



SCIENCES SUP

Exercices et problèmes corrigés avec rappels de cours

Écoles d'ingénieurs • 2^e cycle/Master

INTRODUCTION AU CALCUL SCIENTIFIQUE PAR LA PRATIQUE

12 projets résolus avec MATLAB



***Ionut Danaila • Pascal Joly
Sidi Mahmoud Kaber • Marie Postel***

DUNOD

INTRODUCTION AU CALCUL SCIENTIFIQUE PAR LA PRATIQUE

12 projets résolus avec MATLAB

Consultez nos catalogues sur le Web



Édiscience
ETSF
InterÉditions
Microsoft Press

Recherche

Par Titre
OK
Collections
Index thématique

Accueil
Contacts
Sciences et Techniques
Informatique
Gestion et Management
Sciences Humaines
Acheter
Mon panier

Interviews



Comme nous avons changé ! La saga inédite de 50 ans de bouleversements socioculturels
Alain de Vulpian



Mars, planète de mythes, planète d'espoirs
Francis Rocard

→ toutes les interviews

Événements

Saint-Valentin : j'aime mon couple... et je le soigne ! Interview exclusive de H. Jaoui

En librairie ce mois-ci

Spécial Révisions scientifiques ! Pour réussir vos examens, **équipez** avec DUNOD et EDISCIENCE et gagnez des chèques-lire de 15€ !

les librairies

- Nouveautés - Nouveautés - Nouveautés -



Image numérique couleur
De l'acquisition au traitement
Alain Trémeau,
Christine Fernandez-Maloigne,
Pierre Bonton



Risque Pays 2004
Coface, Le Moci



Détection et prévention des intrusions IDS
Thierry Evangelista



De quelle vie voulez-vous être le héros ?
Tirer profit du passé pour réorganiser sa vie
Pierre-Jean De Jonghe

LES BIBLIOTHEQUES DES MÉTIERS

- Gestion industrielle
- Métiers du vin
- Directeur d'établissement social et médico-social
- Toutes les bibliothèques

LES NEWSLETTERS

- Action sociale
- Entreprise
- Informatique et NTIC
- Documentation pour l'industrie
- Toutes les newsletters

bibliothèques des métiers
newsletters
ediscience.net
expert-sup.com
Notice légale

www.dunod.com

INTRODUCTION AU CALCUL SCIENTIFIQUE PAR LA PRATIQUE

12 projets résolus
avec MATLAB

Ionut Danaila

Maître de conférences à l'université Paris 6

Pascal Joly

Ingénieur de recherche au CNRS

Sid Mahmoud Kaber

Maître de conférences à l'université Paris 6

Marie Postel

Maître de conférences à l'université Paris 6

DUNOD

Conseiller éditorial : Olivier Pironneau

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements

d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour

les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée. Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du

Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).



© Dunod, Paris, 2005

ISBN 2 10 0048709 4

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Table des matières

AVANT-PROPOS	X
CHAPITRE 1 • APPROXIMATION NUMÉRIQUE DE QUELQUES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES MODÈLES	1
1.1 Discrétisation d'une équation différentielle ordinaire	2
1.1.1 Construction de schémas numériques	3
1.1.2 Forme générale des schémas numériques	6
1.1.3 Application à l'étude de l'équation d'absorption	7
1.2 Équations aux dérivées partielles modèles	9
1.2.1 L'équation de convection	10
1.2.2 L'équation des ondes	12
1.2.3 L'équation de la chaleur	16
1.3 En savoir plus	18
1.4 Solutions et programmes	19
CHAPITRE 2 • ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES NON LINÉAIRES. APPLICATION À LA CINÉTIQUE CHIMIQUE	31
2.1 Problème physique et modélisation mathématique	31
2.2 Étude de la stabilité du système	33
2.3 Modèle de la réaction entretenue	34
2.3.1 Existence d'un point critique et stabilité	35
2.3.2 Résolution numérique	35

2.4	Modèle de la réaction avec retard	35
2.5	Solutions et programmes	39
CHAPITRE 3 • APPROXIMATION POLYNOMIALE		47
3.1	Introduction	48
3.2	Approximation polynomiale	48
3.2.1	Interpolation polynomiale	48
3.2.2	Meilleure approximation polynomiale	58
3.3	Approximation polynomiale par morceaux	65
3.3.1	Approximation constante par morceaux	66
3.3.2	Approximation affine par morceaux	67
3.3.3	Approximation cubique par morceaux (spline cubique)	67
3.4	En savoir plus	69
3.5	Solutions et programmes	69
CHAPITRE 4 • ÉTUDE D'UN MODÈLE DE CONVECTION-DIFFUSION PAR ÉLÉMENTS FINIS		84
4.1	Modélisation	84
4.2	Formulation variationnelle du problème	85
4.3	Une méthode d'éléments finis $P1$	87
4.4	Une méthode d'éléments finis $P2$	90
4.5	Une technique de stabilisation	93
4.5.1	Calcul de la solution aux extrémités des intervalles	93
4.5.2	Analyse de la méthode stabilisée	95
4.6	Cas d'un terme source variable	96
4.7	En savoir plus	97
4.8	Solutions et programmes	98
CHAPITRE 5 • UNE MÉTHODE SPECTRALE POUR LA RÉOLUTION D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE		110
5.1	Quelques propriétés des polynômes de Legendre	111
5.2	Intégration numérique par quadrature de Gauss	112
5.3	Développement d'une fonction en série de Legendre	114
5.4	Résolution d'une équation différentielle par méthode spectrale	117

5.5	Extensions possibles	118
5.6	Solutions et programmes	119
CHAPITRE 6 • TRAITEMENT DU SIGNAL : ANALYSE MULTIÉCHELLE		125
6.1	Approximation d'une fonction : aspect théorique	126
6.1.1	Les fonctions constantes par morceaux	126
6.1.2	Décomposition de l'espace V_J	128
6.1.3	Algorithmes de transformation	130
6.1.4	Intérêt de la représentation multiéchelle	131
6.2	Représentation multiéchelle : aspect pratique	132
6.3	Représentation multiéchelle : mise en œuvre	133
6.4	Introduction à la théorie des ondelettes	135
6.4.1	Les fonctions d'échelles et les ondelettes	135
6.4.2	L'ondelette de Schauder	137
6.4.3	Mise en œuvre de l'ondelette de Schauder	139
6.4.4	L'ondelette 4 de Daubechies	141
6.4.5	Mise en œuvre de l'ondelette de Daubechies	141
6.5	Généralisation - Traitement de l'image	144
6.6	Solutions et programmes	146
CHAPITRE 7 • ÉLASTICITÉ : DÉFORMATION D'UNE MEMBRANE		152
7.1	Le problème d'élasticité (équation linéaire)	153
7.2	Le problème électrostatique (équation non-linéaire)	155
7.3	Discretisation du problème	156
7.4	Mise en œuvre	159
7.4.1	Notations	159
7.4.2	Le problème d'élasticité (équation linéaire)	159
7.4.3	La validation des procédures	159
7.4.4	Les procédures et l'expérimentation numérique	160
7.5	Le problème non-linéaire	161
7.6	Résolution numérique du problème non-linéaire	161
7.7	Solutions et programmes	163

CHAPITRE 8 • DÉCOMPOSITION DE DOMAINES PAR LA MÉTHODE DE SCHWARZ	166
8.1 Principe et champs d'application de la décomposition de domaine	166
8.2 Résolution par différences finies en 1D	168
8.3 Méthode de Schwarz en 1D	169
8.4 Extension au cas 2D	172
8.4.1 Résolution par différences finies en 2D	173
8.4.2 Décomposition de domaine dans le cas 2D	177
8.4.3 Mise en œuvre de conditions limites réalistes	180
8.4.4 Extensions possibles	182
8.5 Solutions et programmes	182
CHAPITRE 9 • MODÉLISATION GÉOMÉTRIQUE : COURBES ET SURFACES DE BÉZIER	191
9.1 Les courbes de Bézier	192
9.2 Propriétés des courbes de Bézier	193
9.2.1 Enveloppe convexe des points de contrôle	193
9.2.2 Points de contrôle multiples	193
9.2.3 Vecteur tangent à la courbe	194
9.2.4 Raccord de deux courbes de Bézier	195
9.2.5 Construction d'un point $P(t)$	196
9.3 Construction de courbes de Bézier : mise en œuvre	197
9.4 Intersection de deux courbes de Bézier	201
9.5 Surfaces de Bézier	204
9.6 Construction de surfaces de Bézier : mise en œuvre	207
9.7 Solutions et programmes	207
CHAPITRE 10 • PROBLÈME DE RIEMANN ET DISCONTINUITÉS. ÉTUDE DU TUBE À CHOC	210
10.1 Problème physique du tube à choc	210
10.2 Système d'équations d'Euler 1D	211
10.2.1 Adimensionnement des équations	214
10.2.2 Solution exacte	215
10.3 Résolution numérique	218
10.3.1 Schémas centrés (Lax-Wendroff et MacCormack)	218
10.3.2 Schémas décentrés (Roe)	223
10.4 Solutions et programmes	227

CHAPITRE 11 • THERMIQUE : OPTIMISATION DE LA TEMPÉRATURE D'UN FOUR	229
11.1 Formulation du problème	230
11.2 Discrétisation par éléments finis	232
11.3 Mise en œuvre	233
11.3.1 Calcul de la matrice	233
11.3.2 Calcul du second membre	234
11.3.3 Le système linéaire	234
11.4 Prise en compte des conditions aux limites	235
11.5 Formulation du problème inverse	238
11.6 Résolution du problème inverse	239
11.7 Solutions et programmes	242
CHAPITRE 12 • MÉCANIQUE DES FLUIDES : RÉOLUTION DES ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES 2D	246
12.1 Équations de Navier-Stokes 2D, incompressibles	247
12.2 Méthode de résolution	248
12.3 Domaine de calcul, conditions aux limites et maillage	250
12.4 Discrétisation des équations	251
12.5 Visualisation de l'écoulement	259
12.6 Condition initiale	260
12.6.1 Dynamique d'un jet plan. Instabilité de Kelvin-Helmholtz	260
12.6.2 Mouvement d'un dipôle de vortacité	261
12.7 Mise en œuvre	262
12.7.1 Résolution d'un système linéaire à matrice tridiagonale et périodique	262
12.7.2 Résolution de l'équation instationnaire de la chaleur	265
12.7.3 Résolution de l'équation stationnaire de la chaleur en utilisant les FFT	269
12.7.4 Résolution des équations de Navier-Stokes	269
12.8 Solutions et programmes	271
BIBLIOGRAPHIE	278
INDEX GÉNÉRAL	280
INDEX DES PROCÉDURES	285

Avant-propos

Aujourd'hui l'enseignement des mathématiques appliquées ne peut se concevoir sans l'expérimentation numérique. En effet, seule la mise en œuvre d'une méthode sur un exemple concret permet d'en mieux comprendre les qualités (précision et rapidité de calcul) et les défauts (coût et limites d'utilisation). Bien sûr, ces éléments distinctifs peuvent être appréhendés d'un point de vue théorique ; mais la complexité de programmation et la variété des champs d'application, critères finalement déterminants pour le succès d'une méthode, ne peuvent être mesurées que par l'expérimentation.

Cet ouvrage regroupe quelques exemples d'application de méthodes désormais classiques de l'analyse numérique, mises en œuvre pour la résolution de problèmes concrets issus de la physique, la mécanique, la chimie, le traitement de l'image, etc. Ces problèmes ont été choisis pour satisfaire la curiosité légitime d'un public assez vaste. Élaborés dans le cadre de cours de mathématiques appliquées (analyse numérique, calcul scientifique), ils ont été proposés sous forme de projets à différents groupes d'étudiants de l'Université ou de Grandes Écoles d'ingénieurs.

Nous avons privilégié une approche pédagogique progressive. Chaque projet décrit précisément le problème à traiter et présente, de manière aussi complète que possible, les bases théoriques nécessaires à sa résolution. Il est structuré en étapes de difficulté croissante, pouvant être proposées de manière modulable dans le cadre d'un enseignement avec des séances de programmation étalées dans le temps. En début de projet, une "fiche" indique sa difficulté globale (sur une échelle de 1 à 3), les notions mathématiques développées, ainsi que les domaines d'application.

Toujours dans un souci pédagogique, une solution de programmation en MATLAB[®] est fournie pour chaque projet. Les scripts complets peuvent être téléchargés à partir de la page web du livre, à l'adresse

<http://www.dunod.com/ICSPP/>

Dans la pratique, les méthodes de calcul scientifique étudiées sont souvent programmées dans des langages plus performants (Fortran, C, C++) adaptés à la résolution sur de gros calculateurs de cas concrets industriels. Le choix du logiciel MATLAB a de multiples motivations : la simplicité de programmation en langage interprété ; la richesse des bibliothèques pré-programmées. Enfin, la facilité de visualisation graphique des résultats. Tout ceci permet au lecteur, même néophyte en programmation, de réaliser facilement les expériences numériques proposées. Si bien que son apprentissage est un passage obligé dans la formation d'un mathématicien appliqué. Par ailleurs, ce logiciel est très largement employé aussi bien dans le monde de l'éducation que dans les laboratoires de recherche et développement. Les logiciels libres Scilab ou Octave conviennent également pour ce genre de simulation, ce qui est à prendre en compte à l'Université où l'enseignement aux niveaux Licence, Master, voire Doctorat, est souvent fait avec des logiciels libres. La traduction de nos solutions dans ces langages ne pose pas de difficulté particulière, d'autant plus que pour privilégier la lisibilité des programmes nous n'avons pas toujours cherché à utiliser les techniques de programmation conduisant à la concision maximale d'écriture.

Ionut Danaila, Pascal Joly, Sidi Mahmoud Kaber, Marie Postel.
Paris, 21 décembre 2004.

Projet 1

Approximation numérique de quelques équations aux dérivées partielles modèles

Fiche du projet

Difficulté :	1
Notions développées :	Équations différentielles linéaires : méthodes d'intégration numérique, schémas aux différences finies : schémas d'Euler, de Runge-Kutta.
Domaines d'application :	Phénomènes de transport, diffusion, propagation d'ondes.

Le but de ce projet est de mettre en évidence les propriétés mathématiques et physiques des équations aux dérivées partielles (EDP), présentées sous la forme la plus simple possible. En fait, il ne s'agit pas d'un véritable projet, basé sur un problème bien défini, mais plutôt d'une somme d'exercices théoriques qui visent à familiariser le lecteur avec quelques techniques de base de discrétisation et d'intégration des EDP. Nous commençons par présenter ces techniques dans le cas simple des équations différentielles ordinaires (EDO), pour les étendre ensuite aux EDP modèles (équation de convection, des ondes, de la chaleur). Une attention particulière sera

accordée à l'analyse des schémas numériques (précision, stabilité, dissipation) et à la comparaison des résultats numériques avec les solutions exactes.

1.1 DISCRÉTISATION D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE ORDINAIRE

Considérons l'équation différentielle ordinaire (EDO) : trouver une fonction dérivable $u : [0, T] \mapsto \mathbb{R}^m$, solution de

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad (1.1)$$

où T est un réel strictement positif et f est une fonction continue de $[0, T] \times \mathbb{R}^m$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$.

Définition 1.1 On appelle *problème de Cauchy*, le couplage de l'EDO (1.1) et d'une condition initiale

$$u(0) = u_0, \quad (1.2)$$

où u_0 est un vecteur de $\mathbb{R}^m$.

Nous renvoyons à un cours sur les équations différentielles, par exemple, [Crouzeix et Mignot, 1989], [Demailly, 1996], [Delabrière et Postel, 2004], pour tout ce qui concerne l'existence et l'unicité d'une solution du problème de Cauchy (1.1)-(1.2). Dans cette première partie du projet, nous présentons des méthodes numériques simples pour calculer une approximation de la solution dans le cas scalaire (on dit aussi 1D), $m = 1$.

Puisque l'ordinateur ne peut renvoyer qu'un nombre fini de résultats, la résolution numérique du problème de Cauchy (1.1)-(1.2) va commencer par choisir les points de calcul $t_0, t_1, \dots, t_N$ de l'intervalle $I = [0, T]$. On définit ainsi une *discrétisation* (ou un maillage) de l'intervalle I . La distribution équidistante (ou uniforme) des points de calcul est la plus simple et elle sera utilisée dans ce chapitre : l'intervalle $I = [0, T]$ est divisé en N intervalles I_n de même longueur

$h = T/N$ (h est appelé pas de discrétisation). On pose $I_n = [t_n, t_{n+1}]$ avec $t_n = nh$ ($t_0 = 0, t_N = T$, voir la figure 1.1). L'approximation numérique consiste à construire

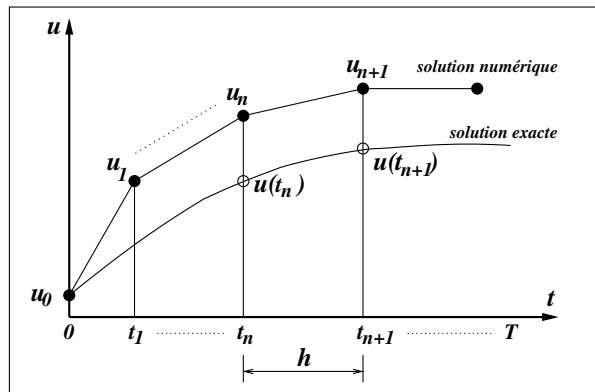


Figure 1.1 Discrétisation d'une EDO.