ECT
2e année

Sylvain Rondy
Pierre Berlandi
Gianfranco Niffoi
Nicolas Pierson
Anne-Sophie Pierson-Fertel

PRÉPAS SCIENCES

COLLECTION DIRIGÉE PAR **BERTRAND HAUCHECORNE**

MATHÉMATIQUES INFORMATIQUE

3e édition

NOUVEAUX PROGRAMMES !

- Objectifs
- Cours résumé
- Méthodes
- Vrai/faux, erreurs classiques
- Exercices de base et d'approfondissement
- Sujets de concours (écrits, oraux)
- Corrigés détaillés et commentés
- Éléments d'informatique et d'algorithmique avec Python

ellipses

PRÉPAS SCIENCES
collection dirigée par Bertrand Hauchecorne

Mathématiques Informatique ECT - 2e année

3e édition

NOUVEAUX PROGRAMMES

ouvrage coordonné par

Sylvain RONDY
Professeur au lycée Saint Jean (Douai)

Pierre BERLANDI
Professeur au lycée Saint Jean (Douai)

Gianfranco NIFFOI
Professeur au lycée Saint Michel de Picpus (Paris)

Nicolas PIERSON
Professeur au lycée Saint Jean (Douai)

Anne-Sophie PIERSON-FERTEL
Professeur au lycée Saint Jean (Douai)

ellipses

COLLECTION
PRÉPAS SCIENCES

Retrouvez tous les titres de la collection et des extraits sur www.editions-ellipses.fr

Les notices culturelles « un scientifique » et « un peu d'histoire »
des pages de titre des chapitres ont été rédigées par Bertrand Hauchecorne.

ISBN 9782340-066694
©Ellipses Édition Marketing S.A., 2022
8/10 rue la Quintinie 75015 Paris

DANGER
LE
PHOTOCOPILLAGE
TUE LE LIVRE

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5.2° et 3°a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

Réussir en classes préparatoires nécessite d'assimiler rapidement un grand nombre de connaissances, mais surtout de savoir les utiliser, à bon escient, et les rendre opérationnelles au moment opportun. Bien sûr, l'apprentissage du cours de votre professeur jour après jour est indispensable. Cependant, on constate que pour beaucoup, c'est loin d'être suffisant. Combien d'entre vous ont bien appris leur cours et pourtant se trouvent démunis lors d'un devoir surveillé, et plus grave, le jour du concours.

Cette collection a été conçue pour répondre à cette difficulté. Suivant scrupuleusement le programme, chaque ouvrage est scindé en chapitres, dont chacun correspond, en gros, à une semaine de cours.

Le résumé de cours est là pour vous remettre en mémoire toutes les notions à connaître. Sa relecture est indispensable avant un devoir surveillé ou le passage d'une colle relative au thème traité. Les résultats sont énoncés sans démonstration.

La partie « méthodes » vous initie aux techniques utiles pour résoudre les exercices classiques. Complément indispensable du cours, elle l'éclaire et l'illustre.

La partie « vrai/faux » permet de tester votre recul par rapport au programme et de vous révéler les mauvais réflexes à rectifier. Son corrigé est l'occasion de mettre en garde contre des **erreurs classiques**.

Les exercices sont incontournables pour assimiler le programme et pour répondre aux exigences du concours. Des **indications**, que les meilleurs pourront ignorer, permettront de répondre aux besoins de chacun, selon son niveau. Les **corrigés** sont rédigés avec soin et de manière exhaustive.

Ainsi cet ouvrage vous accompagnera tout au long de l'année et vous guidera dans votre cheminement **vers le passage en deuxième année et la réussite aux concours**.

Bertrand Hauchecorne

Sommaire

Premier semestre

1. Matrices et systèmes linéaires 1
2. Intégration sur un segment : compléments 47
3. Sommes et produits 73
4. Séries 97
5. Couples et suites de variables aléatoires finies 117
6. Covariance – Corrélation linéaire 157
7. Variables aléatoires discrètes infinies 187
8. Lois discrètes infinies usuelles 217

Deuxième semestre

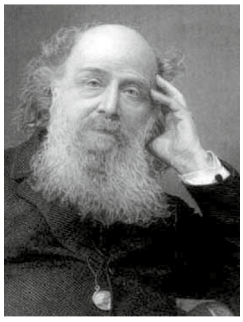
9. Diagonalisation des matrices carrées 241
10. Intégrales impropres 271
11. Variables aléatoires à densité 293
12. Lois à densité usuelles 335
13. Loi faible des grands nombres – Intervalles de confiance 371
14. Python : statistiques et compléments sur le langage SQL 395
15. Python : simulation de lois de probabilité 429

Index 465

Chapitre 1

Matrices et systèmes linéaires

UN MATHÉMATICIEN



Le mathématicien anglais **James Sylvester** a passé une partie de sa carrière aux États-Unis. Suite à sa rencontre avec Arthur Cayley, il se tourne vers l'algèbre linéaire. Il considère des tableaux de nombres qu'il nomme *matrices* mais c'est Cayley qui définit les opérations de somme et produit. Ses travaux, souvent incomplets et peu rigoureux, sont pleins d'idées originales et son aptitude à l'abstraction lui a permis de généraliser de nombreux problèmes concrets.

Un peu d'histoire

La recherche de solutions de systèmes d'équations est très ancienne mais ce n'est qu'au XVIII^{e} siècle qu'apparaissent des méthodes théoriques de résolution. Deux mathématiciens, Colin Maclaurin et Gabriel Cramer, étudient les intersections de courbes définies par des équations analytiques, c'est-à-dire de la forme $f(x,y)=0$. Ceci les amène à concevoir des méthodes de résolution de systèmes. Alexandre Vandermonde poursuit ces recherches et introduit la notion de déterminant.

Au milieu du siècle suivant, les mathématiciens anglais Arthur Cayley et James Sylvester ont l'idée de ne plus noter les inconnues, mais seulement les coefficients associés, sous forme de tableau. On obtient ainsi un maniement beaucoup plus aisé. L'avenir leur donnera raison puisque l'étude des applications linéaires se trouve grandement facilitée par l'utilisation de tels tableaux appelés matrices.

Objectifs

Les incontournables

- Connaître les définitions des matrices particulières (matrices diagonales, triangulaires, symétriques...).
- Maîtriser les opérations matricielles, en particulier le produit.
- Connaître les propriétés des opérations matricielles.
- Connaître la définition d'une matrice inversible et les propriétés de l'inverse.
- Connaître la méthode du pivot de Gauss.

Et plus si affinités

- Savoir utiliser la méthode de Gauss-Jordan pour inverser une matrice.
- Savoir travailler sur des matrices de taille n.

■■ Résumé de cours

■ Matrices (rappels)

Définition 1.1. — Soit $(n,p)\in(\mathbb{N}^*)^2$. On appelle matrice à n lignes et p colonnes le tableau de réels suivant : $A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$.

L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Si $p=n$, la matrice A est dite *carrée d'ordre n* et on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble de ces matrices.

Remarque 1.1. — On considère qu'un élément de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ est un nombre réel.

Notation 1.1. — La matrice A s'écrit : $A=(a_{i,j})_{1\le i\le n,1\le j\le p}$ ou simplement, s'il n'y a pas d'ambiguïté sur le nombre de lignes et de colonnes, $A=(a_{i,j})$.

Définition 1.2. — Si tous les éléments de la matrice A sont nuls, on dit que A est la matrice nulle et on note $A=0$.

On appelle *matrices lignes* les éléments de $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{R})$ et *matrices colonnes* ceux de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Définition 1.3. — Deux matrices sont égales si elles ont même nombre de lignes, même nombre de colonnes et si elles ont les mêmes coefficients.

■ Opérations matricielles (rappels)

❑ Addition de deux matrices

Définition 1.4. — Soit deux matrices $A=(a_{i,j})$ et $B=(b_{i,j})$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On appelle somme de A et de B la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, notée $A+B$, définie par $A+B=(c_{i,j})$ où : $\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]$, $c_{i,j}=a_{i,j}+b_{i,j}$.

❑ Produit d'une matrice par un réel

Définition 1.5. — Soit une matrice $A=\left(a_{i,j}\right)$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et λ un réel.

On appelle produit de A par le réel λ, la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ notée λA définie par $\lambda A=\left(a'_{i,j}\right)$ où : $\forall (i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!],\ a'_{i,j}=\lambda a_{i,j}$.

Exemple 1.1. — Si $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -5\\ 2 & -4 & 6\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}-2 & -3 & 4\\ 1 & -4 & -5\end{pmatrix}$, on a : $2A-3B=\begin{pmatrix}8 & 9 & -22\\ 1 & 4 & 27\end{pmatrix}$.

❑ Produit de deux matrices

Définition 1.6. — Soit $(n,p,q)\in\left(\mathbb{N}^*\right)^3$, $A=\left(a_{i,j}\right)$ une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B=\left(b_{i,j}\right)$ une matrice de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$. On appelle produit de A par B la matrice de $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{R})$ notée AB définie par $AB=\left(c_{i,j}\right)_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq q}$ où : $\forall (i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,q]\!],\ c_{i,j}=\sum_{k=1}^{p}a_{i,k}\,b_{k,j}$. Cette formule n'est pas à retenir, il faut juste savoir multiplier deux matrices sur des cas concrets.

⇨ **Méthode 1.1. Comment multiplier deux matrices ?**

Remarque 1.2. — Il est exceptionnel que, si A et B sont deux matrices, on ait $AB = BA$. Lorsque cependant c'est le cas, on dit que les matrices A et B *commutent*.

Remarque 1.3. — Le produit de 2 matrices peut être nul sans qu'aucune des deux matrices ne soit nulle : par exemple, si $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 4\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}2 & -6\\ 1 & -3\end{pmatrix}$, alors $AB=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

❑ Propriétés des opérations matricielles

Propriétés 1.1. — Pour toutes matrices A, B, C telles que les opérations ci-dessous soient possibles, on a :

- $A(BC)=(AB)C$.
- $A(B+C)=AB+AC$ et $(A+B)C=AC+BC$.
- $\forall\lambda\in\mathbb{R},\ A(\lambda B)=(\lambda A)B=\lambda AB$.

❑ Transposée d'une matrice

Définition 1.7. — Soit une matrice $A=\left(a_{i,j}\right)$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

On appelle *transposée* de A la matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ noté ${}^tA$ définie par ${}^tA=\left(a'_{i,j}\right)$ où :

$$\forall (i,j)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,n]\!],\ a'_{i,j}=a_{j,i}.$$

Exemple 1.2. — Si $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -5\\ 2 & -4 & 6\end{pmatrix}$, alors ${}^tA=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -4\\ -5 & 6\end{pmatrix}$.

Remarque 1.4. — Si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, ${}^tXY$ est le réel égal à $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

Propriétés 1.2. — Pour toutes matrices A et B telles que $A+B$ existe et pour tout réel λ, on a :

- ${}^t\left({}^tA\right) = A$.
- ${}^t\left(A+B\right) = {}^tA + {}^tB$.
- ${}^t\left(\lambda A\right) = \lambda\, {}^tA$.

■ Matrices carrées

❑ Définitions

Définitions 1.8. — Soit $A = \left(a_{i,j}\right)$ une matrice de $\mathcal{M}_n\left(\mathbb{R}\right)$.

- Pour tout i élément de $[\![1,n]\!]$, les réels $a_{i,i}$ sont appelés coefficients diagonaux.
- A est une matrice *triangulaire inférieure* si pour tout (i,j) de $[\![1,n]\!]^2$ tel que $i<j$, $a_{i,j}=0$.
- A est une matrice *triangulaire supérieure* si pour tout (i,j) de $[\![1,n]\!]^2$ tel que $i>j$, $a_{i,j}=0$.
- A est une matrice *diagonale* si pour tout (i,j) de $[\![1,n]\!]^2$ tel que $i\neq j$, $a_{i,j}=0$.

Définition 1.9. — La *matrice identité* (ou matrice unité) de $\mathcal{M}_n\left(\mathbb{R}\right)$ est la matrice diagonale dont tous les éléments diagonaux sont égaux à 1. Elle est notée I_n ou tout simplement I.

Remarque 1.5. — Une matrice est dite *scalaire* si elle est de la forme αI, où α est un réel.

Propriété 1.3. — $\forall A \in \mathcal{M}_n\left(\mathbb{R}\right)$, $AI = IA = A$ et $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}\left(\mathbb{R}\right)$, $IX = X$.

❑ Puissance d'une matrice carrée

Définition 1.10. — Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n\left(\mathbb{R}\right)$.

Par convention, on pose $A^0 = I_n$ et, pour tout entier naturel p non nul, on pose $A^p = A^{p-1}A$.

En fait, pour tout p de $\mathbb{N}^*$, A^p est le produit de p matrices toutes égales à A.

⇨ **Méthode 1.2. Comment calculer une puissance d'une matrice par conjecture ?**

❑ Formule du binôme

Théorème 1.1. — Si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n\left(\mathbb{R}\right)$ qui commutent ($AB = BA$), alors pour tout entier naturel p, on a : $\left(A+B\right)^p = \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}A^kB^{p-k} = \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}A^{p-k}B^k$.

⇨ **Méthode 1.3. Comment utiliser la formule du binôme ?**

❑ Matrices carrées inversibles

Définition 1.11. — On dit qu'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est *inversible* s'il existe une matrice B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AB = BA = I$. La matrice B est *l'inverse* de A et on note $B = A^{-1}$.

Théorème 1.2. — Si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = I$, alors A et B sont inversibles et on a : $A^{-1} = B$ et $B^{-1} = A$.

⇨ **Méthode 1.4. Comment calculer l'inverse d'une matrice carrée par produit ?**

Exemple 1.3. — Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. $AB = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Comme $AB = I$, alors A et B sont inversibles et on a : $B = A^{-1}$ (ou si l'on veut $A = B^{-1}$).

Propriétés 1.4. — Si A est inversible, alors :

- A^{-1} est inversible et $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.
- Pour tout entier naturel p, A^p est inversible et $\left(A^p\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^p$, matrice que l'on note A^{-p}.
- Si A et B sont inversibles alors AB est inversible et on a : $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

❑ Inversibilité des matrices carrées d'ordre 2

Propriété 1.5. — La matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$. Dans ce cas, on a :

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

❑ Propriétés des matrices diagonales

Propriété 1.6. — Le produit de deux matrices diagonales est la matrice diagonale obtenue en multipliant entre eux les termes diagonaux de même place.

Par exemple, si $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ et $D' = \begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & b' \end{pmatrix}$, alors $DD' = \begin{pmatrix} aa' & 0 \\ 0 & bb' \end{pmatrix}$.

Propriété 1.7. — La puissance n^{e} d'une matrice diagonale est la matrice diagonale obtenue en élevant les termes diagonaux à la puissance n.

Par exemple, si $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, alors $D^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix}$.

Propriété 1.8. — Une matrice diagonale D est inversible lorsque tous ses coefficients diagonaux sont non nuls. D^{-1} est alors obtenue en inversant les coefficients diagonaux de D.

Par exemple, si $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$, alors $D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a & 0 \\ 0 & 1/b \end{pmatrix}$

■ Systèmes linéaires

❑ Écriture matricielle d'un système

Définition 1.12. — Soit le système linéaire (S) $\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,p}x_p = y_1 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \ldots + a_{n,p}x_p = y_n \end{cases}$.

La matrice $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,p} \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est appelée matrice associée au système (S).

Notation 1.2 — Avec $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, (S) $\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,p}x_p = y_1 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \ldots + a_{n,p}x_p = y_n \end{cases}$ s'écrit $AX = Y$.

❑ Interprétation matricielle des systèmes de Cramer

Propriété 1.9. — Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
La matrice A est inversible si, et seulement si, A est la matrice d'un système de Cramer, c'est-à-dire si, et seulement si, le système $AX = Y$, d'inconnue X élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, possède une seule solution, cette solution étant $X = A^{-1}Y$.

⇨ **Méthode 1.5. Comment calculer l'inverse d'une matrice carrée par résolution de système ?**

Propriété 1.10. — Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a l'équivalence suivante :
A est inversible si et seulement si, pour toute matrice X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$: $AX = 0 \Leftrightarrow X = 0$.

Théorème 1.3. — Soit A une matrice **triangulaire**.
A est inversible si et seulement si les coefficients diagonaux de A sont tous non nuls.

❑ Réduite de Gauss

Définition 1.13. — Soit A une matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On appelle réduite de Gauss de A, toute matrice triangulaire obtenue par des opérations élémentaires effectuées sur les lignes de A.

Remarque 1.6. — Les opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice sont les mêmes que celles décrites sur les systèmes au **chapitre 15** du **tome 1**, à savoir :

- $L_i \leftrightarrow L_j$: échange des lignes i et j.
- $L_i \leftarrow aL_i$ (avec $a \neq 0$) : remplacement de la ligne i par son produit par un réel non nul.
- $L_i \leftarrow L_i + bL_j$: remplacement de la ligne i par sa somme avec un multiple de la ligne j.
- Les deux dernières opérations peuvent se regrouper en : $L_i \leftarrow aL_i + bL_j$ (avec $a \neq 0$).

Théorème 1.4. — Soit A une matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Si une réduite de Gauss de A est inversible, alors A est inversible.
- Si A est inversible, alors toutes ses réduites de Gauss sont inversibles.

⇨ **Méthode 1.6. Comment montrer qu'une matrice est (ou n'est pas) inversible ?**

❑ Méthode de Gauss-Jordan

Théorème 1.5. — Toute matrice inversible peut se transformer en la matrice identité à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes de cette matrice et son inverse s'obtient en effectuant, dans le même ordre, les mêmes opérations élémentaires sur les lignes de la matrice identité.

⇨ **Méthode 1.7. Comment calculer l'inverse d'une matrice carrée par la méthode de Gauss-Jordan ?**

■ Le produit matriciel

❑ Méthode 1.1. Comment multiplier deux matrices ?

Soit $A=(a_{i,j})$ une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B=(b_{i,j})$ une matrice de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$. On cherche à calculer AB.
On s'assure de la validité du produit en vérifiant que le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B. On sait alors que $AB=(c_{i,j})\in\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{R})$ et, d'après la définition, pour tout couple (i,j) élément de $[\![1,n]\!]\times[\![1,q]\!]$, on a :

$c_{i,j}=\sum_{k=1}^{p}a_{i,k}b_{k,j}=a_{i,1}b_{1,j}+a_{i,2}b_{2,j}\ldots+a_{i,p}b_{p,j}$. Ainsi, le coefficient $c_{i,j}$ situé à la croisée de la i^{e} ligne et de la j^{e} colonne de AB s'obtient en considérant les coefficients de la i^{e} ligne de A et de la j^{e} colonne de B.

⇨ Exercices 1.1, 1.2, 1.4, 1.5, 1.6, 1.9, 1.17

Exemple. Soit $A=\begin{pmatrix}1&-1&3\\0&5&-2\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}0&-2&1&-3\\1&2&1&0\\-1&3&2&1\end{pmatrix}$. Calculer AB.

$A\in\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ et $B\in\mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R})$ donc le produit AB est possible et AB appartient à $\mathcal{M}_{2,4}(\mathbb{R})$.

$$AB=\begin{pmatrix}1&-1&3\\0&5&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-2&1&-3\\1&2&1&0\\-1&3&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&5&6&0\\7&4&1&-2\end{pmatrix}.$$

Par exemple, le coefficient $c_{2,3}$ du produit AB s'obtient en considérant les coefficients de la 2^{e} ligne de A et ceux de la 3^{e} colonne de B : $c_{2,3}=0\times1+5\times1-2\times2=1$.

Remarque. On peut aussi présenter le produit matriciel sous la forme suivante. Cette présentation est pratique pour visualiser les calculs mais prend de la place !

$$\begin{array}{c|c}
 & \begin{pmatrix}0&-2&1&-3\\1&2&1&0\\-1&3&2&1\end{pmatrix}\\
\hline
\begin{pmatrix}1&-1&3\\0&5&-2\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-4&5&6&0\\7&4&1&-2\end{pmatrix}
\end{array}.$$

■ Puissances d'une matrice

❑ Méthode 1.2. Comment calculer la puissance d'une matrice par conjecture ?

A étant une matrice carrée, pour calculer A^n ($n \in \mathbb{N}$), on peut calculer les premières puissances A^2, A^3, ... Puis on propose une formule donnant A^n que l'on démontre souvent par récurrence.

⇨ **Exercices 1.4, 1.5, 1.16**

Exemple 1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer, pour tout entier naturel *n*, la matrice A^n.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3A.$$

On propose de montrer par récurrence que pour tout entier naturel *n* non nul : $A^n = 3^{n-1}A$.
La proposition est vraie pour $n = 1$: en effet, on a bien $A^1 = 3^0 A$.
Supposons, pour *n* fixé dans $\mathbb{N}^*$, que $A^n = 3^{n-1}A$. Montrons que $A^{n+1} = 3^n A$.
$A^{n+1} = A^n \times A = 3^{n-1}A \times A$ par hypothèse de récurrence. On en déduit :
$A^{n+1} = 3^{n-1}A^2 = \left(3^{n-1} \times 3\right)A$, car $A^2 = 3A$, et on a enfin : $A^{n+1} = 3^n A$.

Conclusion. Pour tout entier naturel *n* non nul, $A^n = 3^{n-1}A$ (et bien sûr $A^0 = I$).

Exemple 2. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer, pour tout *n* entier naturel, la matrice A^n.

$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$. On en déduit immédiatement que :

$\forall k \in \mathbb{N}$, $A^{2k} = \left(A^2\right)^k = \left(-I\right)^k = \left(-1\right)^k I$ et $A^{2k+1} = A^{2k} \times A = \left(-1\right)^k I \times A = \left(-1\right)^k A$.

En conclusion, pour tout entier naturel *k*, on a : $A^{2k} = \left(-1\right)^k I$ et $A^{2k+1} = \left(-1\right)^k A$.
Remarque : Dans ce cas, il est inutile de raisonner par récurrence.

❑ Méthode 1.3. Comment utiliser la formule du binôme ?

Dans certains cas, on peut écrire une matrice carrée *A* comme somme de deux matrices qui commutent. Souvent, l'une de ces matrices est *I*, ou une matrice scalaire (αI). On calcule alors A^n ($n \in \mathbb{N}$) à l'aide de la formule du binôme.

⇨ **Exercices 1.6, 1.7**

Exemple. Soit $A=\begin{pmatrix}5 & -4\\ 4 & -3\end{pmatrix}$. En posant $B=A-I$, calculer A^n pour tout entier naturel n.

$B=\begin{pmatrix}4 & -4\\ 4 & -4\end{pmatrix}$. On a $A=I+B$ et, comme I et B commutent, la formule du binôme s'applique :

$\forall n\in\mathbb{N}, A^n=(I+B)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B^k$.

De plus, on a $B^2=\begin{pmatrix}4 & -4\\ 4 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & -4\\ 4 & -4\end{pmatrix}=0$ donc : $\forall k\geq 2,\ B^k=B^2B^{k-2}=0$.

$\forall n\geq 2,\ A^n=\sum_{k=0}^{1}\binom{n}{k}B^k+\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}B^k=I+nB+0=I+nB$.

Comme cette formule reste valable pour $n=0$ ($A=I$) et $n=1$ ($A=I+B$), on peut conclure :

$\forall n\in\mathbb{N},\ A^n=I+nB=\begin{pmatrix}1+4n & -4n\\ 4n & 1-4n\end{pmatrix}$.

■ Matrices carrées inversibles

❑ Méthode 1.4. Comment calculer l'inverse d'une matrice carrée par produit ?

Soit A une matrice carrée. Si l'on prouve qu'il existe une matrice B telle que $AB=I$ (ou $BA=I$), alors on peut conclure : A est inversible et $A^{-1}=B$.

⇨ Exercices 1.2, 1.9, 1.17

Exemple. Soit les matrices $P=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 3 & 2 & 1\\ -2 & -1 & 1\end{pmatrix}$ et $Q=\begin{pmatrix}-3 & -1 & -5\\ 5 & 3 & 7\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

Calculer PQ. En déduire que P est inversible et exprimer son inverse.

On trouve $PQ=\begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}=4I$. On en déduit que $P\times\frac{1}{4}Q=\frac{1}{4}PQ=\frac{1}{4}\times 4I=I$. Donc P est inversible, avec $P^{-1}=\frac{1}{4}Q=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-3 & -1 & -5\\ 5 & 3 & 7\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

❑ Méthode 1.5. Comment calculer l'inverse d'une matrice carrée par résolution de système ?

Soit A une matrice carrée. On pose le système $AX = Y$. La matrice A est inversible si, et seulement si, le système est de Cramer. Dans le cas où A est inversible, $AX = Y$ équivaut à $X = A^{-1}Y$, ce qui permet de donner A^{-1}.

⇨ **Exercices 1.3, 1.12**

Exemple. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et donner son inverse.

On note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Le système $AX = Y$ s'écrit $\begin{cases} 2x + 2y + 3z = a \\ x - y = b \\ -x + 2y + z = c \end{cases}$. On le résout :

$$\begin{cases} 2x + 2y + 3z = a \\ x - y = b \\ -x + 2y + z = c \end{cases} \underset{\substack{L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 + L_1}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 2x + 2y + 3z = a \\ -4y - 3z = -a + 2b \\ 6y + 5z = a + 2c \end{cases} \underset{L_3 \leftarrow 2L_3 + 3L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 2x + 2y + 3z = a \\ -4y - 3z = -a + 2b \\ z = -a + 6b + 4c \end{cases}.$$

Le système est de Cramer (les coefficients diagonaux du système triangulaire sont tous non nuls) donc la matrice A est inversible. Ainsi $AX = Y$ équivaut à $X = A^{-1}Y$.
Pour déterminer A^{-1}, il reste à achever la résolution, toujours "en remontant", et après quelques calculs, on obtient : $\begin{cases} x = a - 4b - 3c \\ y = a - 5b - 3c \\ z = -a + 6b + 4c \end{cases}$, ce qui donne $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$.

❑ Méthode 1.6. Comment montrer qu'une matrice carrée est (ou n'est pas) inversible ?

Pour savoir si une matrice carrée A est inversible, on peut déterminer l'une de ses réduites de Gauss. On conclut ensuite en utilisant le **théorème 1.4**.

⇨ **Exercice 1.14**

Exemple 1. La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

Cherchons une réduite de Gauss de A.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow 4L_3 - 3L_2 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Cette dernière matrice est une matrice triangulaire et tous ses coefficients diagonaux sont non nuls. Conclusion : *A* est inversible.

Exemple 2. La matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

Cherchons une réduite de Gauss de *A*.

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \leftarrow 4L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 - L_1 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 0 & 6 & -6 \\ 0 & -6 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 0 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cette dernière matrice est une matrice triangulaire et l'un de ses coefficients diagonaux est nul. Conclusion : *A* n'est pas inversible.

❑ Méthode 1.7. Comment calculer l'inverse d'une matrice carrée par la méthode de Gauss-Jordan ?

Soit *A* une matrice carrée. Si *A* est inversible, on transforme *A* en la matrice identité par des opérations élémentaires. Ces opérations élémentaires, appliquées dans le même ordre à la matrice identité, donnent A^{-1}. Les calculs sont menés de front comme dans l'exemple ci dessous qui reprend la matrice de la **méthode 1.5**.

⇨ **Exercice 1.13**

Exemple. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et donner son inverse.

On présente côte à côte les matrices *A* et *I*. On écrit à droite les opérations élémentaires qui permettent de transformer *A* en *I* et on les applique simultanément aux deux matrices :

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 + L_1 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -3 \\ 0 & 6 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 + 3L_2 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

À ce stade, la matrice de gauche est une réduite de Gauss de *A*, triangulaire dont les coefficients diagonaux sont tous non nuls, elle est inversible et *A* aussi.

Pour déterminer A^{-1}, on poursuit le processus comme suit :

$$\left(\begin{array}{ccc} 2 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 6 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 3L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 3L_3 \\ L_3 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc} 2 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{ccc} 4 & -18 & -12 \\ -4 & 20 & 12 \\ -1 & 6 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow 2L_1 + L_2 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{ccc} 4 & -16 & -12 \\ -4 & 20 & 12 \\ -1 & 6 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow (1/4)L_1 \\ L_2 \leftarrow -(1/4)L_2 \\ L_3 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{ccc} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{array}\right).$$

Ainsi : $A^{-1} = \left(\begin{array}{ccc} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{array}\right)$

■■ Vrai/Faux

A, B et C désignent des matrices définies de telle sorte que les propositions ci-dessous aient un sens.

		Vrai	Faux
1.	Si $AB = AC$, avec $A \neq 0$, alors on a : $B = C$.	☐	☐
2.	Si une matrice carrée A vérifie ${}^tA = -A$, alors les coefficients diagonaux de A sont nuls.	☐	☐
3.	Si X et Y sont des matrices colonnes de même taille, $X\,{}^tY$ est un réel.	☐	☐
4.	Si on a $A^2 + A = I$, on peut écrire $A(A+1) = I$, donc $A^{-1} = A+1$.	☐	☐
5.	Si A vérifie $A \neq I$ et $A^2 = A$, alors A n'est pas inversible.	☐	☐
6.	$A = 0 \Leftrightarrow A^2 = 0$.	☐	☐
7.	Si $A^2 = 2I$, alors A est inversible et $A^{-1} = 2A$.	☐	☐
8.	La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ commute avec toute matrice carrée d'ordre 1.	☐	☐
9.	La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible car ses coefficients diagonaux sont tous non nuls.	☐	☐
10.	Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 3, on a $A^k = 0$.	☐	☐

■■ Énoncé des exercices

❑ **Exercice 1.1.** — Un entraînement aux calculs matriciels. On donne :

$A=\begin{pmatrix}2 & 3 & -2\\ 4 & 2 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ -4 & 0 & 1\\ 3 & -1 & -2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 3 & -2\\ 4 & 2 & 0 & 1\\ 3 & 1 & -4 & -3\end{pmatrix}$ et $D=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 4\\ 3 & -4 & 2\end{pmatrix}$.

1. a) Calculer $2A-3D$.

b) Vérifier par le calcul que $(A+D)C=AC+DC$.

2. Vérifier sur cet exemple l'associativité du produit matriciel, c'est-à-dire : $(AB)C=A(BC)$.

3. Calculer ${}^tC\,{}^tA$ et vérifier que : ${}^t(AC)={}^tC\,{}^tA$.

❑ **Exercice 1.2.** — On note $I=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on donne :

$$A=\begin{pmatrix}4 & 1 & 1\\ 1 & 4 & 1\\ 1 & 1 & 4\end{pmatrix}$$

1. Calculer A^2 et montrer qu'il existe deux réels α et β tels que $A^2=\alpha A+\beta I$.

2. En déduire que la matrice A est inversible et exprimer A^{-1}.

❑ **Exercice 1.3.** — Autour de l'inversibilité.

1. Soit $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 2 & -4\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$ et $X=\begin{pmatrix}2\\ -1\\ -1\end{pmatrix}$.

Calculer AX. En raisonnant par l'absurde, en déduire que A n'est pas inversible.

2. Soit $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$.

a) Calculer $A\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$. Les matrices A et B sont-elles inversibles ?

b) Calculer les produits AB, BA et $(AB)^2$.

3. Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant : $AB\neq 0$ et $BA=0$.

a) Montrer que ni A ni B ne sont inversibles.

b) Calculer $(AB)^2$.

❑ **Exercice 1.4.** — Dans chacun des cas suivants, calculer A^2, A^3, puis A^n pour tout entier naturel n.

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

❑ **Exercice 1.5.** — On donne $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2, A^3, puis A^n pour tout entier naturel n.

2. La matrice A est-elle inversible ?

❑ **Exercice 1.6.** — On donne $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A peut s'écrire sous la forme $A = I + J$, où J est une matrice que l'on précisera.

2. a) Calculer J^2 et J^3, puis , pour tout entier $k \geq 3$, J^k.

b) En déduire, pour tout n entier naturel, l'expression de A^n en fonction de I, J et n.

❑ **Exercice 1.7.*** — On donne $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. En utilisant la formule du binôme de Newton, montrer que $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 9^k (-2)^{n-k} = 7^n - (-2)^n$.

2. a) Exprimer J^2 en fonction de J.

b) En déduire, par récurrence, pour tout n entier naturel, l'expression de J^k en fonction de J.

3. a) Exprimer A sous la forme $\alpha I + \beta J$, où α et β sont deux réels. .

b) En déduire l'expression de A^n pour tout entier naturel n.

❑ **Exercice 1.8.*** — Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par la donnée de $x_0 = 1$, $y_0 = 0$, et les relations de récurrence $\begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{3}x_n + \frac{3}{4}y_n \\ y_{n+1} = \frac{2}{3}x_n + \frac{1}{4}y_n \end{cases}$, valables pour tout entier naturel n.

On pose, pour tout entier naturel n, $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.

1. a) Donner U_0.

b) Déterminer une matrice A telle que, pour tout entier $n \geq 0$, on ait : $U_{n+1} = AU_n$.

c) Montrer, par récurrence, que, pour tout entier naturel n, on a : $U_n = A^n U_0$.

2. On pose $P = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$. Vérifier que P est inversible et que l'on a $P^{-1} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 8 & -9 \end{pmatrix}$.

3. Soit $D = P^{-1}AP$.

a) Calculer D, puis, pour tout entier $n \geq 0$, donner D^n en fonction de n.

b) Montrer que $A = PDP^{-1}$.

4. a) Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 0$, on a : $A^n = PD^nP^{-1}$.

b) En déduire l'expression de A^n sous la forme d'un tableau de nombres.

c) Déterminer x_n et y_n en fonction de n, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$.

❑ **Exercice 1.9.*** — On donne : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. a) Calculer A^2, puis A^3.

b) En déduire que A n'est pas inversible.

2. a) Calculer $(I - A)(I + A + A^2)$.

b) En déduire que $I - A$ est inversible et donner son inverse.

3. Montrer également que $I + A$ est inversible et donner son inverse.

❑ **Exercice 1.10.** — Soit A la matrice définie par : $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $A^2 + 2A - 3I = 0$, puis en déduire que A est inversible et donner A^{-1} en fonction de I et A.

2. a) Montrer qu'il existe deux suites (a_n) et (b_n) telles que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = a_n A + b_n I$. Déterminer les relations de récurrence vérifiées par ces deux suites.

b) Calculer $a_n + b_n$ et en déduire que la suite (b_n) est une suite arithmético-géométrique puis calculer successivement b_n, a_n et A^n en fonction de n.

❑ **Exercice 1.11.** — En résolvant le système $AX = 0$, d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible.

❑ **Exercice 1.12.** * * — Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et $A=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 \\ \vdots & \iddots & \lambda_2 & 0 \\ 0 & \iddots & \iddots & \vdots \\ \lambda_n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$, où $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ sont des réels non nuls. On pose $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

1. Écrire le système $AX=B$ puis le résoudre.

2. En déduire que A est inversible et calculer l'inverse de A.

❑ **Exercice 1.13.** — Montrer que les matrices suivantes sont inversibles et donner leur inverse.

1. $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ **2.** $B=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ **3.** $C=\begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, avec a réel.

❑ **Exercice 1.14.** — Soit a un réel donné. On donne $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$.

Pour quelle(s) valeur(s) de a la matrice A est-elle inversible ?

❑ **Exercice 1.15.** * — On dit que A est une matrice *symétrique* si ${}^tA=A$ et que A est *antisymétrique* si ${}^tA=-A$.

1. Donner la forme des matrices symétriques de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

2. Donner la forme des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

❑ **Exercice 1.16.** * * — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\forall x\geq 0,\ f(x)=\dfrac{2x+1}{x+2}$.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0=\dfrac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n : $u_{n+1}=f(u_n)$.

1. a) On note f' la fonction dérivée de f. Calculer pour tout réel x positif, $f'(x)$.

b) Dresser le tableau de variation de f en précisant les limites aux bornes de l'ensemble de définition. Placer les réels 1 et $f(1)$ dans ce tableau.

2. a) Montrer que pour tout entier naturel n, le réel u_n appartient à l'intervalle [0; 1].

b) Établir que pour tout entier naturel n, on a : $1-u_{n+1}=\dfrac{1-u_n}{u_n+2}$.

c) En déduire que, pour tout entier naturel n, on a : $0 \leq 1-u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(1-u_n)$.

d) Établir par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq 1-u_n \leq \frac{1}{2^{n+1}}$.

e) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et donner sa limite.

3. Soit A, J et I les matrices d'ordre 2 suivantes : $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $J=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ et $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

a) Montrer que $J^2 = 2J$.

b) On rappelle que $A^0 = I$. Établir pour tout entier naturel n, la relation :

$$A^n = I + \frac{1}{2}(3^n - 1)J$$

c) Donner, sous forme matricielle, l'expression de A^n en fonction de n.

4. On note $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les deux suites définies par :

$$p_0 = 1,\ q_0 = 2 \text{ et pour tout } n \text{ de } \mathbb{N} : \begin{cases} p_{n+1} = 2p_n + q_n \\ q_{n+1} = p_n + 2q_n \end{cases}$$

On considère pour tout n de $\mathbb{N}$, la matrice X_n à deux lignes et une colonne définie par :

$$X_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$$

a) Établir par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $X_n = A^n X_0$.

b) En déduire l'expression de X_n en fonction de n et donner les valeurs de p_n et q_n en fonction de n.

5. a) À l'aide d'un raisonnement par récurrence, établir pour tout entier naturel n, l'égalité :

$$u_n = \frac{p_n}{q_n}$$

b) Donner l'expression de u_n en fonction de n et retrouver la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

D'après ESCP

❑ **Exercice 1.17.*** — On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_1 = 0,\ u_2 = \frac{4}{9} \text{ et : } \forall n \geq 1,\ u_{n+2} = \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{9}u_n$$

On considère également les quatre matrices carrées d'ordre 2 définies par :

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{2}{9} & \frac{1}{3}\end{pmatrix},\ P=\begin{pmatrix}3 & -3\\ 2 & 1\end{pmatrix},\ Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{9} & \frac{1}{3}\\ -\frac{2}{9} & \frac{1}{3}\end{pmatrix} \text{ et } D = QAP$$

ainsi que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, les matrices colonnes :

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} \text{ et } Y_n = QX_n$$

1. Vérifier que les deux matrices PQ et D sont diagonales.

2. En déduire que P est inversible et expliciter P^{-1}.

3. Soit $n \geq 1$. Donner, en la justifiant, la relation liant X_{n+1}, A et X_n. Prouver que $PY_n = X_n$. En déduire que : $Y_{n+1} = DY_n$.

4. Prouver que : $\forall n \geq 1,\ Y_n = D^{n-1}Y_1$.

5. Calculer Y_1 et expliciter les coefficients de la matrice colonne Y_n.

6. En déduire que :

$$\forall n \geq 1,\ u_n = \frac{4}{9}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right]$$

D'après ECRICOME

❑ **Exercice 1.18.*** — On considère l'ensemble $\mathcal{E}$ formé des matrices carrées d'ordre 3 qui vérifient la propriété suivante :

Une matrice $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ appartient à $\mathcal{E}$ si :

$$a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3 = c_1 + c_2 + c_3 = a_1 + b_1 + c_1 = a_2 + b_2 + c_2 = a_3 + b_3 + c_3$$

On note alors $s(A)$ la valeur commune de ces six nombres.

On note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice identité d'ordre 3 et J la matrice définie par $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que I et J appartiennent à $\mathcal{E}$ et donner les valeurs de $s(I)$ et $s(J)$.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

a) Calculer AJ et JA.

b) Montrer que A appartient à $\mathcal{E}$ si, et seulement si : $AJ = JA$.

c) Vérifier que, si A appartient à $\mathcal{E}$, alors $AJ = s(A)J$.

3. Soit A et B deux matrices de $\mathcal{E}$.

a) Montrer que le produit AB appartient à $\mathcal{E}$.

b) Établir l'égalité : $s(AB) = s(A)\ s(B)$.

4. Soit A une matrice inversible appartenant à $\mathcal{E}$.

a) Utiliser la question 2.b) pour montrer que A^{-1} appartient à $\mathcal{E}$.

b) Montrer que $s(A) \neq 0$. Exprimer $s(A^{-1})$ en fonction de $s(A)$.

D'après ESCP

■ Pour vous aider à démarrer

Exercice 1.3. Pour la question **3.a)**, on pourra raisonner par l'absurde.
Exercice 1.4. Calculer les premières puissances de A pour se faire une idée.
Exercice 1.5. Pour la question **1**, le calcul de A^n nécessite de distinguer les cas A^{2p} et A^{2p+1} puis de procéder par récurrence.
Exercice 1.6. Pour la question **2.b)**, utiliser la formule du binôme.
Exercice 1.7. Pour la question **3.b)**, on pensera dans la formule du binôme à isoler le terme d'indice zéro.

Exercice 1.8. Pour la question **1.b)**, il faut écrire le système $\begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{3}x_n + \frac{3}{4}y_n \\ y_{n+1} = \frac{2}{3}x_n + \frac{1}{4}y_n \end{cases}$ sous la forme $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.

Exercice 1.9. Pour la question **3**, calculer $(I+A)(I-A+A^2)$.

Exercice 1.14. Chercher une réduite de Gauss de A sans oublier de permuter la ligne 1 avec la ligne 3 (car on ne sait pas si a est différent de 0 ou pas).
Exercice 1.15. Pour la question **1**, la relation ${}^tA = A$ signifie que $a_{j,i} = a_{i,j}$.
Pour la question **2**, la relation ${}^tA = -A$ signifie que $a_{j,i} = -a_{i,j}$.
Exercice 1.16. Pour la question **1.a)**, utiliser la formule de dérivation de U/V.
Pour la question **2.a)**, procéder par récurrence.
Pour la question **2.c)**, établir d'abord que $u_n + 2 \geq 2$.
Pour la question **2.e)**, utiliser le théorème d'encadrement.
Pour la question **3.b)**, procéder par récurrence.
Pour la question **5.b)**, établir que $u_n = \dfrac{3-\frac{1}{3^n}}{3+\frac{1}{3^n}}$ pour trouver $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 1.17. Pour la question **1**, il suffit de faire les calculs proposés.
Pour la question **2**, P est inversible s'il existe une matrice R telle que $PR = I$.
Pour la question **3**, pour prouver que $PY_n = X_n$, se souvenir que $Q = P^{-1}$. Pour finir la question, écrire $Y_{n+1} = QX_{n+1}$ et remplacer X_{n+1} par AX_n.
Pour la question **4**, procéder par récurrence.
Pour la question **6**, utiliser l'égalité $X_n = PY_n$ pour trouver X_n et en déduire u_n.
Exercice 1.18. Pour la question **3.a)**, utiliser la question **2.b)**.
Pour la question **3.b)**, utiliser la question **2.c)**.
Pour la question **4.a)**, multiplier chaque membre par A^{-1} à gauche et par A^{-1} à droite.
Pour la question **4.b)**, utiliser les questions **3.b)** et **1**.

■■ Corrigé des vrai/faux

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
F	V	F	F	V	F	F	F	F	V

1. Considérons les matrices : $A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ et $C=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}$.

On a : $AB=AC=0$, $A\neq 0$, et pourtant $B\neq C$.

2. Si une matrice carrée A vérifie la relation ${}^tA=-A$, alors on a : $\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $a_{i,j}=-a_{j,i}$.
En particulier : $\forall i\in[\![1,n]\!], a_{i,i}=-a_{i,i}$. Cela signifie que les coefficients diagonaux de A sont nuls.

3. Soit n un entier naturel non nul, X et Y deux matrices de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. La matrice ${}^tY$ est un élément de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$, le produit $X\,{}^tY$ est donc bien défini et est élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

4. On ne peut pas additionner des réels et des matrices, ainsi l'écriture " $A+1$ " n'a pas de sens.
Plus correctement, de l'égalité $A^2+A=I$, on peut déduire : $A(A+I)=I$ et $A^{-1}=A+I$.

5. Considérons une matrice A telle que $A\neq I$ et $A^2=A$.
Montrons par l'absurde qu'elle n'est pas inversible.
Supposons que la matrice A est inversible. Alors A^{-1} existe et en multipliant la relation $A^2=A$ par A^{-1}, on obtient $A=I$ ce qui est absurde par hypothèse.
Finalement, si A est une matrice telle que $A\neq I$ et $A^2=A$, alors A n'est pas inversible.

6. L'implication $A=0\Rightarrow A^2=0$ est toujours vraie (il suffit d'effectuer le produit AA).
En revanche, la réciproque est fausse en général. Il suffit de considérer la matrice $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.
On a $A^2=0$, et pourtant $A\neq 0$.

7. La relation $A^2=2I$ est équivalente à $A\left(\frac{1}{2}A\right)=I$. La matrice A est donc inversible d'inverse $A^{-1}=\frac{1}{2}A$, qui est différente de $2A$.

Corrigé

8. Soit $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ une matrice quelconque d'ordre 1. Comme on a $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, on obtient :

$$AM = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ 2b & 2d \end{pmatrix} \text{ et } MA = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2c \\ b & 2d \end{pmatrix}$$

Remarque. Les matrices A et M commuteraient si l'on avait $2b = b$ et $2c = c$, c'est-à-dire :

$$b = c = 0$$

On en déduit que A commute avec toutes les matrices *diagonales* de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

9. Soyons prudents et cherchons une réduite de Gauss de A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 7 & -7 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} L_3 \leftarrow 7L_3 + L_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cette dernière matrice n'est pas inversible (matrice triangulaire dont l'un des coefficients diagonaux est nul). La matrice A n'est donc pas inversible.

Remarque. Si une matrice triangulaire a tous ses coefficients non nuls, alors elle est inversible. Ici, A n'était pas triangulaire.

10. On peut vérifier que $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ puis $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$. Ainsi, pour tout entier k tel que $k \geq 3$ $A^k = A^{k-3}A^3 = 0$.

❑ Les erreurs classiques

- La notion de puissance et d'inverse d'une matrice n'existe que pour les matrices "carrées".
- Les règles du produit matriciel ne sont absolument pas les mêmes que celles de la multiplication des nombres :
  La relation $AB = 0$ n'implique pas $A = 0$ ou $B = 0$.
  Les égalités $A^2 = A$ et $A = I$ sont rarement équivalentes (voir **V/F 5**).
- Faire attention de ne jamais ajouter une matrice et un réel (voir **V/F 4**).
- La non nullité des coefficients diagonaux d'une matrice n'est utile pour justifier son inversibilité que lorsque cette matrice est triangulaire. Voir le **V/F 9.**
- Quand on veut remplacer une ligne (d'un système ou d'une matrice) à l'aide d'une opération élémentaire de Gauss, il est impératif que cette ligne intervienne dans l'expression de cette opération.

■■ Corrigé des exercices

Exercice 1.1

1. a) On trouve : $2A-3D=\begin{pmatrix}10 & 3 & -16\\ -1 & 16 & 4\end{pmatrix}$.

b) On a : $A+D=\begin{pmatrix}0 & 4 & 2\\ 7 & -2 & 7\end{pmatrix}$.

On en déduit que : $(A+D)C=\begin{pmatrix}22 & 10 & -8 & -2\\ 6 & 3 & -7 & -37\end{pmatrix}$.

Ensuite : $AC=\begin{pmatrix}4 & 4 & 14 & 5\\ 19 & 9 & -8 & -21\end{pmatrix}$ et $DC=\begin{pmatrix}18 & 6 & -22 & -7\\ -13 & -6 & 1 & -16\end{pmatrix}$.

Finalement, on a bien : $(A+D)C=AC+DC$.

2. On a : $AB=\begin{pmatrix}-14 & 4 & 13\\ 15 & -1 & 4\end{pmatrix}$ d'où $(AB)C=\begin{pmatrix}69 & 21 & -94 & -7\\ -7 & 2 & 29 & -43\end{pmatrix}$.

On a aussi : $BC=\begin{pmatrix}11 & 5 & -6 & -12\\ 7 & 1 & -16 & 5\\ -13 & -4 & 17 & -1\end{pmatrix}$ d'où $A(BC)=\begin{pmatrix}69 & 21 & -94 & -7\\ -7 & 2 & 29 & -43\end{pmatrix}$.

On retrouve bien l'associativité du produit matriciel : $(AB)C=A(BC)$.

3. On a : ${}^tA=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 3 & 2\\ -2 & 5\end{pmatrix}$ et ${}^tC=\begin{pmatrix}-1 & 4 & 3\\ 0 & 2 & 1\\ 3 & 0 & -4\\ -2 & 1 & -3\end{pmatrix}$, on en déduit :

${}^tC\,{}^tA=\begin{pmatrix}-1 & 4 & 3\\ 0 & 2 & 1\\ 3 & 0 & -4\\ -2 & 1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 4\\ 3 & 2\\ -2 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 19\\ 4 & 9\\ 14 & -8\\ 5 & -21\end{pmatrix}$. Or ${}^t(AC)=\begin{pmatrix}4 & 19\\ 4 & 9\\ 14 & -8\\ 5 & -21\end{pmatrix}$, donc ${}^t(AC)={}^tC\,{}^tA$.

⇨ *Méthode 1.1*

Exercice 1.2

1. On trouve : $A^2 = \begin{pmatrix} 18 & 9 & 9 \\ 9 & 18 & 9 \\ 9 & 9 & 18 \end{pmatrix}$.

⇨ *Méthode 1.1*

On cherche ensuite deux réels α et β tels que : $A^2 = \alpha A + \beta I$.

Ceci s'écrit : $\begin{pmatrix} 18 & 9 & 9 \\ 9 & 18 & 9 \\ 9 & 9 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & 4\alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha & 4\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$.

Après addition, on a : $\begin{pmatrix} 18 & 9 & 9 \\ 9 & 18 & 9 \\ 9 & 9 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\alpha+\beta & \alpha & \alpha \\ \alpha & 4\alpha+\beta & \alpha \\ \alpha & \alpha & 4\alpha+\beta \end{pmatrix}$. Par identification, on obtient le système suivant : $\begin{cases} 4\alpha+\beta = 18 \\ \alpha = 9 \end{cases}$. Finalement, on a : $A^2 = 9A - 18I$.

2. L'égalité obtenue à la question **1.** est équivalente à : $A^2 - 9A = -18I$.

En factorisant, on obtient : $A(A-9I) = -18I$ puis $A \times \frac{-1}{18}(A-9I) = I$. On en déduit que A est inversible et que son inverse est $A^{-1} = \frac{-1}{18}(A-9I)$.

⇨ *Méthode 1.4*

Exercice 1.3

1. On trouve : $AX = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Avec l'égalité $AX = 0$, si A était inversible, alors en multipliant par A^{-1}, on aurait $A^{-1}AX = A^{-1}0$, soit : $X = 0$. Ceci étant faux, on conclut que A n'est pas inversible.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) On trouve $A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. On conclut, comme à la question **1**, que les matrices A et B ne sont pas inversibles.

b) On a : $AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$(AB)^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Soit A et B deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que : $AB \neq 0$ et $BA = 0$.

a) Procédons à une démonstration par l'absurde.

• Si A était inversible, alors A^{-1} existerait et la relation $BA = 0$ donnerait, en multipliant chaque membre par A^{-1} à droite : $B = 0 \times A^{-1} = 0$ mais alors B serait nulle et le produit AB le serait aussi. C'est absurde.

• Si B était inversible, alors B^{-1} existerait et la relation $BA = 0$ donnerait, en multipliant chaque membre par B^{-1} à gauche : $A = B^{-1} \times 0 = 0$ mais alors A serait nulle et le produit AB aussi. C'est absurde. On en déduit que ni A ni B n'est inversible.

b) Par définition d'une puissance, on a : $(AB)^2 = (AB)(AB)$.

L'associativité du produit matriciel donne alors : $(AB)(AB) = A(BA)B$.

Le produit BA étant nul, on en déduit que : $(AB)^2 = 0$.

Exercice 1.4

1. On regarde les premières puissances de A :

$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$, $A^3 = -A$ et $A^4 = (A^2)^2 = I$, $A^5 = A^4 A = A$.

Pour tout entier naturel n, on a alors :

- $A^{4n} = (A^4)^n = I^n = I$.
- $A^{4n+1} = A^{4n} \times A = I \times A = A$.
- $A^{4n+2} = A^{4n} \times A^2 = I \times (-I) = -I$.
- $A^{4n+3} = A^{4n} \times A^3 = I \times (-A) = -A$.

⇨ *Méthodes 1.1, 1.2*

2. Regardons les premières puissances de A :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2A,\ A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4A \text{ et } A^4 = A^2 A^2 = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 8 \end{pmatrix} = 8A.$$

⇨ *Méthode 1.1*

On conjecture que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A^n = 2^{n-1} A$.

Pour tout entier naturel n non nul, posons $R(n)$: " $A^n = 2^{n-1} A$ ".

• On a déjà vu que $R(1)$ est vraie.

• Soit n un entier naturel non nul tel que $R(n)$ est vraie.
Alors : $A^{n+1} = A^n A = 2^{n-1} A \times A = 2^{n-1} A^2 = 2^{n-1}(2A) = 2^n A$: $R(n+1)$ est donc vraie.
• Finalement, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$A^n = 2^{n-1} A$$

✎ *De façon plus explicite,* $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$. *Bien sûr,* $A^0 = I$.

⇨ *Méthode 1.2*

Exercice 1.5

1. On obtient successivement : $A^2 = \begin{pmatrix} -5 & -6 & -6 \\ 9 & 10 & 9 \\ -4 & -4 & -3 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} = A$.

⇨ *Méthode 1.1*

Posons pour tout entier naturel n non nul, $R(n)$: " $A^{2n} = A^2$ et $A^{2n+1} = A$ ".
• Les calculs préliminaires prouvent que $R(1)$ est vraie.
• Soit n un entier naturel non nul tel que $R(n)$ est vraie.
Comme $A^{2n+2} = A^{2n+1} A$, et, par hypothèse de récurrence, $A^{2n+1} = A$, on en déduit : $A^{2n+2} = A^2$.
On a alors : $A^{2n+3} = A^{2n+2} A = A^2 A = A^3 = A$.
On en déduit que $R(n+1)$ est vraie.
• Par récurrence, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$A^{2n} = A^2 \text{ et } A^{2n+1} = A$$

✎ *Ici encore, on a :* $A^0 = I$.

⇨ *Méthode 1.2*

2. Utilisons un raisonnement par l'absurde.
Si A était inversible, en multipliant la relation $A^3 = A$ par A^{-1}, on obtiendrait $A^2 = I$, ce qui contredit le résultat de la question **1**. La matrice A n'est donc pas inversible.

Exercice 1.6

1. Pour déterminer la matrice J telle que $A = I + J$, il suffit de calculer $A - I$.
Comme $A - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ vérifie donc $A = I + J$.

2. a) On obtient après calculs : $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $J^3 = 0$.

On en déduit, pour $k \geq 3$:

$$J^k = J^3 J^{k-3} = 0 \times J^{k-3} = 0$$

⇨ *Méthode 1.1*

b) Connaissant une décomposition de A du type $A = I + J$, on pense à utiliser la formule du binôme de Newton.
Les matrices J et I commutent (la matrice I commute avec n'importe quelle matrice de même format).

On obtient donc, pour tout entier naturel n : $A^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} I^{n-k} J^k$.

Comme $I^{n-k} = I$ et que $I J^k = J^k$, on obtient, pour tout entier naturel n : $A^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} J^k$.

Pour tout entier n supérieur ou égal à 3, on coupe la somme précédente en deux et on a :

$$A^n = \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} J^k + \sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} J^k$$

Comme $J^k = 0$ dès que k est supérieur ou égal à 3, on en déduit que la seconde somme est nulle.
Finalement, pour tout entier n supérieur ou égal à 3, $A^n = \binom{n}{0} J^0 + \binom{n}{1} J + \binom{n}{2} J^2$.

On en déduit que, pour tout entier n supérieur ou égal à 3 : $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \dfrac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On remarque enfin que cette relation est encore vraie pour $n = 0$, $n = 1$ et $n = 1$.

⇨ *Méthode 1.3*

Exercice 1.7

On donne $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. En ajoutant le terme d'indice 0 et en le retranchant, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 9^k (-2)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 9^k (-2)^{n-k} - \binom{n}{0} 9^0 (-2)^n = (9-2)^n - (-2)^n = 7^n - (-2)^n .$$

2. a) On trouve $J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3J$.

b) on a alors : $J^3 = J^2 J = (3J)J = 3J^2 = 3\times 3J = 9J$.

Montrons que, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on a : $J^k = 3^{k-1}J$.

• Pour $k = 1$, ceci donne $J = J$, ce qui est correct et initialise la proposition.

• Si l'on suppose pour un k fixé dans $\mathbb{N}^*$ que $J^k = 3^{k-1}J$, alors :

$$J^{k+1} = J^k J = 3^{k-1} J\, J = 3^{k-1} J^2 = 3^{k-1}\times 3J = 3^k J$$

La proposition est héréditaire et on peut conclure que, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on a : $J^k = 3^{k-1}J$.

3. a) On a $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 3J - 2I$.

b) La matrice $-2I$ commute avec $3J$ car $(-2I)(3J) = -6IJ = -6J = -6JI = (3J)(-2I)$

La formule du binôme de Newton assure que, pour tout entier naturel n, on a :

$$A^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (3J)^k (-2I)^{n-k}$$

Comme $(3J)^k (-2I)^{n-k} = 3^k (-2)^{n-k} J^k$, alors pour tout entier naturel n, on a :

$$A^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k (-2)^{n-k} J^k$$

La relation donnant J^k en fonction de J n'étant valable qu'à partir du rang 1, il faut isoler le premier terme de la somme donnant A^n. On en déduit alors que, pour tout entier naturel n non nul :

$$A^n = 3^0 (-2)^{n-0} J^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^k (-2)^{n-k} 3^{k-1} J = (-2)^n I + \frac{1}{3}\left[\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 9^k (-2)^{n-k}\right] J .$$

On a donc, grâce à la question **1** : $A^n = (-2)^n I + \frac{1}{3}\left(7^n - (-2)^n\right) J$.

On remarque enfin que cette formule est encore valable pour $n = 0$.

⇨ *Méthode 1.3*

Exercice 1.8

1. a) Puisque $x_0 = 1$ et $y_0 = 0$, on a $U_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b) Les relations $\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{1}{3}x_n + \dfrac{3}{4}y_n \\ y_{n+1} = \dfrac{2}{3}x_n + \dfrac{1}{4}y_n \end{cases}$ s'écrivent matriciellement sous la forme $U_{n+1} = AU_n$, avec $A = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{3} & \dfrac{3}{4} \\ \dfrac{2}{3} & \dfrac{1}{4} \end{pmatrix}$.

c) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 0, posons $P(n)$: $U_n = A^n U_0$.

$P(0)$ est vraie. En effet, $A^0 = I$ donc $A^0 U_0 = IU_0 = U_0$.

Supposons $P(n)$ vraie pour un certain entier naturel n supérieur ou égal à 0.

D'après **b)**, on a $U_{n+1} = AU_n$ donc $U_{n+1} = A \times A^n U_0 = A^{n+1} U_0$.

Ainsi, $P(n+1)$ est vraie.

Par récurrence : $\forall n \geq 0,\ U_n = A^n U_0$.

2. Par calcul, on trouve $P\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 8 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 8 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 0 \\ 0 & 17 \end{pmatrix} = 17I$, d'où

$$P \times \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 8 & -9 \end{pmatrix} = \frac{1}{17} P \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 8 & -9 \end{pmatrix} = I$$

Par conséquent, P est inversible, avec $P^{-1} = \dfrac{1}{17}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 8 & -9 \end{pmatrix}$.

3. Soit $D = P^{-1}AP$.

a) On trouve $AP = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{3} & \dfrac{3}{4} \\ \dfrac{2}{3} & \dfrac{1}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -\dfrac{5}{12} \\ 8 & \dfrac{5}{12} \end{pmatrix}$, puis $D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\dfrac{5}{12} \end{pmatrix}$.

D étant une matrice diagonale, on a, pour tout entier $n \geq 0$, $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(-\dfrac{5}{12}\right)^n \end{pmatrix}$.

b) Par définition de D, on a $D = P^{-1}AP$. En multipliant membre à membre, à gauche par P, on a $PD = PP^{-1}AP = IAP = AP$. Puis, en multipliant membre à membre, à droite par P^{-1}, on a $PDP^{-1} = APP^{-1} = AI = A$.

4. a) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 0, posons $Q(n)$: $A^n = PD^nP^{-1}$.

$Q(0)$ est vraie. En effet, $A^0 = I$ et $PD^0P^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I$, donc on a bien $A^0 = PD^0P^{-1}$.

Corrigé

Supposons $Q(n)$ vraie pour un certain entier naturel n supérieur ou égal à 0.

Comme $A^{n+1} = A \times A^n$, on a, en utilisant **3. b)** et l'hypothèse de récurrence :

$$A^{n+1} = \left(PDP^{-1}\right)\left(PD^nP^{-1}\right)$$

En regroupant les facteurs autrement, on a, avec $P^{-1}P = I$:

$$A^{n+1} = PDID^nP^{-1} = PDD^nP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$$

Ainsi, $Q(n+1)$ est vraie.

Par récurrence : $\forall n \geq 0,\ A^n = PD^nP^{-1}$.

b) Par calcul, on a $PD^n = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{5}{12}\right)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & \left(-\frac{5}{12}\right)^n \\ 8 & -\left(-\frac{5}{12}\right)^n \end{pmatrix}$.

$$PD^n\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 8 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & \left(-\frac{5}{12}\right)^n \\ 8 & -\left(-\frac{5}{12}\right)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 8 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9+8\left(-\frac{5}{12}\right)^n & 9-9\left(-\frac{5}{12}\right)^n \\ 8-8\left(-\frac{5}{12}\right)^n & 8+9\left(-\frac{5}{12}\right)^n \end{pmatrix}.$$

Enfin, puisque $P^{-1} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 8 & -9 \end{pmatrix}$, on a $A^n = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 9+8\left(-\frac{5}{12}\right)^n & 9-9\left(-\frac{5}{12}\right)^n \\ 8-8\left(-\frac{5}{12}\right)^n & 8+9\left(-\frac{5}{12}\right)^n \end{pmatrix}$.

c) On sait que $\forall n \geq 0,\ U_n = A^nU_0$, c'est-à-dire $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$. Un simple calcul donne alors : $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 9+8\left(-\frac{5}{12}\right)^n & 9-9\left(-\frac{5}{12}\right)^n \\ 8-8\left(-\frac{5}{12}\right)^n & 8+9\left(-\frac{5}{12}\right)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 9+8\left(-\frac{5}{12}\right)^n \\ 8-8\left(-\frac{5}{12}\right)^n \end{pmatrix}$, d'où

$$\begin{cases} x_n = \frac{1}{17}\left[9+8\left(-\frac{5}{12}\right)^n\right] \\ y_n = \frac{1}{17}\left[8-8\left(-\frac{5}{12}\right)^n\right] \end{cases}$$

Comme $-1 < -\frac{5}{12} < +1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{5}{12}\right)^n = 0$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \frac{9}{17}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \frac{8}{17}$.

Exercice 1.9

1. a) On a : $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A^3 = 0$.

⇨ *Méthode 1.1*

b) Si A était inversible, alors en multipliant l'égalité $A^3 = 0$ par A^{-1}, on obtiendrait : $A^{-1} \times A^3 = A^{-1} \times 0$, c'est-à-dire $A^2 = 0$. Ceci est absurde donc A n'est pas inversible.

2. a) On a $(I - A)(I + A + A^2) = I + A + A^2 - A - A^2 - A^3 = I$ car $A^3 = 0$.

b) On déduit directement de la question 1.**a)** que $I - A$ est inversible et que son inverse est $I + A + A^2$.

⇨ *Méthode 1.4*

3. On remarque que : $(I + A)(I - A + A^2) = I - A + A^2 + A - A^2 + A^3 = I$. On en déduit que $I + A$ est inversible et que son inverse est $I - A + A^2$.

⇨ *Méthode 1.4*

Exercice 1.10

1) On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -4 & 9 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 4 & -2 \\ -4 & 6 & -4 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = -2A + 3I.$$

On conclut que $A^2 + 2A - 3I = 0$ (on dit que le polynôme P, défini par $P(x) = x^2 + 2x - 3$, est annulateur de A : voir le **chapitre 9**).

La relation $A^2 + 2A - 3I = 0$ s'écrit $A^2 + 2A = 3I$, ou encore : $\frac{1}{3}(A + 2I)A = I$ donc A est inversible et on a : $A^{-1} = \frac{1}{3}(A + 2I)$.

2. a) • Pour $n = 0$, on a $A^0 = I = 0A + 1I$, ce qui montre que l'on peut choisir $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$.

• Si l'on suppose pour un entier naturel n fixé qu'il existe deux réels a_n et b_n tels que $A^n = a_n A + b_n I$, alors on obtient : $A^{n+1} = A^n A = (a_n A + b_n I)A = a_n A^2 + b_n A$.

D'après la première question, on a $A^2 = -2A + 3I$, ce qui donne :

$$A^{n+1} = a_n(-2A + 3I) + b_n A = (-2a_n + b_n)A + 3a_n I$$

On a bien trouvé deux réels $a_{n+1} = -2a_n + b_n$ et $b_{n+1} = 3a_n$ tels que $A^{n+1} = a_{n+1}A + b_{n+1}I$

Conclusion : il existe deux suites (a_n) et (b_n) telles que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $A^n = a_n A + b_n I$ avec : $a_0 = 0$, $b_0 = 1$, $a_{n+1} = -2a_n + b_n$ et $b_{n+1} = 3a_n$.

Corrigé

b) On ne connaît ni a_n ni b_n donc on va utiliser les relations de récurrence écrites plus haut.
On a : $a_{n+1}+b_{n+1}=\left(-2a_n+b_n\right)+3a_n=a_n+b_n$. Ceci prouve que la suite $\left(a_n+b_n\right)$ est constante donc on a : $a_n+b_n=a_0+b_0=0+1=1$.
On en déduit $a_n=1-b_n$ et en remplaçant dans l'égalité $b_{n+1}=3a_n$, on obtient :

$$b_{n+1}=-3b_n+3 \qquad (1)$$

La suite (b_n) est donc une suite arithmético-géométrique.
On considère alors le réel *x* solution de : $x=-3x+3$ (2)
En soustrayant membre à membre (1) et (2), on trouve : $b_{n+1}-x=-3\left(b_n-x\right)$.
Ainsi, la suite $\left(b_n-x\right)$ est une suite géométrique de raison –3 et de premier terme $b_0-x=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$ (car $x=\frac{3}{4}$).

On en déduit que, pour tout entier naturel *n*, on a : $b_n-x=(-3)^n\left(b_0-x\right)=\frac{1}{4}(-3)^n$

En remplaçant *x* par $\frac{3}{4}$, on obtient : $b_n=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}(-3)^n$

On a alors : $a_n=1-b_n=1-\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}(-3)^n\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}(-3)^n$

Enfin, on trouve : $A^n=\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}(-3)^n\right)A+\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}(-3)^n\right)I$.

Exercice 1.11

Soit $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que $AX=0$. On a : $AX=0\Leftrightarrow\begin{pmatrix}y\\z\\x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow X=0$.
Par la **propriété 1.10**, la matrice *A* est inversible.
On peut aussi remarquer qu'en effectuant successivement les opérations élémentaires $L_1\leftrightarrow L_3$ puis $L_2\leftrightarrow L_3$, on obtient la matrice identité qui est inversible.
Par conséquent, *A* est aussi inversible.

Exercice 1.12

Soit *n* un entier supérieur ou égal à 2.

1. $AX=B\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda_1x_n=b_1\\\lambda_2x_{n-1}=b_2\\\lambda_3x_{n-2}=b_3\\\vdots\\\lambda_nx_1=b_n\end{cases}$.

Les coefficients $(\lambda_i)_{1\leq i\leq n}$ étant tous non nuls, on en déduit que le système précédent possède une unique solution : le n-uplet $\left(\frac{b_n}{\lambda_n},\frac{b_{n-1}}{\lambda_{n-1}},...,\frac{b_2}{\lambda_2},\frac{b_1}{\lambda_1}\right)$.

2. La question précédente prouve que l'équation $AX = B$ possède une unique solution et on peut écrire : $\begin{cases} x_1 = 0b_1 + 0b_2 + ... + 0b_{n-1} + \frac{1}{\lambda_n}b_n \\ x_2 = 0b_1 + 0b_2 + ... + \frac{1}{\lambda_{n-1}}b_{n-1} + 0b_n \\ x_3 = 0b_1 + ... + \frac{1}{\lambda_{n-2}}b_{n-2} + 0b_{n-1} + 0b_n \\ \vdots \\ x_n = \frac{1}{\lambda_1}b_1 + 0b_2 + ... + 0b_n \end{cases}$.

On conclut que A est inversible, avec de plus : $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1/\lambda_n \\ \vdots & \iddots & 1/\lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & \iddots & \iddots & \vdots \\ 1/\lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

⇨ *Méthode 1.5*

Exercice 1.13

1.
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_1$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 4 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{matrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 4 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + 4L_2$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -13 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -10 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette réduite de Gauss de A a tous ses pivots non nuls (1, –1 et –13) donc A est inversible.
On poursuit :
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -13 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -10 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_1 \leftarrow 13L_1 + 2L_3 \\ L_2 \leftarrow 13L_2 - 5L_3 \\ L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 13 & 0 & 0 \\ 0 & -13 & 0 \\ 0 & 0 & -13 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -7 & 8 & 2 \\ 11 & -7 & -5 \\ -10 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Enfin, les opérations élémentaires $L_1 \leftarrow \frac{1}{13}L_1$, $L_2 \leftarrow -\frac{1}{13}L_2$ et $L_3 \leftarrow -\frac{1}{13}L_3$ donnent :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{13}\begin{pmatrix} -7 & 8 & 2 \\ -11 & 7 & 5 \\ 10 & -4 & -1 \end{pmatrix}. \text{ Ainsi : } A^{-1} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} -7 & 8 & 2 \\ -11 & 7 & 5 \\ 10 & -4 & -1 \end{pmatrix}.$$

2.
$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \quad L_3 \leftarrow 2L_3 + L_1$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Cette réduite de Gauss de B a tous ses pivots non nuls (2, –1 et 3) donc B est inversible.
On poursuit :

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow 3L_1 - L_3 \quad L_2 \leftarrow 3L_2 - L_3$$

$$\begin{pmatrix} 6 & -6 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 8 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow (1/6)L_1 \quad L_2 \leftarrow -(1/3)L_2 \quad L_3 \leftarrow (1/3)L_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}. \text{ Ainsi : } B^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. La matrice C est triangulaire à coefficients diagonaux tous non nuls donc elle est inversible.

$$\begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 + aL_3 \\ \\ \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 + aL_2 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

. On obtient ainsi : $C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

⇨ *Méthode 1.7*

Exercice 1.14

On cherche une réduite de Gauss de A.

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \quad L_1 \leftrightarrow L_3 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - aL_1 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 1-a & 1-a^2 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & (1-a)(2+a) \end{pmatrix}.$$

Cette dernière matrice est une matrice triangulaire, inversible si et seulement si a est différent de 1 et de -2. Conclusion : A est inversible si et seulement si a est différent de 1 et de -2.

⇨ *Méthode 1.6*

Exercice 1.15

1. La relation ${}^tA = A$ signifie que $a_{j,i} = a_{i,j}$. Pour les termes diagonaux, ceci donne $a_{i,i} = a_{i,i}$, ce qui n'apporte aucun renseignement sur les termes diagonaux. Pour les autres termes, on sait que le terme situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j est égal à celui situé à

l'intersection de la ligne j et de la colonne i : on a donc la forme d'une matrice symétrique de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$: $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$.

2. La relation ${}^tA=-A$ signifie que $a_{j,i}=-a_{i,j}$. Pour les termes diagonaux, ceci donne $a_{i,i}=-a_{i,i}$, ce qui prouve que les termes diagonaux sont nuls. Pour les autres termes, on sait que le terme situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j est opposé à celui situé à l'intersection de la ligne j et de la colonne i : on a donc la forme d'une matrice antisymétrique de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$: $A=\begin{pmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & e \\ -c & -e & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 1.16

1. a) On applique la formule $\left(\frac{U}{V}\right)'=\frac{VU'-UV'}{V^2}$ avec $U(x)=2x+1$ et $V(x)=x+2$. Comme $U'(x)=2$ et $V'(x)=1$, on a , pour tout $x\geq 0$: $f'(x)=\frac{(x+2)\times 1-(2x+1)\times 1}{(x+2)^2}=\frac{3}{(x+2)^2}$.

b) Les bornes de l'ensemble de définition sont 0 et $+\infty$. On a $f(0)=\frac{1}{2}$, et, f étant une fonction rationnelle, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{x}=2$. D'autre part, $f(1)=\frac{2\times 1+1}{1+2}=1$.
Tableau de variation de f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	
f	$\frac{1}{2}$	↗	1	↗	2

2. a) On montre par récurrence que pour tout entier naturel n, u_n appartient à l'intervalle [0, 1]. Soit $P(n)$ la proposition : « $u_n\in[0,1]$ ».

- $P(0)$ est vraie puisque $u_0=\frac{1}{2}\in[0,1]$.

• En supposant $P(n)$ vraie pour un certain entier naturel n, on a alors $0 \leq u_n \leq 1$ et, comme f est croissante sur $\mathbb{R}_+$, on obtient : $f(0) \leq f(u_n) \leq f(1)$. Comme $f(0) = \frac{1}{2}$, $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(1) = 1$, ceci s'écrit : $\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq 1$. On en déduit : $0 \leq u_{n+1} \leq 1$. Ainsi, $P(n+1)$ est vraie.

• Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0,1]$.

b) Pour tout entier naturel n, on a : $1 - u_{n+1} = 1 - \frac{2u_n + 1}{u_n + 2} = \frac{(u_n + 2) - (2u_n + 1)}{u_n + 2} = \frac{1 - u_n}{u_n + 2}$.

c) En utilisant **a)**, on a $u_n \geq 0$ donc $u_n + 2 \geq 2$, d'où : $0 \leq \frac{1}{u_n + 2} \leq \frac{1}{2}$. De plus, $u_n \leq 1$, donc $1 - u_n \geq 0$. En multipliant membre à membre l'inégalité $0 \leq \frac{1}{u_n + 2} \leq \frac{1}{2}$ par $1 - u_n$ (qui est positif donc on ne change pas le sens de l'inégalité), on a : $0 \leq 1 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(1 - u_n)$.

d) On montre par récurrence que pour tout entier naturel n : $0 \leq 1 - u_n \leq \frac{1}{2^{n+1}}$.

Soit $Q(n)$ la proposition : « $0 \leq 1 - u_n \leq \frac{1}{2^{n+1}}$ ».

• $Q(0)$ est vraie puisque $u_0 = \frac{1}{2}$, donc $1 - u_0 = \frac{1}{2}$, et $\frac{1}{2^{0+1}} = \frac{1}{2}$. On a bien : $1 - u_0 \leq \frac{1}{2^{0+1}}$.

• Supposons $Q(n)$ vraie pour un certain entier naturel n.

On a $0 \leq 1 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(1 - u_n)$. En multipliant membre à membre l'inégalité $1 - u_n \leq \frac{1}{2^{n+1}}$ par $\frac{1}{2}$ (en ne changeant pas le sens de l'inégalité), on a $\frac{1}{2}(1 - u_n) \leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+2}}$.

De $\begin{cases} 0 \leq 1 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(1 - u_n) \\ \frac{1}{2}(1 - u_n) \leq \frac{1}{2^{n+2}} \end{cases}$, on déduit : $0 \leq \frac{1}{2}(1 - u_{n+1}) \leq \frac{1}{2^{n+2}}$ et ainsi, $Q(n+1)$ est vraie.

• On a bien montré par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq 1 - u_n \leq \frac{1}{2^{n+1}}$.

e) Comme $2 > 1$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^{n+1} = +\infty$, d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = 0$. Le théorème d'encadrement donne alors $\lim\limits_{n \to +\infty} (1 - u_n) = 0$, d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

Corrigé

3. a) En effectuant le produit $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, on trouve $J^2=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}$ et il ne reste plus qu'à constater que $J^2=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=2J$.

b) On montre par récurrence que pour tout entier naturel n, $A^n=I+\frac{1}{2}\left(3^n-1\right)J$.

Soit $R(n)$ la proposition : « $A^n=I+\frac{1}{2}\left(3^n-1\right)J$ ».

• $R(0)$ est vraie puisque $A^0=I$, et $I+\frac{1}{2}\left(3^0-1\right)J=I+\frac{1}{2}\times(1-1)J=I$.

• Supposons $R(n)$ vraie pour un certain entier naturel n. On a alors $A^n=I+\frac{1}{2}\left(3^n-1\right)J$.

En utilisant $A^{n+1}=A^n\times A$ et $A=I+J$, on obtient :

$$A^{n+1}=A^n\times A=\left(I+\frac{1}{2}\left(3^n-1\right)J\right)\times\left(I+J\right)$$

En développant, on a :

$$A^{n+1}=I^2+\frac{1}{2}\left(3^n-1\right)J\times I+I\times J+\frac{1}{2}\left(3^n-1\right)J^2$$

En utilisant $I^2=I$, $J\times I=I\times J=J$ et $J^2=2J$ (égalité prouvée en **3.a)**), on trouve :

$$A^{n+1}=I+\frac{1}{2}\left(3^n-1\right)J+J+\frac{1}{2}\left(3^n-1\right)\times 2J$$

En factorisant par $\frac{1}{2}J$ dans les trois derniers termes, on a :

$$A^{n+1}=I+\frac{1}{2}\left[\left(3^n-1\right)+2+\left(3^n-1\right)\times 2\right]J$$

En développant et simplifiant : $A^{n+1}=I+\frac{1}{2}\left(3\times 3^n-1\right)J=I+\frac{1}{2}\left(3^{n+1}-1\right)J$, d'où $R(n+1)$ est vraie.

• Ainsi, par récurrence : $\forall n\in\mathbb{N},\ A^n=I+\frac{1}{2}\left(3^n-1\right)J$.

⇨ *Méthode 1.2*

c) En appliquant **a)**, on a : $A^n=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\frac{1}{2}(3^n-1)\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$. En effectuant, on trouve :

$$A^n=\begin{pmatrix}1+\frac{1}{2}\left(3^n-1\right) & \frac{1}{2}\left(3^n-1\right)\\ \frac{1}{2}\left(3^n-1\right) & 1+\frac{1}{2}\left(3^n-1\right)\end{pmatrix}$$

On peut simplifier l'expression de A^n en remarquant que

$$1+\frac{1}{2}\left(3^n-1\right)=\frac{1}{2}\times 3^n+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left(3^n+1\right)$$

Finalement :

$$A^n=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\left(3^n+1\right) & \frac{1}{2}\left(3^n-1\right)\\ \frac{1}{2}\left(3^n-1\right) & \frac{1}{2}\left(3^n+1\right)\end{pmatrix}$$

Remarque. Il est fortement conseillé de vérifier les calculs en remplaçant n par 0 ($A^0=I$), puis par 1 ($A^1=A$).

4. a) On montre par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $X_n=A^nX_0$.

On remarque tout d'abord que les relations $\begin{cases}p_{n+1}=2p_n+q_n\\ q_{n+1}=p_n+2q_n\end{cases}$ s'écrivent, sous forme matricielle,

$\begin{pmatrix}p_{n+1}\\ q_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_n\\ q_n\end{pmatrix}$, ce qui revient à : $X_{n+1}=AX_n$.

Soit $S(n)$ la proposition : « $X_n=A^nX_0$ ».

• $S(0)$ est vraie puisque $A^0X_n=IX_n=X_n$.

• Supposons $S(n)$ vraie pour un certain entier naturel n. On a donc $X_n=A^nX_0$.

On a alors, suivant la remarque initiale, $X_{n+1}=AX_n=A\times A^nX_0=A^{n+1}X_0$.

Donc $S(n+1)$ est vraie.

• Ainsi, par récurrence : $\forall n\in\mathbb{N},\ X_n=A^nX_0$.

b) On sait que $A^n=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\left(3^n+1\right) & \frac{1}{2}\left(3^n-1\right)\\ \frac{1}{2}\left(3^n-1\right) & \frac{1}{2}\left(3^n+1\right)\end{pmatrix}$. De plus, $p_0=1$, $q_0=2$ donc $X_0=\begin{pmatrix}p_0\\ q_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$.

Un calcul simple donne $A^nX_0=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}(3^n+1) & \frac{1}{2}(3^n-1)\\ \frac{1}{2}(3^n-1) & \frac{1}{2}(3^n+1)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}(3\times 3^n-1)\\ \frac{1}{2}(3\times 3^n+1)\end{pmatrix}$, et, puisque

$A^nX_0=X_n=\begin{pmatrix}p_n\\ q_n\end{pmatrix}$, on obtient :

$$\begin{cases}p_n=\frac{1}{2}\left(3\times 3^n-1\right)\\ q_n=\frac{1}{2}\left(3\times 3^n+1\right)\end{cases}$$

Corrigé