

mini Manuel

d'Algèbre

Cours et exercices corrigés

François Liret

Maître de conférences à l'université Paris Diderot

Charlotte Scribot

Professeure agrégée au Lycée de Créteil

DUNOD

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements

d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour

les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée. Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du

Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).

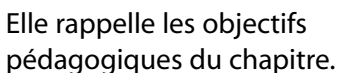


© Dunod, Paris, 2010
ISBN 978-2-10-056141-4

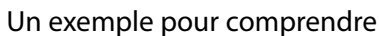
Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

La page d'entrée de chapitre



Le cours, concis et structuré, expose les notions importantes du programme.



Ils sont proposés en fin de chapitre, avec leur solution, pour se tester tout au long de l'année.

Sommaire

1	L'espace $\mathbb{R}^n$	1
1.1	Opérations sur les vecteurs	1
1.2	Sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$	4
1.3	Vecteurs linéairement indépendants	6
	<i>Exercices</i>	9
	<i>Solutions</i>	10
2	Dimension d'un sous-espace de $\mathbb{R}^n$	15
2.1	Bases d'un sous-espace vectoriel	15
2.2	Avec plusieurs sous-espace de $\mathbb{R}^n$	20
	<i>Exercices</i>	25
	<i>Solutions</i>	28
3	Résolution de systèmes	35
3.1	Méthode de Gauss	35
3.2	Systèmes homogènes	40
	<i>Exercices</i>	41
	<i>Solutions</i>	42
4	Applications linéaires	47
4.1	Définition	47
4.2	Matrice d'une application linéaire	49
4.3	Produit d'une matrice par un vecteur-colonne	51
4.4	Noyau et image	53

4.5	Équations d'un noyau, base d'un noyau	54
4.6	Injectivité et surjectivité	55
4.7	Endomorphisme, isomorphisme	58
4.8	Matrices d'une application linéaire	60
	<i>Exercices</i>	63
	<i>Solutions</i>	66
5	Application linéaire et dimension	73
5.1	Équations d'un sous-espace de $\mathbb{R}^p$	73
5.2	Théorème de la dimension	76
5.3	Conséquence pour les endomorphismes	77
5.4	Rang d'une application linéaire/d'un système de vecteurs	78
5.5	Méthodes pratiques pour déterminer le rang d'une application linéaire	78
	<i>Exercices</i>	82
	<i>Solutions</i>	84
6	Calcul matriciel	93
6.1	Format d'une matrice	93
6.2	Somme	94
6.3	Produit par un scalaire	95
6.4	Composition et produit	96
6.5	Inverse d'une matrice	99
6.6	Calcul de l'inverse d'une matrice	101
6.7	Transposée	103
6.8	Résumé des règles de calcul matriciel	104
	<i>Exercices</i>	105
	<i>Solutions</i>	107
7	Formes linéaires	115
7.1	Hyperplans	115
7.2	Opérations sur les formes linéaires	117
7.3	Forme linéaire et vecteur-ligne	117
7.4	Formes linéaires indépendantes	118

7.5	Sous-espace de $\mathcal{FL}_n$	119
7.6	Base duale d'une base de $\mathbb{R}^n$	120
7.7	Formes linéaires s'annulant sur un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$	122
7.8	Codimension d'un sous-espace de $\mathbb{R}^n$, nombre minimal d'équations	124
7.9	Théorème du rang	126
	<i>Exercices</i>	128
	<i>Solutions</i>	130

8 Changement de base 135

8.1	Matrice de passage	135
8.2	Coordonnées d'un vecteur	136
8.3	Inverse d'une matrice de passage	137
8.4	Matrices d'une application linéaire	137
8.5	Matrices d'un endomorphisme	138
8.6	Opérations sur les matrices	139
	<i>Exercices</i>	140
	<i>Solutions</i>	141

9 Espaces vectoriels 149

9.1	Définition et premiers exemples	149
9.2	Sous-espaces vectoriels	151
9.3	Applications linéaires	152
9.4	$\mathbb{R}$ -espaces vectoriels de dimension finie	155
9.5	Applications linéaires (dimension finie)	160
9.6	Matrices d'une application linéaire	163
9.7	Rang d'une application linéaire	165
	<i>Exercices</i>	167
	<i>Solutions</i>	168

10 Déterminant 173

10.1	Déterminants 2×2	173
10.2	Déterminants 3×3	176
10.3	Propriétés du déterminant 3×3	179
10.4	Produit vectoriel	183

<i>Exercices</i>	188
<i>Solutions</i>	190
11 Polynômes	197
11.1 Fonctions polynomiales	197
11.2 Notion de polynôme	198
11.3 Degré	200
11.4 Divisibilité	202
11.5 Racines	204
11.6 Polynômes à coefficients dans $\mathbb{C}$	205
11.7 Division euclidienne	207
11.8 Plus grand commun diviseur	210
11.9 Relation de Bézout	213
11.10 Polynôme dérivé	214
<i>Exercices</i>	217
<i>Solutions</i>	219
12 Fractions rationnelles	227
12.1 Égalité et opérations	227
12.2 Fraction rationnelle et division	229
12.3 Décomposition en somme d'éléments simples	230
12.4 Format d'une décomposition	232
12.5 Exemples	233
<i>Exercices</i>	237
<i>Solutions</i>	237
Formulaire sur les nombres complexes	239
Index	241



L'espace $\mathbb{R}^n$

Ce premier chapitre aborde les notions d'indépendance et d'espace engendré par des vecteurs dans les espaces vectoriels les plus simples : les sous-espaces de $\mathbb{R}^n$.

1.1 OPÉRATIONS SUR LES VECTEURS

Définition. Soit n un entier naturel non nul. L'ensemble $\mathbb{R}^n$ est l'ensemble des n -uplets $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de nombres réels.

En géométrie, le plan (ou l'espace) étant muni d'un repère, on peut décrire chaque vecteur par le couple ou le triplet de ses coordonnées, élément de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$. Pour ces raisons, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ et plus généralement $\mathbb{R}^n$, s'appellent des *espaces vectoriels*. Leurs éléments s'appellent des *vecteurs*.

Définitions

- La *somme* de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est définie par

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (x'_1, x'_2, \dots, x'_n) = (x_1 + x'_1, x_2 + x'_2, \dots, x_n + x'_n)$$

Autrement dit, on fait la somme coordonnée par coordonnée.

- Le *produit* d'un nombre $\lambda \in \mathbb{R}$ par un vecteur est donné par

$$\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$$

Dans ce contexte, λ est appelé un *scalaire*. Pour faire le produit d'un scalaire par un vecteur, on multiplie chaque coordonnée du vecteur par ce scalaire.

► Etant donnés des vecteurs u et v de $\mathbb{R}^n$, on dit que v est *colinéaire* à u , lorsqu'il existe un scalaire λ tel que $v = \lambda u$.

On note souvent les vecteurs en colonne plutôt qu'en ligne, on parle alors de *vecteur-colonne*. Le vecteur dont toutes les coordonnées sont nulles est noté 0 (au lieu de $(0, 0, \dots, 0)$).



Exemple

$$\begin{aligned} & \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix} \\ & \cdot \text{Le vecteur } \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix} \text{ est colinéaire à } \begin{bmatrix} -6 \\ 8 \\ 6 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Définition. Soient $v_1, v_2, \dots, v_p$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On appelle *combinaison linéaire* des vecteurs $v_1, v_2, \dots, v_p$ tout vecteur de la forme $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_p v_p$, où $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$.



Exemple. L'exemple précédent montre que le vecteur $\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix}$ est une combinaison linéaire de $v_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ et $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Définition. Pour tout entier i entre 1 et n , on note e_i le vecteur dont toutes les coordonnées sont nulles sauf la i -ème, égale à 1.

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \dots \quad e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ces vecteurs s'appellent les *vecteurs canoniques* de $\mathbb{R}^n$.

Tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ s'écrit (de manière unique) comme combinaison linéaire des vecteurs canoniques de $\mathbb{R}^n$. En effet,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_n \end{bmatrix} \\ &= x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n \end{aligned}$$

Lorsque $v_1, v_2, \dots, v_p$ ne sont pas les vecteurs canoniques de $\mathbb{R}^n$, pour reconnaître si un vecteur w est une combinaison linéaire des v_i , on résout l'équation linéaire

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_p v_p = w$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ sont des scalaires inconnus.



Exemple. (Dans $\mathbb{R}^3$)

Posons $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $w = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$.

Réolvons l'équation linéaire $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = w$, c'est-à-dire

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Cela revient à résoudre un système. Lors de la résolution de systèmes, on notera entre parenthèses les opérations effectuées ; la notation $(L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1)$ signifie ainsi que la ligne numéro 3 du nouveau système est obtenue en soustrayant 2 fois la ligne numéro 1 à la ligne numéro 3 du système précédent. Voici le système à résoudre :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 &= 3 \\ \lambda_2 - \lambda_3 &= 2 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= 4 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 &= 3 \\ \lambda_2 - \lambda_3 &= 2 \\ -\lambda_2 + \lambda_3 &= -2 \end{cases} \quad (L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1) \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 &= 3 \\ \lambda_2 - \lambda_3 &= 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 3 - \lambda_2 \\ \lambda_3 = -2 + \lambda_2 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $\lambda_2 \in \mathbb{R}$, on a $w = (3 - \lambda_2)v_1 + \lambda_2 v_2 + (-2 + \lambda_2)v_3$. On en déduit que w s'écrit d'une infinité de façons différentes comme combinaison linéaire de v_1, v_2 et v_3 .

On remarque que l'égalité ci-dessus s'écrit

$$w = 3v_1 - 2v_3 + \lambda_2(-v_1 + v_2 + v_3), \text{ où } -v_1 + v_2 + v_3 = 0.$$

1.2 SOUS-ESPACE VECTORIEL DE $\mathbb{R}^n$

1.2.1 Définition

Définition. On appelle *sous-espace vectoriel* de $\mathbb{R}^n$ toute partie $E \subset \mathbb{R}^n$ telle que

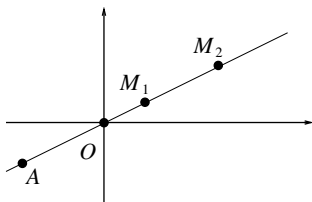
- 0 appartient à E ,
- pour tous $w_1, w_2 \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, les vecteurs $w_1 + w_2$ et λw_1 appartiennent aussi à E .

Ainsi une partie E de $\mathbb{R}^n$, contenant 0, est un sous-espace vectoriel si et seulement si E est stable par les opérations définies dans le premier paragraphe : la somme de vecteurs et la multiplication d'un scalaire par un vecteur.



Exemple. Identifions $\mathbb{R}^2$ à l'ensemble des points du plan muni d'un repère d'origine O . Un vecteur $\overrightarrow{OM} : \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ est ainsi identifié au point M de coordonnées (a, b) .

- $\{O\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
- Toute droite passant par l'origine du repère est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. En effet, si M_1 et M_2 sont sur une même droite (OA) , alors $\overrightarrow{OM}_1$ est colinéaire à $\overrightarrow{OA}$, de même $\overrightarrow{OM}_2$ est colinéaire à $\overrightarrow{OA}$. Par suite leur somme $\overrightarrow{OM}_3$ est colinéaire à $\overrightarrow{OA}$ donc M_3 est sur (OA) . De même, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, le vecteur $\lambda \overrightarrow{OM}_1$ est colinéaire à $\overrightarrow{OA}$, donc le point M_4 tel que $\overrightarrow{OM}_4 = \lambda \overrightarrow{OM}_1$ est sur la droite (OA) .



- Le plan $\mathbb{R}^2$ est aussi un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

Attention : puisque tout sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ contient $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, une droite qui ne passe pas par O n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$!