1} = z \times \frac{1-(z^2)^{n+1}}{1-z^2} = \frac{z - z^{2n+3}}{1-z^2}$$

2- On peut se ramener à une somme télescopique en observant que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $i \times i! = (i+1-1) \times i! = (i+1)! - i!$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{i=0}^{n} i \times i! = \sum_{i=0}^{n} ((i+1)! - i!) = (n+1)! - 1! = (n+1)! - 1.$$

3- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} \frac{1}{j} = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{1}{j} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} \frac{1}{j} = \sum_{j=1}^{n} j \times \frac{1}{j} = \sum_{j=1}^{n} 1 = n$$

Dans une somme double avec indices dépendants, il faut veiller à toujours respecter la relation entre les indices. Par exemple, si $1 \leq i \leq j \leq n$: à chaque valeur de i entre 1 et n, on fait varier j entre i et n ; ou à chaque valeur de j entre 1 et n, on fait varier i entre 1 et j. On peut donc écrire :

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} a_{i,j}$$

□

Exercice 4

1- Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$$

2- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{p=0}^{n}(-1)^p\binom{n}{p} = \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}(-1)^p 1^{n-p} = (1-1)^n = 0$$

3- On peut se ramener à une somme télescopique en utilisant le triangle de Pascal. Pour tout $(m;n) \in \mathbb{N}^2$ et tout $k \in [\![0;n]\!]$:

$$\binom{m+k}{m} = \binom{m+k+1}{m+1} - \binom{m+k}{m+1}$$

Ainsi :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{m+k}{m} = \sum_{k=0}^{n}\left[\binom{m+k+1}{m+1} - \binom{m+k}{m+1}\right]$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{m+k}{m} = \binom{m+n+1}{m+1} - \underbrace{\binom{m}{m+1}}_{\substack{=0 \\ \text{car } m<m+1}} = \binom{m+n+1}{m+1}$$

□

Exercice 5

1-

- $P_1 = \frac{1}{2}\left(1 \times 2 \times \prod_{i=0}^{n}(i+3)\right) = \frac{1}{2}\prod_{i=1}^{n+3} i = \frac{(n+3)!}{2}$
- $P_2 = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} j}\left(\prod_{j=1}^{n} j\right)\left(\prod_{j=1}^{n}(n+j)\right) = \frac{1}{n!}\left(\prod_{j=1}^{n} j\right)\left(\prod_{j=n+1}^{n} j\right) = \frac{1}{n!}\prod_{j=1}^{2n} j$

D'où :

$$P_2 = \frac{(2n)!}{n!}$$

2- Il s'agit d'un produit télescopique :

$$P = \prod_{m=1}^{n}\frac{3m+2}{3m+5} = \frac{\prod_{m=1}^{n}(3m+2)}{\prod_{m=1}^{n}(3m+5)} = \frac{\prod_{m=1}^{n}(3m+2)}{\prod_{m=2}^{n+1}(3m+2)} = \frac{5}{3n+5}$$

□

CORRIGÉ DES EXERCICES DU WEEKEND

Partie A

Pour tout $(a;b) \in]-1;1[^2$:

$$\left|\frac{a+b}{1+ab}\right| < 1 \Leftrightarrow |a+b| < |1+ab| \quad \text{car } |1+ab| > 0$$

Comparer deux nombres **positifs** revient à comparer leurs carrés. Ainsi :

$$\left|\frac{a+b}{1+ab}\right| < 1 \Leftrightarrow |a+b|^2 < |1+ab|^2$$

$$\left|\frac{a+b}{1+ab}\right| < 1 \Leftrightarrow (a+b)^2 < (1+ab)^2$$

De plus :

$(a+b)^2 - (1+ab)^2 = a^2 + 2ab + b^2 - 1 - 2ab - a^2b^2$

$(a+b)^2 - (1+ab)^2 = a^2(1-b^2) + b^2 - 1$

$(a+b)^2 - (1+ab)^2 = a^2(1-b^2) - (1-b^2)$

$(a+b)^2 - (1+ab)^2 = (1-b^2)(a^2-1)$

Or par hypothèse $1-b^2 > 0$ et $a^2 - 1 < 0$.

Il en découle que pour tout $(a;b) \in]-1;1[^2$, $(a+b)^2 < (1+ab)^2$.

Et finalement que pour tout $(a;b) \in]-1;1[^2$:

$$\left|\frac{a+b}{1+ab}\right| < 1$$

Partie B

1- $$\prod_{1\le i,j\le n} ij = \prod_{j=1}^{n}\left(\prod_{i=1}^{n} ij\right) = \prod_{j=1}^{n}\left(j^n \prod_{i=1}^{n} i\right) = \prod_{j=1}^{n}(j^n n!)$$

$$\prod_{1\le i,j\le n} ij = (n!)^n \left(\prod_{j=1}^{n} j\right)^n = (n!)^n (n!)^n = (n!)^{2n}$$

2- Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$\prod_{1\le i\le j\le n} z^{i+j} = \prod_{j=1}^{n}\left(\prod_{i=1}^{j}\left(z^i \times z^j\right)\right) = \prod_{j=1}^{n}\left(\left(z^j\right)^j \prod_{i=1}^{j} z^i\right)$$

$$\prod_{1\le i\le j\le n} z^{i+j} = \prod_{j=1}^{n}\left(z^{j^2} z^{\frac{j(j+1)}{2}}\right) = \prod_{j=1}^{n}\left(z^{\frac{3}{2}j^2} z^{\frac{j}{2}}\right) = z^{\frac{3}{2}\sum_{j=1}^{n} j^2} \times z^{\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} j}$$

Or :

$$\frac{3}{2}\sum_{j=1}^{n} j^2 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)(2n+1)}{4} + \frac{n(n+1)}{4} = \frac{n(n+1)^2}{2}$$

Finalement :

$$\prod_{1\leq i\leq j\leq n} z^{i+j} = z^{\frac{n(n+1)^2}{2}}$$

Dans une somme, un facteur commun à tous les termes peut « sortir » du signe $\sum$: c'est la mise en facteur.

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda a_i = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Dans un produit, un facteur commun à tous les facteurs peut aussi « sortir » du signe $\prod$ mais il apparaît alors à une puissance égale au nombre de facteurs du produit.

$$\prod_{i=1}^{n} \lambda a_i = \lambda^n \prod_{i=1}^{n} a_i$$

Partie C

1- Soit $n \in \mathbb{N}$.

On exprime $u_{n,2}$ de deux manières différentes.

$$u_{n,2} = \sum_{k=0}^{n} ((k+1)^2 - k^2) = \sum_{k=0}^{n} (2k+1) = 2\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1$$

$$u_{n,2} = 2\sum_{k=0}^{n} k + n + 1$$

Or $u_{n,2}$ est aussi une somme télescopique : $u_{n,2} = (n+1)^2 - 0^2 = (n+1)^2$.

Il s'ensuit que :

$$2\sum_{k=0}^{n} k + n + 1 = (n+1)^2 \quad \text{et donc} \quad \sum_{k=0}^{n} k = \frac{1}{2}\big((n+1)^2 - (n+1)\big)$$

D'où finalement :

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n+1}{2}(n+1-1) = \frac{n(n+1)}{2}$$

2- On procède de la même manière avec $u_{n,3}$ puis avec $u_{n,4}$.

$$u_{n,3} = \sum_{k=0}^{n}((k+1)^3 - k^3) = (n+1)^3 - 0^3 = (n+1)^3$$

Mais aussi :

$$u_{n,3} = \sum_{k=0}^{n}((k+1)^3 - k^3) = \sum_{k=0}^{n}(3k^2 + 3k + 1)$$

$$u_{n,3} = 3\sum_{k=0}^{n}k^2 + 3\sum_{k=0}^{n}k + \sum_{k=0}^{n}1 = 3\sum_{k=0}^{n}k^2 + \frac{3n(n+1)}{2} + n + 1$$

Il en découle que :

$$3\sum_{k=0}^{n}k^2 + \frac{3n(n+1)}{2} + n + 1 = (n+1)^3$$

Il vient alors :

$$\sum_{k=0}^{n}k^2 = \frac{1}{3}\left((n+1)^3 - \frac{3n(n+1)}{2} - (n+1)\right)$$

$$\sum_{k=0}^{n}k^2 = \frac{n+1}{3}\left((n+1)^2 - \frac{3n}{2} - 1\right) = \frac{n+1}{3}\left(n^2 + \frac{n}{2}\right)$$

$$\sum_{k=0}^{n}k^2 = \frac{n(n+1)}{3}\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{n(n+1)}{3} \times \frac{2n+1}{2}$$

Et finalement :

$$\sum_{k=0}^{n}k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Puis :

$$u_{n,4} = \sum_{k=0}^{n}((k+1)^4 - k^4) = (n+1)^4 - 0^4 = (n+1)^4$$

Mais aussi :

$$u_{n,4} = \sum_{k=0}^{n}((k+1)^4 - k^4) = \sum_{k=0}^{n}(4k^3 + 6k^2 + 4k + 1)$$

$$u_{n,4} = 4\sum_{k=0}^{n}k^3 + 6\sum_{k=0}^{n}k^2 + 4\sum_{k=0}^{n}k + \sum_{k=0}^{n}1$$

$$u_{n,4} = 4\sum_{k=0}^{n} k^3 + n(n+1)(2n+1) + 2n(n+1) + n + 1$$

Il en résulte que :

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n+1}{4}((n+1)^3 - n(2n+1) - 2n - 1)$$

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n+1}{4}(n^3 + n^2) = \frac{(n+1)n^2}{4}(n+1) = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

3- Le principe déjà éprouvé trois fois dans les questions précédentes, est désormais clair. Reste la nécessité d'organiser le calcul.

$$u_{n,5} = \sum_{k=0}^{n}((k+1)^5 - k^5) = (n+1)^5 - 0^5 = (n+1)^5$$

Mais aussi :

$$u_{n,5} = \sum_{k=0}^{n}((k+1)^5 - k^5) = \sum_{k=0}^{n}(5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1)$$

$$u_{n,5} = 5\sum_{k=0}^{n} k^4 + \frac{5n^2(n+1)^2}{2} + \frac{5n(n+1)(2n+1)}{3} + \frac{5n(n+1)}{2} + n + 1$$

On en déduit que :

$$\sum_{k=0}^{n} k^4 = \frac{(n+1)^5}{5} - \frac{n^2(n+1)^2}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} - \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n+1}{5}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k^4 = \frac{n+1}{30}(6(n+1)^4 - 15n^2(n+1) - 10n(2n+1) - 15n - 6)$$

$$\sum_{k=0}^{n} k^4 = \frac{n+1}{30}(6n^3 + 9n^2 + n - 1) \quad \text{après développement et réduction}$$

Or $6n^3 + 9n^2 + n - 1 = (2n+1)(3n^2 + 3n - 1)$.

On obtient finalement :

$$\sum_{k=0}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2 + 3n - 1)}{30}$$

□

Logique et raisonnements

Exercices de la semaine

Exercice 1. Tables de vérité

Utiliser des tables de vérité pour prouver que les formules ci-dessous sont des tautologies (i.e sont vraies quelles que soient les valeurs de vérité des propositions qui les composent).

1- p ou (non p).

2- (p et ($p \Rightarrow q$)) $\Rightarrow q$.

3- (($p \Rightarrow q$) et ($q \Rightarrow r$)) $\Rightarrow (q \Rightarrow r)$.

Exercice 2. Utiliser les quantificateurs, nier une proposition

Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Ecrire avec des quantificateurs les propositions suivantes ainsi que leurs négations.

1- f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2- f n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$.
3- f admet un maximum sur $\mathbb{R}$.
4- f s'annule sur $\mathbb{R}$.
5- f est nulle sur $\mathbb{R}$.
6- f s'annule au plus une fois sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3. Raisonnement par l'absurde

1- Montrer que si p est un nombre premier alors $\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$.

2- Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{n^2+2} \notin \mathbb{N}$.

Exercice 4. Disjonction de cas

1- Pour tout entier naturel n, on note $a_n = 10^n + 3$.

a) Montrer que si $n \geq 1$ alors a_n n'est pas le carré d'un entier.

b) Déterminer les valeurs de n pour lesquelles a_n peut s'écrire comme la somme des carrés de deux entiers.

2- Montrer qu'il existe une infinité de couples $(a; b)$ vérifiant :

$$(a, b) \in (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})^2 \text{ et } a^b \in \mathbb{Q}$$

Indication : on pourra s'aider du 1- de l'exercice 3.

Exercice 5. Analyse-synthèse

Soit une fonction $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et soit $k \in \mathbb{R}^*$.
Montrer que f peut s'écrire de manière unique comme la somme d'une fonction affine et d'une fonction s'annulant en k et en $-k$.

EXERCICES DU WEEKEND

Récurrence, analyse-synthèse, raisonnement par l'absurde

Partie A

1- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $10^n - (-1)^n$ est un multiple de 11.

2- Soit $x \in \mathbb{R}^*$ tel que :

$$\left(x + \frac{1}{x}\right) \in \mathbb{Z}$$

Montrer que pour tout entier naturel n :

$$\left(x^n + \frac{1}{x^n}\right) \in \mathbb{Z}$$

3- Soit $(v_n)_{n\geq 1}$ la suite de réels positifs définie par $v_1 = 1$ et pour tout entier $n \geq 1$:

$$v_{n+1}^2 = \sum_{k=1}^{n} v_k$$

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad v_n \geq \frac{n}{4}$$

Partie B

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telles que :

$$\forall (m,n) \in \mathbb{Z}^2, \ f(m+n) + f(m-n) = 2f(m) + 2f(n) \ (*)$$

Partie C

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $(a_i)_{1\leq i\leq n+1} \in [0;1]^{n+1}$.

Montrer que :

$$\exists (i,j) \in [\![1; n+1]\!]^2 \ | \ \left(i \neq j \ \text{ et } \ |a_i - a_j| \leq \frac{1}{n}\right)$$

CORRIGÉ DES EXERCICES DE LA SEMAINE

Exercice 1

1-

p	non p	p ou (non p)
V	F	**V**
F	V	**V**

La proposition (p ou q) est fausse si et seulement si les propositions p et q sont simultanément fausses.

2-

p	q	$p \Rightarrow q$	p	p et $(p \Rightarrow q)$	q	$(p$ et $(p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$
V	V	V	V	V	V	**V**
V	F	F	V	F	F	**V**
F	V	V	F	F	V	**V**
F	F	V	F	F	F	**V**

- La proposition $(p \Rightarrow q)$ est fausse si et seulement si p est vraie et q est fausse.
- Il n'est pas indispensable de répéter les colonnes p et q mais cela peut permettre d'éviter certaines erreurs de lecture susceptibles de se produire lorsqu'il y a nécessité de se référer à des colonnes non adjacentes.

3-

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow q)$ et $(q \Rightarrow r)$	$((p \Rightarrow q)$ et $(q \Rightarrow r)) \Rightarrow (q \Rightarrow r)$
V	V	V	V	V	V	**V**
V	V	F	V	F	F	**V**
V	F	V	F	V	F	**V**
V	F	F	F	V	F	**V**
F	V	V	V	V	V	**V**
F	V	F	V	F	F	**V**
F	F	V	V	V	V	**V**
F	F	F	V	V	V	**V**

□

Exercice 2

1- $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.
Négation : $\exists (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \big(x < y \ \text{ et } \ f(x) \geq f(y)\big)$.

Une fonction croissante est une fonction qui conserve les inégalités. Une fonction décroissante renverse quant à elle les inégalités.
C'est valable pour les inégalités strictes – et cela fait parfois une différence considérable – lorsque la fonction est strictement monotone.
Ces propriétés sont grandement mises à contribution dès lors qu'on manipule des inégalités. Il est essentiel de les garder à l'esprit.

2- $\forall M \geq 0,\ \exists x \in \mathbb{R} \mid |f(x)| > M$.
Négation : $\exists M \geq 0 \mid \forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| \leq M$.

3- $\exists a \in \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq f(a)$.
Négation : $\forall a \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R} \mid f(x) > f(a)$.

Un maximum est un majorant qui est atteint. S'il existe, il est unique.
Par contre, s'il existe un majorant, il en existe une infinité (si M est un majorant alors tous les $M' > M$ sont aussi des majorants).

4- $\exists x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0$.
Négation : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0$.

5- $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$.
Négation : $\exists x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0$.

Une fonction qui est nulle sur un ensemble s'annule sur cet ensemble : qui peut le plus, peut le moins. Par contre, une fonction qui s'annule sur un ensemble n'est en général pas nulle sur cet ensemble : le logarithme népérien s'annule en 1 et nulle part ailleurs.

6- Il y a plusieurs manières d'écrire cette proposition. La plus efficace repose probablement sur le fait d'observer qu'elle signifie que si deux réels ont des images nulles, alors ils sont forcément égaux. On obtient :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \ (f(x) = f(y) = 0 \ \Rightarrow \ x = y)$$

On aurait aussi pu écrire :

$$(\exists ! \, x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0) \ \text{ ou } \ (\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0)$$

Négation : $\exists (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x \neq y \ \text{ et } \ f(x) = f(y) = 0)$

□

Exercice 3

1- Supposons que $\sqrt{p} \in \mathbb{Q}$:

$$\exists (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \mid (\sqrt{p} = \frac{a}{b} \text{ et } a \wedge b = 1)$$

On en déduit que :

$$p = \frac{a^2}{b^2} \text{ et donc que } a^2 = pb^2$$

Ainsi p divise a^2. Et puisque p est premier, p divise a. Il existe donc un entier a' tel que $a = pa'$.

Il s'ensuit que $a^2 = p^2a'^2$ et donc que $p^2a'^2 = pb^2$.

La simplification par $p \neq 0$ donne alors $pa'^2 = b^2$.

Il en découle que p divise b^2 et donc que p divise b puisque p est premier.

p divise a et b est alors en contradiction avec a et b sont premiers entre eux.

Finalement $\sqrt{p} \in \mathbb{Q}$ est une hypothèse fausse et donc $\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$.

2- Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $N = \sqrt{n^2+2} \in \mathbb{N}$.

On a alors de manière évidente $N \geq n$.

De plus :

$N = \sqrt{n^2+2} \Rightarrow N^2 = n^2 + 2$

$N = \sqrt{n^2+2} \Rightarrow N^2 - n^2 = 2$

$N = \sqrt{n^2+2} \Rightarrow (N-n)(N+n) = 2$

$(N-n)$ et $(N+n)$ sont alors deux facteurs entiers positifs dont le produit fait 2, avec en outre $N+n \geq N-n$.

Il en découle que N et n sont solutions du système :

$$\begin{cases} N+n = 2 & (L_1) \\ N-n = 1 & (L_2) \end{cases}$$

$L_1 + L_2$ donne alors $2N = 3$ et donc $N = 1{,}5$: il y a contradiction avec $N \in \mathbb{N}$.

En conséquence l'hypothèse « $\exists n \in \mathbb{N} \mid \sqrt{n^2+2} \in \mathbb{N}$ » est fausse.

Et finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \sqrt{n^2+2} \notin \mathbb{N}$$

□

Dans le raisonnement par l'absurde, pour démontrer une proposition p, on suppose non p et on en déduit une contradiction. Il faut donc veiller à effectivement utiliser l'hypothèse non p. Dans le cas contraire, il s'agit au mieux d'un raisonnement direct mal nommé.

Exercice 4

1- On réduit le problème modulo 4.
Considérons un entier naturel n.
$n \equiv 0\ (4) \Rightarrow n^2 \equiv 0\ (4)$
$n \equiv 1\ (4) \Rightarrow n^2 \equiv 1\ (4)$
$n \equiv 2\ (4) \Rightarrow n^2 \equiv 4\ (4)$ donc $n \equiv 2\ (4) \Rightarrow n^2 \equiv 0\ (4)$
$n \equiv 3\ (4) \Rightarrow n^2 \equiv 9\ (4)$ donc $n \equiv 3\ (4) \Rightarrow n^2 \equiv 1\ (4)$

Ainsi le carré d'un entier ne peut être congru qu'à 0 ou 1 modulo 4.

a) Soit $n \in \mathbb{N}$.
$10 \equiv 2\ (4)$ donc $10^n \equiv 2^n\ (4)$.
Ainsi dès que $n \geq 2$, $10^n \equiv 0\ (4)$ et $a_n \equiv 3\ (4)$.
Si $n \geq 2$, a_n n'est donc le carré d'aucun entier naturel.

De plus :
- $a_0 = 10^0 + 3 = 4 = 2^2$;
- $a_1 = 10^1 + 3 = 13$ donc a_1 n'est pas le carré d'un entier.

Finalement si $n \geq 1$, a_n n'est pas le carré d'un entier.

b) D'après le préambule, la somme des carrés de deux entiers ne peut être congrue qu'à 0 ; 1 ou 2 modulo 4.
On peut alors affirmer d'après a) que si $n \geq 2$ alors a_n ne peut pas s'écrire comme la somme des carrés de deux entiers.

De plus :
- $a_0 = 10^0 + 3 = 4 = 0^2 + 2^2$;
- $a_1 = 10^1 + 3 = 13 = 2^2 + 3^2$.

Finalement a_n s'écrit comme la somme des carrés de deux entiers si et seulement si $n = 0$ ou $n = 1$.

2- Soit p un entier premier.
On a déjà montré que $\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$.

Considérons maintenant le réel $x = \left(\sqrt{p}\right)^{\sqrt{2}}$.

- Si $x \in \mathbb{Q}$ alors la propriété est démontrée ;

- Sinon, considérons le réel $y = x^{\sqrt{2}}$. Dans ce cas $y = a^b$ avec a et b dans $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.
  De plus :
  $$y = x^{\sqrt{2}} = \left(\left(\sqrt{p}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \left(\sqrt{p}\right)^{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \sqrt{p}^2 = p$$
  Ainsi $y \in \mathbb{Q}$.

L'ensemble des nombres premiers étant infini, il y a bien une infinité de couples $(a, b) \in (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})^2$ tels que $a^b \in \mathbb{Q}$.

Nul besoin de le savoir pour démontrer la propriété du 2-, mais si p est premier alors $\sqrt{p}^{\sqrt{2}}$ est non seulement irrationnel mais aussi transcendant. C'est une conséquence du théorème de Gelfond-Schneider.

□

Exercice 5

Analyse

Soit un réel k non nul et soit une fonction $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s'écrivant $f = a + g$ avec a une fonction affine et g une fonction s'annulant en k et en $-k$.

a est affine donc il existe deux réels m et p tels que pour tout réel x :

$$a(x) = mx + p$$

L'évaluation de f en k et en $-k$ donne alors :

$$f(k) = a(k) + \underbrace{g(k)}_{=0} = mk + p \quad \text{et} \quad f(-k) = a(-k) + \underbrace{g(-k)}_{=0} = -mk + p$$

Il en résulte que m et p vérifient :

$$\begin{cases} mk + p = f(k) & (L_1) \\ -mk + p = f(-k) & (L_2) \end{cases}$$

De $L_1 + L_2$ on tire :

$$p = \frac{f(k) + f(-k)}{2}$$

Puis k étant non nul par hypothèse, de $L_1 - L_2$ on tire :

$$m = \frac{f(k) - f(-k)}{2k}$$

Il en découle que si a existe alors a est unique. Cela impose également l'unicité de $g = f - a$.

Synthèse

Soit un réel k non nul et soit une fonction $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Soit a la fonction affine s'écrivant pour tout réel x, $a(x) = mx + p$ avec :

$$m = \frac{f(k) - f(-k)}{2k} \quad \text{et} \quad p = \frac{f(k) + f(-k)}{2}$$

Soit la fonction $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant $g = f - a$.

On a par définition de g, $f = a + g$.

De plus :

$$a(k) = mk + p = \frac{f(k) - f(-k)}{2} + \frac{f(k) + f(-k)}{2} = f(k) \quad \text{et}$$

$$a(-k) = -mk + p = \frac{f(-k) - f(k)}{2} + \frac{f(k) + f(-k)}{2} = f(-k).$$

Il s'ensuit que :

$$g(k) = f(k) - a(k) = 0 \quad \text{et} \quad g(-k) = f(-k) - a(-k) = 0$$

Les fonctions a et g ainsi définies conviennent donc.

Leur unicité ayant été prouvée dans la partie analyse, la propriété est démontrée.

□

La phase d'analyse consiste en la recherche de conditions nécessaires aussi précises que possible. La phase de synthèse consiste à déterminer si ces conditions nécessaires sont suffisantes.
Dans le cadre de la résolution d'une équation, cela revient à déterminer les seuls candidats solutions puis à vérifier si ce sont effectivement des solutions.

CORRIGÉ DES EXERCICES DU WEEKEND

Partie A

1- **Fondons la récurrence au rang 0**

$10^0 - (-1)^0 = 1 - 1 = 0$ et $0 = 0 \times 11$ est bien un multiple de 11.

La récurrence est donc fondée au rang 0.

Hérédité

Soit k un entier naturel tel que $10^k - (-1)^k \equiv 0\ (11)$ (HR).

$10^{k+1} \equiv 10 \times 10^k\ (11)$

$10^{k+1} \equiv -1 \times (-1)^k\ (11)$ d'après (HR) et car $10 \equiv -1\ (11)$

$10^{k+1} \equiv (-1)^{k+1}\ (11)$

Ainsi $10^{k+1} - (-1)^{k+1} \equiv 0\ (11)$ et la propriété est héréditaire à partir du rang 0.

On a donc prouvé par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $10^n - (-1)^n$ un multiple de 11.

> Il est important qu'il y ait cohérence entre le ou les rangs auquel ou auxquels on fonde la récurrence, et le rang à partir duquel on prouve l'hérédité. Car si on est seulement capable de faire tomber le premier domino et de prouver que si à partir du deuxième domino, lorsqu'un domino tombe il entraîne son successeur, on ne peut pas affirmer que tous les dominos tomberont.

2- Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On note pour tout entier naturel n :

$$u_n = x^n + \frac{1}{x^n}$$

Fondons la récurrence aux rangs 0 et 1

$x^0 + \frac{1}{x^0} = 1 + 1 = 2$ donc $u_0 \in \mathbb{Z}$.

$u_1 = x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$ par hypothèse.

La récurrence est donc fondée aux rangs 0 et 1.

Hérédité

Soit $k \geq 1$ un entier tel que $u_k \in \mathbb{Z}$ et $u_{k-1} \in \mathbb{Z}$ (HR)

On observe que :

$$u_1 u_k = x^{k+1} + \frac{1}{x^{k-1}} + x^{k-1} + \frac{1}{x^{k+1}} = u_{k+1} + u_{k-1}$$

Ainsi d'après (HR) :

$$u_{k+1} = u_1 u_k - u_{k-1} \in \mathbb{Z}$$

La propriété est donc héréditaire à partir du rang 1.

En conséquence, on a prouvé par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{Z}$.

C'est un exemple de récurrence double. Dans la mesure où on a besoin que deux dominos tombent pour entraîner la chute de leur successeur, il est nécessaire de s'assurer de pouvoir faire tomber les deux premiers.

3- On observe que l'information dont on dispose au rang $(n+1)$ fait intervenir la totalité des rangs inférieurs : cela doit inciter à faire une récurrence forte i.e à considérer pour $n \geq 1$ la propriété :

$$P(n) : \forall p \in [\![1; n]\!], \ v_p \geq \frac{p}{4}$$

Fondons la récurrence au rang 1

$v_1 = 1$ par hypothèse donc $v_1 \geq \frac{1}{4}$

La récurrence est donc fondée au rang 1.

Hérédité

Soit $k \geq 1$ un entier tel que $P(k)$ est vraie. (HR)

$\sum_{p=1}^{k} v_p \geq \sum_{p=1}^{k} \frac{p}{4}$ d'après(HR) et donc :

$$\sum_{p=1}^{k} v_p \geq \frac{1}{4} \times \frac{k(k+1)}{2}$$

Ainsi :

$$v_{k+1}^2 \geq \frac{k(k+1)}{8}$$

De plus :

$$\frac{k(k+1)}{8} - \frac{(k+1)^2}{16} = \frac{2k^2 + 2k - k^2 - 2k - 1}{16} = \frac{k^2 - 1}{16} \geq 0$$

Ainsi :

$$v_{k+1}^2 \geq \frac{k(k+1)}{8} \geq \frac{(k+1)^2}{16}$$

Par croissance de la fonction racine carrée sur $[0; +\infty[$, et puisque v_{k+1} et $(k+1)$ sont positifs, on obtient :

$$v_{k+1} \geq \frac{k+1}{4}$$

La propriété est donc héréditaire à partir du rang 1.

On a finalement montré par récurrence que pour tout $n \geq 1$:

$$v_n \geq \frac{n}{4}$$

Partie B

1- **Analyse**

Soit une fonction $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ vérifiant (**).

- $m = n = 0$ donne $2f(0) = 4f(0)$ donc $f(0) = 0$.
- $m = n = 1$ donne $f(2) + f(0) = 4f(1)$ donc $f(2) = 4f(1) = 2^2 f(1)$.
- $m = 2$ et $n = 1$ donne $f(3) + f(1) = 2f(2) + 2f(1)$ donc $f(3) = 9f(1) = 3^2 f(1)$.

Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $f(n) = n^2 f(1)$.

➢ Fondons la récurrence aux rangs 0 et 1

- $f(0) = 0$ et $0^2 f(1) = 0$.
- $1^2 \times f(1) = 1 \times f(1) = f(1)$.

La récurrence est donc fondée.

➢ Hérédité

Soit un entier $k \geq 1$ tel que $f(k) = k^2 f(1)$ et $f(k-1) = (k-1)^2 f(1)$ (hypothèse de récurrence (HR)).

$m = k$ et $n = 1$ donne $f(k+1) + f(k-1) = 2f(k) + 2f(1)$.

Ainsi :

$f(k+1) = 2k^2 f(1) - (k-1)^2 f(1) + 2f(1)$ d'après (HR)

$f(k+1) = (2k^2 - (k-1)^2 + 2)f(1)$

Or :

$$2k^2 - (k-1)^2 + 2 = 2k^2 - k^2 + 2k - 1 + 2 = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$$

Il en résulte que la propriété est héréditaire à partir du rang 1.

On a donc montré que si f vérifie (*) alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = n^2 f(1)$$

f étant à valeurs entières, cela impose en outre que $f(1) \in \mathbb{Z}$.

Finalement les seules fonctions pouvant vérifier la condition (*) sont les fonctions $f: n \mapsto an^2$ avec $a \in \mathbb{Z}$.

Synthèse

Réciproquement soit $a \in \mathbb{Z}$ et soit une fonction $f : n \mapsto an^2$.
f est à valeurs dans $\mathbb{Z}$.

De plus pour tout couple $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$:

$f(m+n) + f(m-n) = a(m^2 + 2mn + n^2 + m^2 - 2mn + n^2)$

$f(m+n) + f(m-n) = a(2m^2 + 2n^2)$

$f(m+n) + f(m-n) = 2am^2 + 2an^2$

$f(m+n) + f(m-n) = 2f(m) + 2f(n)$.

Finalement les fonctions $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ vérifiant (*) sont exactement les fonctions $n \mapsto an^2$ avec $a \in \mathbb{Z}$.

Partie C

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $(a_i)_{1 \leq i \leq n+1} \in [0; 1]^{n+1}$.
Supposons que :

$$\forall (i, j) \in [\![1; n+1]\!]^2, \ \left(i \neq j \Rightarrow |a_i - a_j| > \frac{1}{n}\right) \ (H)$$

Quitte à renuméroter les a_i, on peut supposer que $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{n+1}$.
On a alors :

$$|a_{n+1} - a_1| = a_{n+1} - a_1 = \sum_{i=1}^{n} (a_{i+1} - a_i)$$

Or par hypothèse pour tout $i \in [\![1; n+1]\!]$, $a_{i+1} - a_i > \frac{1}{n}$.
Ainsi par l'inégalité triangulaire :

$$|a_{n+1} - a_1| \geq \sum_{i=1}^{n} |a_{i+1} - a_i| > n \times \frac{1}{n} = 1$$

C'est absurde puisque $(a_1, a_{n+1}) \in [0; 1]^2$.
L'hypothèse (H) est donc fausse et on peut par conséquent affirmer que :

$$\exists (i, j) \in [\![1; n+1]\!]^2 \ | \ \left(i \neq j \ \text{ et } \ |a_i - a_j| \leq \frac{1}{n}\right)$$

□

Ensembles et applications

Exercices de la semaine

Exercice 1. Réunions et intersections

Soit F, G et H trois parties d'un ensemble E.

1- On suppose F, G et H non vides.
Montrer que : $\big((F \cup G) \subset (F \cup H)$ et $(F \cap G) \subset (F \cap H)\big) \Rightarrow (G \subset H)$

2- Montrer que : $F \setminus (F \setminus G) = F \cap G$.

3- Résoudre dans $\mathcal{P}(E)$ l'équation : $F \cup X = G$.

Exercice 2. Différence symétrique

Soit A et B deux parties d'un ensemble E.
On appelle différence symétrique de A et B, et on note $A\Delta B$, l'élément de $\mathcal{P}(E)$ défini par $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
Montrer que :

1- $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

2- Δ est une loi commutative et associative sur $\mathcal{P}(E)$.
On pourra utiliser une table de vérité pour démontrer l'associativité.

3- $A\Delta B = A\Delta C \Leftrightarrow B = C$.

4- $A\Delta B = \emptyset \Leftrightarrow A = B$.

Exercice 3. Applications définies explicitement

Soit la fonction f définie pour $x \neq 2$ par :

$$f(x) = \frac{3+x}{2-x}$$

Déterminer deux intervalles maximaux (au sens de l'inclusion) entre lesquels f réalise une bijection.
Déterminer alors la fonction réciproque.

Exercice 4. Images directe et réciproque

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = e^x \ln x$.
Déterminer les images directe et réciproque de l'intervalle $]0; 1]$ par f.

Exercice 5. Compositions

Soit E et F des ensembles, avec $E \neq \emptyset$, et soit $f \in F^E$.

1- Montrer que f est injective si et seulement si f est simplifiable à gauche.

2- Montrer que f est surjective si et seulement si f est simplifiable à droite.

On dit que f est simplifiable à gauche si $(f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h)$. On dit que f est simplifiable à droite si $(g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h)$.

EXERCICES DU WEEKEND

Bijections, applications définies explicitement, composition

Partie A

1- Soit E et F deux ensembles, et soit $f \in F^E$ et $g \in E^F$ deux applications.

a) Montrer que si $f \circ g \circ f$ est bijective alors f et g sont bijectives.

b) Montrer que si $g \circ f \circ g \circ f$ est surjective et $f \circ g \circ f \circ g$ est injective alors f et g sont bijectives.

2- Soit f et g deux bijections de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$.

Montrer que le produit fg de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ n'est pas surjectif.

3- Soit n un entier naturel non nul. On note $E_n = [\![1; n]\!]$.

Montrer qu'il existe une unique bijection h de $\mathcal{P}(E_n)$ dans $\mathcal{P}(E_n)$ vérifiant pour tout $A \subset E_n$, $h(A) \cap A = \emptyset$.

Partie B

Soit f et g deux applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f(n) = n + 1 \quad \text{et} \quad g(n) = \max(0; n - 1)$$

Etudier l'injectivité et la surjectivité de f et g puis calculer $g \circ f$.

Que doit-on en retenir ?

Partie C

1- Trouver toutes les fonctions $g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad g(n) + g \circ g(n) = 2n \quad (*)$$

2- Même question qu'au 1- avec la condition :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad g(n) + g \circ g(n) = n \quad (**)$$

CORRIGÉ DES EXERCICES DE LA SEMAINE

Exercice 1

1- Soit $x \in G$. On raisonne par disjonction de cas.

Si $x \in F$ alors $x \in F \cap G$ donc $x \in F \cap H$ par hypothèse. Et en particulier, $x \in H$.

Sinon, $x \in F \cup G$ donc $x \in F \cup H$ par hypothèse. Mais puisque $x \notin F$, $x \in H$.

On a montré que tout élément de G était un élément de H, ce qui constitue la définition de $G \subset H$.

2- On va utiliser que de manière générale : $A \setminus B = A \cap \bar{B}$. On a donc :

$$F \setminus (F \setminus G) = F \cap \overline{(F \cap \bar{G})} = F \cap \left(\bar{F} \cup \bar{\bar{G}}\right) = F \cap (\bar{F} \cup G) = \underbrace{(F \cap \bar{F})}_{=\emptyset} \cup (F \cap G)$$

Finalement on a bien : $F \setminus (F \setminus G) = F \cap G$.

L'intersection est distributive par rapport à la réunion et réciproquement.
Pour tous ensembles A, B et C :

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad \text{et} \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

3- Il faut avant tout remarquer que si G ne contient pas F alors pour toute partie X de E, G ne contient pas $F \cup X$, et que dans ce cas l'équation n'a pas de solution :

$$F \not\subset G \Rightarrow \mathcal{S} = \emptyset$$

Si $F \subset G$ alors $X \subset G$ est une condition nécessaire évidente à la réalisation de $F \cup X = G$.

Soit $X \in \mathcal{P}(E)$ vérifiant $X \subset G$.

$(F \cup X) \cap \bar{F} = X \cap \bar{F}$ donc $F \cup X = G$ impose $X \cap \bar{F} = G \cap \bar{F}$ i.e $X \setminus F = G \setminus F$.

Il s'ensuit que $G \setminus F \subset X$.

Réciproquement, soit $X \in \mathcal{P}(E)$ vérifiant $G \setminus F \subset X \subset G$.

L'inclusion $F \cup X \subset G$ est immédiate.

Soit maintenant x dans G.

- Si $x \in F$ alors $x \in F \cup X$;
- Sinon $x \in G \setminus F$ donc $x \in X$ et par conséquent $x \in F \cup X$.

Il en résulte que $G \subset F \cup X$ et donc que $G = F \cup X$.

Finalement :

$$\mathcal{S} = \{X \in \mathcal{P}(E) \mid G \setminus F \subset X \subset G\} = \{G \setminus A;\ A \subset F\}$$

□

Exercice 2

1- On raisonne par double inclusion.

➢ Soit $x \in A\Delta B$.

- Si $x \in A\backslash B$ alors $x \in A$ et $x \notin B$ donc $x \in A \cup B$ et $x \notin A \cap B$. Et par conséquent $x \in (A \cup B)\backslash(A \cap B)$.
- Sinon $x \in B\backslash A$ et par symétrie $x \in (B \cup A)\backslash(B \cap A)$ et par conséquent $x \in (A \cup B)\backslash(A \cap B)$. $(A \cup B = B \cup A$ et $A \cap B = B \cap A)$

On en déduit que $A\Delta B \subset (A \cup B)\backslash(A \cap B)$.

➢ Réciproquement soit $x \in (A \cup B)\backslash(A \cap B)$. En particulier $x \in A \cup B$.

- Si $x \in A$ alors $x \in A$ et $x \notin A \cap B$ donc $x \notin B$. Il en résulte que $x \in A\backslash B$ et donc que $x \in A\Delta B$.
- Si $x \in B$ alors par symétrie $x \in B\backslash A$ et donc $x \in A\Delta B$.

On en déduit que $(A \cup B)\backslash(A \cap B) \subset A\Delta B$.

Finalement on a bien : $A\Delta B = (A \cup B)\backslash(A \cap B)$.

2- La commutativité de Δ est une conséquence directe de la commutativité de la réunion. Pour toutes parties A et B de E :

$$A\Delta B = (A\backslash B) \cup (B\backslash A) = (B\backslash A) \cup (A\backslash B) = B\Delta A$$

Pour prouver l'associativité, on dresse une table de vérité.
Soit $(A, B, C) \in \mathcal{P}(E)^3$.

A	B	C	$A\Delta B$	$(A\Delta B)\Delta C$	$B\Delta C$	A	$A\Delta(B\Delta C)$
V	V	V	F	**V**	F	V	**V**
V	V	F	F	**F**	V	V	**F**
V	F	V	V	**F**	V	V	**F**
V	F	F	V	**V**	F	V	**V**
F	V	V	V	**F**	F	F	**F**
F	V	F	V	**V**	V	F	**V**
F	F	V	F	**V**	V	F	**V**
F	F	F	F	**F**	F	F	**F**

Il ressort de cette table que $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$ et donc que Δ est associative.

$x \in A\Delta B$ est faux si et seulement si $x \in A$ et $x \in B$ ont la même valeur de vérité.

3- Le sens réciproque $(B = C \Rightarrow A\Delta B = A\Delta C)$ est trivial.

Supposons maintenant que $A\Delta B = A\Delta C$.

- Soit $x \in B$.
  - Si $x \in A$ alors $x \in A \cap B$ donc $x \notin A\Delta B$. Ainsi $x \notin A\Delta C$ par hypothèse. Par ailleurs, $x \in A$ donc $x \in A \cup C$. Cela impose $x \in A \cap C$ (sinon on aurait $x \in A\Delta C$) et donc $x \in C$.
  - Si $x \notin A$ alors $x \in A \cup B$ et $x \notin A \cap B$ donc $x \in A\Delta B$. Ainsi $x \in A\Delta C$ par hypothèse. En particulier $x \in A \cup C$, et puisque $x \notin A$, $x \in C$.

  Il en résulte que $B \subset C$.
- On a par symétrie $C \subset B$.

Le sens direct est donc prouvé : $A\Delta B = A\Delta C \Rightarrow B = C$

Finalement :

$$A\Delta B = A\Delta C \Leftrightarrow B = C$$

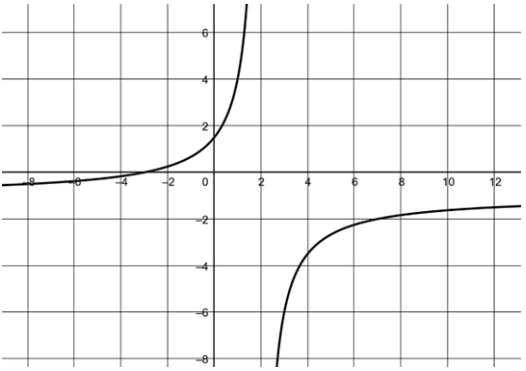
4- Ce dernier point est une conséquence directe de la question précédente puisque pour tout $A \subset E$: $A\Delta A = (A \setminus A) \cup (A \setminus A) = \emptyset$. On a alors :
$(A\Delta B = \emptyset \Leftrightarrow A\Delta B = A\Delta A)$ et donc d'après 3- : $A\Delta B = \emptyset \Leftrightarrow B = A$.

□

Exercice 3

Il y a une infinité d'intervalles qui conviennent si on n'impose pas une propriété de maximalité. Sans cela, on pourrait par exemple faire remarquer lors d'une khôlle, que f réalise une bijection de l'intervalle $\{1\}$ sur l'intervalle $\{4\}$ et que la fonction réciproque, définie sur $\{4\}$, est celle qui envoie 4 sur 1…

On cherche donc plutôt ici des intervalles maximaux (au sens de l'inclusion) qui conviennent. On peut si nécessaire s'appuyer sur la courbe représentative de f ou sur son tableau des variations, pour se faire une première idée (voir ci-contre).



f est dérivable sur son ensemble de définition et pour tout $x \neq 2$:

$$f'(x) = \frac{1 \times (2-x) - (-1) \times (3+x)}{(2-x)^2} = \frac{5}{(2-x)^2}$$

f est donc strictement croissante sur $]-\infty;2[$ et sur $]2;+\infty[$. L'étude des limites et l'application du théorème de la bijection (la variante strictement monotone du théorème des valeurs intermédiaires) permettent alors de prouver que f réalise une bijection de $]-\infty;2[$ sur $]-1;+\infty[$ et de $]2;+\infty[$ sur $]-\infty;-1[$.

Qu'on se place dans $]-\infty;2[$ ou dans $]2;+\infty[$, il faut pour déterminer la réciproque, résoudre l'équation $f(x)=y$ pour $y\neq -1$:

$$f(x)=y \Leftrightarrow \frac{3+x}{2-x}=y$$
$$f(x)=y \Leftrightarrow 3+x=(2-x)y \quad (2-x\neq 0)$$
$$f(x)=y \Leftrightarrow x(1+y)=2y-3$$
$$f(x)=y \Leftrightarrow x=\frac{2y-3}{1+y} \quad (1+y\neq 0)$$

Bilan

$g=f_{|]-\infty;2[}:]-\infty;2[\to]-1;+\infty[$ est bijective et $g^{-1}:\left|\begin{array}{c}]-1;+\infty[\to]-\infty;2[\\ x\mapsto\frac{2x-3}{x+1}\end{array}\right.$

$h=f_{|]2;+\infty[}:]2;+\infty[\to]-\infty;-1[$ est bijective et $h^{-1}:\left|\begin{array}{c}]2;+\infty[\to]-\infty;-1[\\ x\mapsto\frac{2x-3}{x+1}\end{array}\right.$

Soit $f:E\to F$ une bijection et soit $f^{-1}:F\to E$ sa réciproque.

$$\begin{cases}y=f(x)\\ x\in E\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=f^{-1}(y)\\ y\in F\end{cases}$$

Par exemple :

$$\begin{cases}y=\ln x\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=e^y\\ y\in\mathbb{R}\end{cases}\quad\text{et}\quad\begin{cases}y=\sin x\\ x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\text{Arcsin}\,y\\ y\in[-1;1]\end{cases}$$

□

Exercice 4

f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout $x>0$:

$$f'(x)=\frac{e^x}{x}+e^x\ln x=\frac{e^x}{x}(1+x\ln x)$$

$f'(x)$ est donc du signe de $1+x\ln x$.
On peut utiliser la concavité de ln sur $]0;+\infty[$ pour cette étude de signe.

Pour tout $x > 0$:

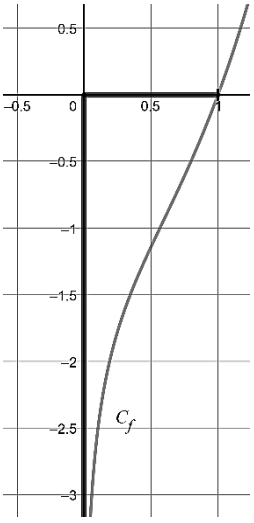
$\ln x \leq \dfrac{x}{e} \Rightarrow \ln\dfrac{1}{x} \leq \dfrac{1}{ex}$

$\ln x \leq \dfrac{x}{e} \Rightarrow -x\ln x \leq \dfrac{1}{e} \quad (x > 0)$

$\ln x \geq \dfrac{x}{e} \Rightarrow 1 + x\ln x \geq 1 - \dfrac{1}{e} > 0$

$y = \frac{x}{e}$ est l'équation réduite de la tangente à $C_{\ln}$ en e. Par ailleurs, le changement de variable $x' = \frac{1}{x}$ est bijectif sur $]0;+\infty[$.

Ainsi $f' > 0$ sur $]0;+\infty[$ et f est donc strictement croissante sur $]0;+\infty[$.
En particulier, f est continue et strictement croissante sur $]0\,;1]$, et on obtient donc : $f(]0;1]) = \left]\lim\limits_{x\to 0^+}(f(x))\,;f(1)\right] =]-\infty;0]$.

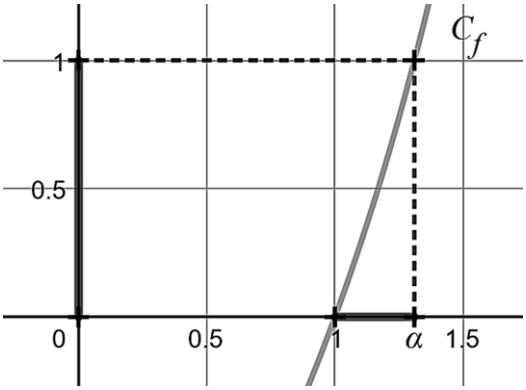


(Voir ci-contre)

Soit $x > 0$. $x \in f^{-1}(]0\,;1])$ signifie exactement $0 < f(x) \leq 1$.
L'étude des variations de f a déjà montré que :

$$0 < f(x) \Leftrightarrow x > 1$$

De plus f étant continue et strictement croissante de $]0;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$, il existe par le théorème de la bijection un unique antécédent α de 1 par f.
On a alors $f^{-1}(]0\,;1]) =]1;\alpha]$, où α est l'unique réel vérifiant $\ln\alpha = e^{-\alpha}$.
α n'a pas d'expression simple mais on en obtient facilement une valeur approchée : $\alpha \simeq 1{,}309$ arrondi au millième. (Voir ci-dessous).



□

Exercice 5

1- Soit $f \in F^E$ injective et soit deux applications g et h d'un ensemble G dans E telles que $f \circ g = f \circ h$. On veut montrer que $g = h$.

Soit $x \in G$.

$(f \circ g)(x) = (f \circ h)(x)$ par hypothèse donc $f\big(g(x)\big) = f\big(h(x)\big)$. On en déduit par injectivité de f que $g(x) = h(x)$.

Et l'égalité $g = h$ est prouvée.

Réciproquement, soit $(x, x') \in E^2$ tel que $f(x) = f(x')$. On veut montrer que $x = x'$.

Considérons alors les deux applications g et h de F dans E définies pour tout $y \in F$ par $g(y) = x$ et $h(y) = x'$.

On a pour tout $y \in F$:

$$(f \circ g)(y) = f\big(g(y)\big) = f(x) \quad \text{et} \quad (f \circ h)(y) = f\big(h(y)\big) = f(x')$$

Or $f(x) = f(x')$ donc $f \circ g = f \circ h$. Cela impose par hypothèse que $g = h$ et donc que $x = x'$.

2- Soit $f \in F^E$ surjective et soit deux applications g et h de F dans un ensemble G telles que $g \circ f = h \circ f$. On veut montrer que $g = h$.

Soit $y \in F$. f est surjective par hypothèse donc il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Ainsi :

$$g(y) = g\big(f(x)\big) = (g \circ f)(x) = (h \circ f)(x) = h\big(f(x)\big) = h(y)$$

L'égalité $g = h$ est prouvée.

On va montrer l'implication réciproque par contraposée.

Supposons donc que f ne soit pas surjective :

$$\exists y_0 \in F \mid (\forall x \in E,\ f(x) \neq y_0)$$

Considérons maintenant les deux applications g et h de F dans $\{0; 1\}$ définies comme suit : g est la fonction constante égale à 0 ; $h(y) = 0$ si $y \neq y_0$ et $h(y_0) = 1$. Alors :

$$\forall x \in E,\ \big(\, g\big(f(x)\big) = (g \circ f)(x) = 0 \quad \text{et} \quad h\big(f(x)\big) = (h \circ f)(x) = 0\big)$$

Il en découle que $g \circ f = h \circ f$ avec $g \neq h$.

On a donc prouvé que f non surjective n'est pas simplifiable à droite.

□

CORRIGÉ DES EXERCICES DU WEEKEND

Partie A

1-

a) Si $f \circ g \circ f$ est bijective alors $f \circ (g \circ f)$ est surjective donc f est surjective, et $(f \circ g) \circ f$ est injective donc f est injective. Il en résulte que f est bijective.

Notons alors $h = f \circ g \circ f$. On a $g = f^{-1} \circ h \circ f^{-1}$ avec h et f^{-1} bijectives. g est donc bijective.

- Sous réserve de son existence, une composée d'applications bijectives est bijective ;
- $g \circ f$ injective $\Rightarrow$ f injective ;
- $g \circ f$ surjective $\Rightarrow$ g surjective.

b) • Si $g \circ f \circ g \circ f$ est surjective alors $g \circ (f \circ g \circ f)$ est surjective donc g est surjective.

Si $f \circ g \circ f \circ g$ est injective alors $(f \circ g \circ f) \circ g$ est injective donc g est injective. Il en découle que g est bijective.

- En notant $h = g \circ f \circ g \circ f$, on a $f \circ g \circ f = g^{-1} \circ h$. Or $g^{-1} \circ h$ est la composée de deux applications surjectives et est donc surjective.

Ainsi $f \circ g \circ f = f \circ (g \circ f)$ est surjective et f est donc surjective.

- En notant $h' = f \circ g \circ f \circ g$, on a $f \circ g \circ f = h' \circ g^{-1}$. Or $h' \circ g^{-1}$ est la composée de deux applications injectives et est donc injective.

Ainsi $f \circ g \circ f = (f \circ g) \circ f$ est injective et f est donc injective.

Finalement, f et g sont bien bijectives.

2- Soit f et g deux bijections de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$. On raisonne par l'absurde.

Supposons que l'application fg soit surjective de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$ et notons E l'ensemble des antécédents de 1 par f et g :

$$E = \{n \in \mathbb{N} \mid (f(n) = 1 \text{ ou } g(n) = 1)\}$$

f et g étant bijectives par hypothèse, 1 admet un unique antécédent par f et par g donc $|E| \leq 2$.

Considérons maintenant $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers.

fg étant surjective par hypothèse :

$$\forall p \in \mathcal{P},\ \exists n_p \in \mathbb{N} \mid (fg)(n_p) = f(n_p)g(n_p) = p$$

f et g étant à valeurs dans $\mathbb{N}$, et p étant premier, pour tout $p \in \mathcal{P}$, $f(n_p) = 1$ ou $g(n_p) = 1$. Ainsi :

$$\forall p \in \mathcal{P},\ n_p \in E$$

De plus si p et q sont premiers avec $p \neq q$ alors $(fg)(n_p) \neq (fg)(n_q)$ et donc $n_p \neq n_q$.

La famille $(n_p)_{p\in\mathcal{P}}$ fournit donc une infinité d'éléments distincts de E ce qui contredit $|E| \leq 2$.

L'hypothèse fg surjective est donc fausse et finalement :

fg n'est pas surjective

3- **Existence**

Soit $c : \mathcal{P}(E_n) \to \mathcal{P}(E_n)$ l'application qui à toute partie A de E_n associe son complémentaire $\bar{A}$ dans E_n.

$c \circ c = id_{E_n}$ donc c est une bijection de E_n sur E_n.

De plus :

$$\forall A \subset E_n,\ A \cap c(A) = A \cap \bar{A} = \emptyset$$

Il s'ensuit que l'application c convient. L'existence est démontrée.

Unicité

Soit f une bijection qui convient. On veut montrer que $f = c$.

On note $g = c \circ f$. g est par composition une bijection de $\mathcal{P}(E_n)$ sur $\mathcal{P}(E_n)$.

Soit $A \subset E_n$: $g(A) = \overline{f(A)}$ par définition de c et $A \cap f(A) = \emptyset$ par hypothèse sur f. On en déduit que $A \subset g(A)$.

Une récurrence immédiate donne alors :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ g^k(A) \subset g^{k+1}(A) \quad (\text{où } g^k \text{ désigne } \underbrace{g \circ g \circ \ldots \circ g}_{k \text{ fois}})$$

Ainsi $\left(g^k(A)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante pour l'inclusion d'éléments de l'ensemble fini $\mathcal{P}(E_n)$, elle est donc stationnaire :

$$\exists m \in \mathbb{N} \mid g^m\big(g(A)\big) = g^m(A)$$

Or g est bijective donc g^m est aussi bijective. On en déduit que $g(A) = A$.

On a montré que : $\forall A \subset E_n,\ g(A) = (c \circ f)(A) = A$.

Il en résulte que $c \circ f = id_{E_n}$ et donc que $f = c^{-1} = c$.

Et l'unicité est prouvée.

A partir de $c \circ f = id_{E_n}$, on conclut que $f = c$ par unicité de l'inverse.
En effet, $c \circ f = id_{E_n}$ donc f est un inverse de c à droite d'une part, mais l'application c étant bijective d'autre part, cela impose $f = c^{-1} = c$.

Partie B

Injectivité

- Pour tous entiers naturels n et m : $f(n) = f(m) \Leftrightarrow n + 1 = m + 1$.
  Ce qui impose $n = m$ et f est donc injective.
- $g(0) = g(1) = 0$ donc g n'est pas injective.

Surjectivité

- $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) \geq 1$. 0 n'a donc pas d'antécédent pas f. Il en résulte que f n'est pas surjective.
- $\forall n \in \mathbb{N},\ g(n+1) = \max(0; (n+1) - 1) = \max(0; n) = n$. g est donc surjective.

Calcul de $g \circ f$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (g \circ f)(n) = g\big(f(n)\big) = \max(0; n + 1 - 1) = n$$

Ainsi, $g \circ f$ est l'identité de $\mathbb{N}$.

Morale

- Nul besoin que f soit surjective pour que $g \circ f$ le soit ;
- Nul besoin que g soit injective pour que $g \circ f$ le soit ;
- Une application peut être inversible à droite sans être bijective ;
- Une application peut être inversible à gauche sans être bijective.

Partie C

1- On raisonne par analyse-synthèse.

On considère une fonction g de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ vérifiant $(*)$.

$g(n) \in \mathbb{N}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc une récurrence immédiate donne pour tout entier naturel k, $g^k(n) \in \mathbb{N}$ (où g^k désigne $\underbrace{g \circ g \circ \ldots \circ g}_{k \text{ fois}}$).

L'application de $(*)$ à l'entier $g^k(n)$ donne :

$$g^{k+1}(n) + g^{k+2}(n) = 2g^k(n)$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On note pour tout entier naturel k, $u_k = g^k(n)$.

La suite (u_k) vérifie alors :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ u_{k+2} + u_{k+1} - 2u_k = 0 \quad (\dagger)$$

$(\dagger)$ se réécrit $u_{k+2} - u_{k+1} + 2(u_{k+1} - u_k) = 0$ puis $d_{k+1} = -2d_k$ en notant pour tout entier naturel k, $d_k = u_{k+1} - u_k$.

(d_k) est une suite géométrique de raison -2 donc pour tout entier naturel k, $d_k = d_0 \times (-2)^k$ avec $d_0 = g(n) - n$.

On peut maintenant revenir à l'expression de u_k.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$u_k = u_0 + \sum_{j=0}^{k-1} d_j = u_0 + d_0 \times \frac{1-(-2)^k}{1-(-2)} = u_0 + d_0 \times \frac{1-(-2)^k}{3}$$

Or par hypothèse pour tout k, $u_k \in \mathbb{N}$. Cela impose $d_0 = 0$ car dans le cas contraire, $\left(d_0 \times \frac{1-(-2)^k}{3}\right)$ n'est ni majorée ni minorée et u_k change donc de signe.

Il en découle puisque $d_0 = g(n) - n$, que $g(n) = n$.

Ce raisonnement étant valable pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'identité est donc le seul candidat solution.

Réciproquement, $g = id_{\mathbb{N}}$ est bien solution du problème.

Finalement :

$id_{\mathbb{N}}$ est l'unique application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ vérifiant $(*)$

2- $n = 0$ donne $g(0) + g\big(g(0)\big) = 0$.

$g(0)$ et $g\big(g(0)\big)$ étant des entiers naturels, ils sont forcément nuls.

On obtient $g(0) = 0$.

$n = 1$ donne $g(1) + g\big(g(1)\big) = 1$.

$g(1)$ étant un entier naturel, il ne peut prendre que les valeurs 0 ou 1.

Or :

- Si $g(1) = 1$ alors $g\big(g(1)\big) = 0$. Mais $g\big(g(1)\big) = g(1) = 1$: contradiction ;
- Si $g(1) = 0$ alors $g\big(g(1)\big) = 1$. Mais $g\big(g(1)\big) = g(0) = 0$: contradiction.

Finalement, aucune application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ ne vérifie la condition $(**)$.

□