

JAVIER A. BARRIOS GARCÍA
MARIANELA CARRILLO FERNÁNDEZ
MARÍA CANDELARIA GIL FARIÑA
CONCEPCIÓN GONZÁLEZ CONCEPCIÓN
CELINA PESTANO GABINO

ANÁLISIS de FUNCIONES en **ECONOMÍA y EMPRESA**

Un enfoque interdisciplinar

2ª edición



JAVIER A. BARRIOS GARCÍA
MARIANELA CARRILLO FERNÁNDEZ
MARÍA CANDELARIA GIL FARIÑA
CONCEPCIÓN GONZÁLEZ CONCEPCIÓN
CELINA PESTANO GABINO

ANÁLISIS DE FUNCIONES EN ECONOMÍA Y EMPRESA

Un enfoque interdisciplinar

2ª edición



Madrid • Buenos Aires • México • Bogotá

© J.A. Barrios García, M. Carrillo Fernández, M.C. Gil Fariña
C. González Concepción. C. Pestano Gabino, 2022 (Versión papel)

© J.A. Barrios García, M. Carrillo Fernández, M.C. Gil Fariña
C. González Concepción. C. Pestano Gabino, 2022 (Versión electrónica)

Reservados todos los derechos.

Queda prohibida, salvo excepción prevista en la ley ,cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública y transformación de esta obra sin contar con la autorización de los titulares de propiedad intelectual. La infracción de los derechos mencionados puede ser constitutiva de delito contra la propiedad intelectual (art.270 y siguientes del Código Penal). El Centro Español de Derechos Reprográficos (CEDRO) vela por el respeto de los citados derechos.

Ediciones Díaz de Santos
Email:ediciones@editdiazdesantos.com
www.editdiazdesantos.com

ISBN: 978-84-9052-457-2 (Libro electrónico)
ISBN: 978-84-9052-392-6 (Libro en papel)

ÍNDICE

Prólogo.....	XIII
--------------	------

PARTE I

EL PAPEL DE LAS MATEMÁTICAS EN ECONOMÍA Y EMPRESA

I. Las Matemáticas en Economía y Empresa.....	3
I.1. El uso de las Matemáticas en Economía y Empresa.....	3
I.1.1. Economía Discursiva y Economía Matemática.....	3
I.1.2. Modelo económico-matemático. Concepto y construcción.....	5
I.1.3. Ventajas e inconvenientes del uso de las Matemáticas en Economía y Empresa.....	7
I.2. Lenguaje y razonamiento matemático	11
I.2.1. Símbolos e ideas sobre el razonamiento matemático	11
I.2.2. Nociones elementales sobre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^n$	14
Apuntes de Historia.....	24
Precursores del uso de las Matemáticas en la Ciencia Económica y Empresarial.....	24
Notas biográficas: William Stanley Jevons	25
Textos Clásicos: W. S. Jevons	26
Prácticas de Informática	28
Ejercicios propuestos	30
Apéndice	31

PARTE II

CÁLCULO DIFERENCIAL DE FUNCIONES REALES

2. Funciones reales de una variable real.....	37
2.1. El concepto de función en Economía. Ejemplos	37
2.2. Definición y propiedades.....	40
2.3. Tipos de funciones	43
2.3.1. Función explícita y función implícita.....	43
2.3.2. Función compuesta y función inversa.....	45
2.3.3. Función par y función impar.....	48
2.3.4. Función periódica.....	49
2.3.5. Función creciente y función decreciente	50
2.3.6. Función cóncava y función convexa	51
2.4. Concepto de límite. Propiedades y cálculo	53

2.4.1. Definición intuitiva de límite puntual. Límites laterales	53
2.4.2. Definición formal de límite puntual. Límites laterales	56
2.4.3. Cálculo de límites	58
2.5. Continuidad. Definición y propiedades	65
2.6. Derivabilidad. Definición y propiedades. Derivadas sucesivas	72
2.7. Diferenciabilidad. Definición y propiedades. Diferenciales sucesivas.....	87
2.8. Aproximaciones polinómicas. Desarrollo de Taylor.....	90
2.9. Representación gráfica de una función. Estudio analítico	94
2.10. Aplicaciones en Economía y Empresa. Funciones notables.	
Marginalidad y elasticidad.....	101
Apuntes de Historia.....	115
El lenguaje de la teoría de funciones en Economía	115
Notas Biográficas: Antoine Augustin Cournot	116
Textos Clásicos: A.A. Cournot	116
Prácticas de Informática	120
Ejercicios propuestos	121
3. Funciones reales de varias variables reales	129
3.1. Funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$	129
3.1.1. Definición de funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$	135
3.1.2. Funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$. Representación gráfica	135
3.2. Límite puntual de una función real de varias variables reales	142
3.2.1. Límite puntual de una función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$. Límites direccionales.....	142
3.2.2. Cálculo de límites dobles. Propiedades.....	149
3.2.3. Límite de una función de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$	152
3.3. Continuidad. Definición y propiedades	153
3.4. Derivabilidad parcial. Definición y propiedades	156
3.5. Derivadas parciales sucesivas	162
3.6. Incremento y diferencial.....	164
3.7. Diferenciales sucesivas	172
3.8. Aproximaciones polinómicas. Desarrollo de Taylor.....	173
3.9. Funciones convexas. Diferenciabilidad y convexidad	175
3.10. Aplicaciones en Economía y Empresa	177
Apuntes de Historia.....	182
Funciones reales de varias variables reales en Economía.....	182
Notas Biográficas: Alfred Marshall	182
Textos Clásicos: A. Marshall, V. Pareto, J. A. Schumpeter	184
Prácticas de Informática	189
Ejercicios propuestos	191
4. Funciones compuestas, inversas e implícitas.....	197
4.1. Función compuesta	197
4.1.1. La regla de la cadena para la derivación	201
4.2. Función inversa.....	209

4.3. Función implícita.....	217
4.4. Aplicaciones en Economía y Empresa	227
Apuntes de Historia.....	236
El papel de algunas funciones matemáticas en la modelización económica.....	236
Notas Biográficas: Paul A. Samuelson	237
Textos Clásicos: A. Cournot, W. Jevons, W. Pareto, P. Samuelson	237
Prácticas de Informática	243
Ejercicios propuestos	245
5. Funciones homogéneas	253
5.1. Justificación económica	253
5.2. Definición e interpretación. Aspectos geométricos	260
5.2.1. Definición e interpretación	260
5.2.2. Aspectos geométricos de las funciones homogéneas	263
5.3. Propiedades básicas de las funciones homogéneas	268
5.4. Teorema de Euler. Interpretación económica	271
5.5. Generalizaciones	276
5.2.1. Funciones homogéneas y homotéticas.....	276
5.6. Aplicaciones en Economía y Empresa	277
Apuntes de Historia.....	289
Las funciones homogéneas y el análisis de la distribución según la productividad marginal	289
Notas Biográficas: P.H. Wicksteed.....	290
Textos Clásicos: P.H. Wicksteed.....	291
Prácticas de Informática	295
Ejercicios propuestos	297

PARTE III

TEORÍA CLÁSICA DE OPTIMIZACIÓN MATEMÁTICA

6. Introducción a la optimización matemática. Optimización clásica libre.....	307
6.1. El problema de optimización.....	307
6.1.1. Breve aproximación histórica a la Optimización Matemática	308
6.1.2. Clasificación de los problemas de Optimización Matemática	309
6.1.3. Planteamiento del problema	310
6.1.4. Definición y existencia de óptimos.....	312
6.1.5. Métodos de resolución.....	315
6.2. La optimización libre en el contexto económico-empresarial	317
6.3. Una variable de decisión	320
6.3.1. Estudio de los puntos críticos: clasificación.....	322
6.4. Varias variables de decisión	327
6.4.1. Estudio de los puntos críticos: clasificación.....	331
6.5. El signo de una forma cuadrática.....	336

6.6. Condiciones suficientes de óptimo local	341
6.7. Convexidad y optimalidad global.....	345
6.8. Aplicaciones en Economía y Empresa	347
Apuntes de Historia.....	352
Optimización Matemática y Teoría Económica	352
Notas Biográficas: Léon Walras.....	353
Textos Clásicos: L. Walras	354
Prácticas de Informática	357
Ejercicios Propuestos	358
7. Optimización clásica condicionada o restringida	363
7.1. Introducción	363
7.2. Método de sustitución.....	367
7.3. El método de los multiplicadores de Lagrange.....	369
7.3.1. Condiciones suficientes de óptimo condicionado	377
7.3.2. El hessiano orlado	380
7.4. Condiciones suficientes de optimalidad global	389
7.5. Interpretación de los multiplicadores de Lagrange	391
7.6. Aplicaciones en Economía y Empresa	393
Apuntes de Historia.....	398
El uso de los multiplicadores de Lagrange en Economía.....	398
Notas Biográficas: Francis Ysidro Edgeworth	400
Textos Clásicos: F.Y. Edgeworth	400
Prácticas de Informática	402
Ejercicios propuestos	403

PARTE IV CÁLCULO INTEGRAL

8. Integral de Riemann	411
8.1. El concepto de integral en Economía. Ejemplos	411
8.2. El concepto de integral en Matemáticas.....	412
8.2.1. Construcción de la integral de Riemann	413
8.2.2. Propiedades fundamentales de la integral de Riemann	416
8.2.3. Condiciones de integrabilidad	416
8.3. La integral como antiderivada: integral indefinida	417
8.3.1 Resultados fundamentales	419
8.3.2. Cálculo de funciones primitivas.....	420
8.4. Métodos elementales de integración	421
8.4.1. Cambios de variables básicos.....	422
8.4.2. Integración por partes.....	425
8.4.3. Integración de funciones racionales por descomposición	427
8.4.4. Integración por desarrollo en serie de Taylor	433

8.4.5. Cambios de variables para integrales de funciones no racionales	434
8.5. El uso de la integración en la ciencia económica.....	435
8.5.1. Obtención de funciones totales a partir de funciones marginales	435
8.5.2. Excedente del consumidor (o del demandante)	436
8.5.3. Excedente del productor (o del oferente)	437
8.5.4. Función de distribución en estadística.....	439
8.5.5. Valor actual de un flujo de dinero	440
8.5.6. Valor medio de una función en un intervalo.....	441
8.5.7. Análisis dinámico	442
Apuntes de Historia.....	443
El cálculo integral en la Economía	443
Notas Biográficas: Vilfredo Pareto	444
Textos Clásicos: W.S. Jevons, V. Pareto y E. Barone.....	444
Prácticas de Informática	448
Ejercicios propuestos	449
9. Extensiones de la integral de Riemann.....	453
9.1. Integrales impropias y múltiples en Economía. Ejemplos.....	453
9.2. Integrales impropias	454
9.2.1. Criterios de convergencia	458
9.2.2. Integrales impropias especiales: funciones eulerianas	461
9.3. Integrales múltiples.....	466
9.3.1. Cálculo de integrales dobles	468
9.3.2. Cambio de variables en una integral doble	472
9.3.3. Integrales triples	476
9.4. Aplicaciones económicas.....	478
9.4.1. Función de distribución en estadística.....	478
9.4.2. Valor actual de un flujo de dinero	481
9.4.3. Valor medio de una función en un recinto	482
Apuntes de Historia.....	483
Precusores del uso del cálculo integral en la Economía a través de la Estadística	483
Notas Biográficas: Pierre-Simon Laplace	484
Textos Clásicos: A.A. Cournot	485
Prácticas de Informática	488
Ejercicios propuestos	489
Referencias bibliográficas.....	495

Hemos elaborado este libro como amplio manual de consulta por parte de estudiantes del primer ciclo de titulaciones universitarias en campos científicos, técnicos, económicos y sociales, en especial para los referidos a Economía, Administración y Dirección de Empresas y Finanzas, por cuanto los ejemplos y ejercicios que se citan están relacionados con estas materias.

Se puede considerar como un texto continuación de los libros de bachillerato en las opciones científicas, tecnológicas, económicas y sociales. A diferencia de estos últimos, este manual intenta aportar al alumno que ingresa en la universidad una visión más científica del lenguaje propio de las matemáticas, que aporta más capacidad de abstracción y modelización de la realidad, incentivada por las aplicaciones en campos de connotaciones sociales importantes como la Economía, la Empresa y las Finanzas. Esta visión está encaminada a mejorar la formación científica desde el primer curso universitario y permite al alumno elegir, en un futuro, la lectura de textos económicos que de otra forma sería difícil abordar por su abundante lenguaje matemático.

La importancia del análisis de funciones, tanto desde un punto de vista numérico como desde un punto de vista analítico, dentro del Análisis Económico y otras ramas de las Ciencias Económicas y Empresariales es indiscutible. A lo largo del texto se introducen numerosos ejemplos resueltos y se visualizan los conceptos, definiciones y propiedades a través de gráficos que se completan con los estudios analíticos correspondientes.

Al final de cada capítulo hemos introducido un apartado dedicado a aspectos históricos basados en textos maestros dentro de la Economía y la Empresa, que muestran diferentes contextos en los que se hace uso del lenguaje de las funciones, como expresión de la relación de dependencia entre diferentes variables.

Los estudiantes deberán familiarizarse con el uso de software o calculadora científica y con el uso de material disponible a través de la red ya que, sin duda, constituyen elementos importantes a la hora de efectuar cálculos y visualizar propiedades, todo ello como enriquecimiento de otras técnicas más tradicionales.

El criterio de numeración que en este manual se ha seguido en las definiciones, teoremas y proposiciones es correlativo para todos ellos y ayuda simplemente a localizarlos dentro del capítulo correspondiente. Muchas de las demostraciones no se incluyen en el texto para darle más peso a las aplicaciones e interpretaciones de los resultados. En cada caso indicamos referencias adecuadas para aquellos lectores que deseen consultar estas demostraciones.

Los conceptos básicos de funciones se acompañan de sus homólogos en la teoría económica. Los tipos de funciones que abordamos, en particular, las funciones convexas, las funciones compuestas, las funciones homogéneas, han sido elegidos pensando en su nivel de uso en Economía, Empresa y Finanzas. Propiamente, los

autores hemos considerado conveniente destacar el papel de la composición de funciones, ya que permite simbolizar las abundantes relaciones indirectas con que nos encontramos al construir cualquier modelo económico. Así mismo, hemos decidido exponer con mayor amplitud de la habitual en otros textos, los conceptos y virtudes de las funciones homogéneas por su uso frecuente en la modelización dentro de la teoría económica.

En definitiva, esta iniciativa permite adquirir la perspectiva de las aplicaciones propias de la teoría de las funciones reales de una y varias variables reales en los campos citados y les inicia en el estudio de dos áreas que destacan por su importancia: por un lado, la Programación Matemática que juega un papel fundamental en la toma de decisiones económicoempresariales y, por otro, la Integración de Funciones, de aplicación en multitud de modelos teóricos y econométricos.

Como se observará, este manual es el resultado de un trabajo de equipo, a lo largo de varios años de experiencia docente, que surge a partir de la coordinación que llevamos a cabo los profesores que impartimos asignaturas de Matemáticas en el Departamento de Economía Aplicada y Métodos Cuantitativos de la Universidad de La Laguna, más necesarias si cabe a partir de la nueva estructura cuatrimestral de la reforma y contrarreforma de los planes de estudio en las titulaciones de Grado en Economía, Grado en Administración de Empresas y Grado en Contabilidad y Finanzas en nuestra Universidad.

Los autores.
Febrero de 2021.

PARTE I

EL PAPEL DE LAS MATEMÁTICAS EN ECONOMÍA Y EMPRESA



LAS MATEMÁTICAS EN ECONOMÍA Y EMPRESA

I.1. EL USO DE LAS MATEMÁTICAS EN ECONOMÍA Y EMPRESA

I.1.1. Economía Discursiva y Economía Matemática

Hasta hace pocos años, y en algún caso aún hoy en día, ha sido costumbre, al comenzar cualquier libro de texto dedicado a exponer contenidos de Matemáticas en el ámbito de la Ciencia Económica y Empresarial, lanzar una arenga, apoyada en los testimonios de economistas ilustres (a ser posible Premios Nobel) a favor de la utilización de esta herramienta en un campo cuyos especialistas se habían mostrado, históricamente, muy reacios al empleo de la misma en sus escritos¹.

Y es que, a lo largo de épocas pasadas se establecía una diferenciación aparentemente taxonómica, pero sutil en el fondo, entre lo que se entendía como **Economía Discursiva**, o aquella parte del razonamiento económico que se establece por medio del lenguaje natural, y **Economía Matemática**, entendida, en sentido amplio, como aquella otra porción del razonamiento económico que emplea, en alguna medida, el lenguaje y la lógica que proveen las Ciencias Matemáticas en su desarrollo.

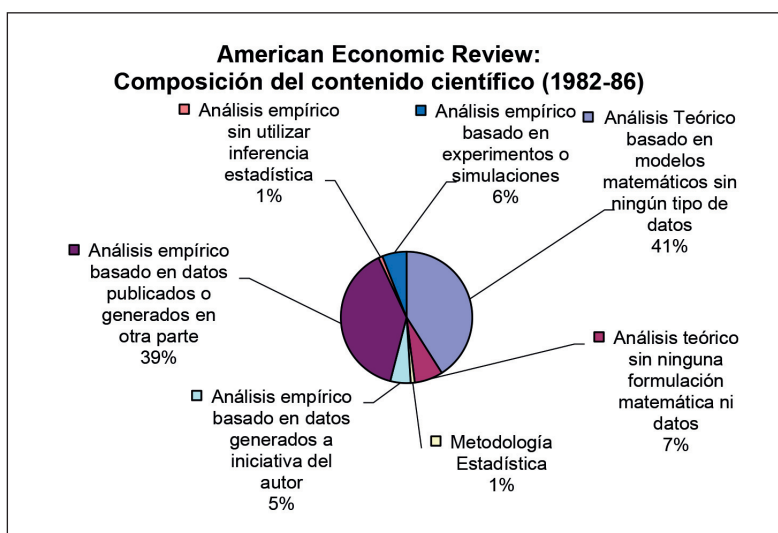
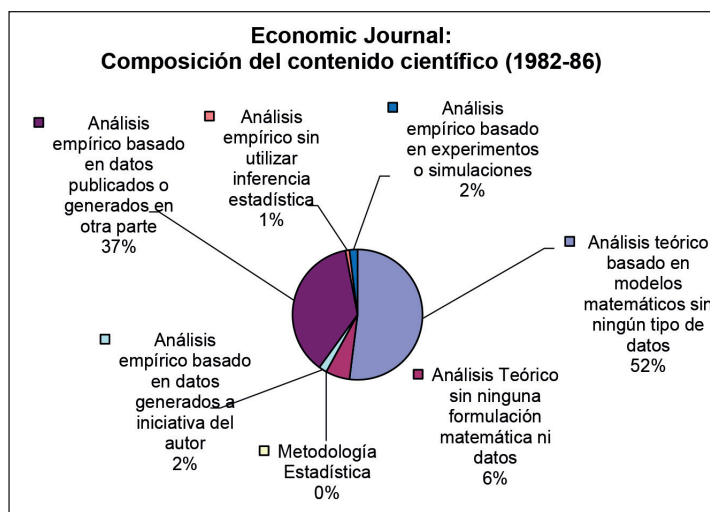
Sin embargo, en la actualidad, ya inmersos en el siglo XXI y con él en un nuevo milenio, esta manera de enfocar el tema en cuestión se encuentra claramente desfasada, sonando esta vieja disputa a “agua pasada” dentro de la profesión. Y no podía ser de otra forma, puesto que cualquier practicante de la disciplina no habrá tenido más remedio que echar mano de alguna herramienta matemática, aunque sea un mero gráfico, en algún punto a lo largo de su carrera.

Es más, cualquiera que se adentre en el cuerpo del pensamiento económico moderno debe estar familiarizado, en mayor o en menor medida, de acuerdo con el grado de profundización que desee, con el lenguaje y las técnicas matemáticas al uso, aunque luego ni siquiera lo utilice en su propio razonamiento. En caso con-

1 Véase, por ejemplo, los ya clásicos autores foráneos traducidos al castellano: Chiang (1987), Arya y Lardner (1992), Colin Glass (1982), entre otros muchos. Algunos autores españoles se dedican a profundizar fundamentalmente en los aspectos matemáticos, por ejemplo, Grafe (1991), Caballero y otros (1994), o Vilar y otros (1993).

trario, se verá relegado solamente a consultar una fracción, en múltiples aspectos o representativa, de la literatura científica económica y empresarial.

Nota Complementaria 1.1: Para ilustrar el comentario anterior podríamos acudir al siguiente gráfico² en el que se comparan los contenidos de dos publicaciones económicas punteras en EE UU, a saber, *American Economic Review* y *Economic Journal*, entre 1982 y 1986. Para ello se desagregan los artículos publicados en ambas en dos grandes categorías, Teoría y Análisis Empírico, dividiéndose estas a su vez en subcategorías tal y como se indica en los gráficos.



2 Véase Morgan (1988).

La Nota Complementaria 1.1 nos da pie también para resaltar dos de los rasgos predominantes en la Ciencia Económica y Empresarial moderna. En primer lugar, a partir de comienzos del siglo XX, el empleo masivo de las **técnicas estadísticas** para la validación empírica de las teorías económicas propuestas, y con ellas su base matemática; en segundo lugar, el **uso del ordenador**, que llega hoy en día a constituirse como una herramienta imprescindible, tanto de cara al análisis teórico como empírico, sobre todo a raíz de la popularización del PC lanzado al mercado por primera vez en 1981 de la mano de IBM.

1.1.2. Modelo económico-matemático. Concepto y construcción

El mundo económico y empresarial es un ente enormemente complejo. Cualquier fenómeno económico que analicemos está influido, a buen seguro, por multitud de factores. Baste pensar, por ejemplo, en la demanda de un simple bien del mercado. Sus altibajos a lo largo del tiempo pueden deberse a diferentes motivos como, por ejemplo, variaciones de su precio, variaciones del precio de bienes relacionados con él, cambios en la renta de los consumidores, cambios en los gustos de estos, cambios en la cantidad de población, aparición en el mercado de nuevos productos que realizan idéntica o similar función, cambios climatológicos, etc.

Dado que a nadie se le escapa que resultaría imposible detallar todas las variables que influyen en un sistema económico determinado, a los economistas no les ha quedado más remedio que hacer abstracción del mundo real y elaborar modelos sencillos que recojan lo esencial del mismo, intentando reducir los fenómenos económicos a proporciones manejables, con el fin de vislumbrar con mayor claridad las interrelaciones entre sus diferentes componentes.

De igual forma que un mapa callejero nos puede ayudar a comprender y movernos por una gran ciudad, aunque no incluya todas y cada una de sus casas y edificios, un modelo económico puede llegar a ser muy útil para comprender un sistema económico, aunque no tenga en cuenta todos y cada uno de los factores que están influyendo en su comportamiento.

Además, esta manera de obrar no es ajena al resto de disciplinas científicas. Así, un físico modeliza la materia sobre la base de la idea de molécula y átomo, aunque este sea en realidad un modelo muy simplificado de la estructura de la materia; un arquitecto basa sus construcciones en planos y maquetas, etc.

Ahora bien, si en los comienzos del pensamiento económico tales modelos fueron contruidos mediante el uso del lenguaje discursivo natural, comienza a mediados del siglo XIX un nuevo enfoque del Análisis Económico³, fundamentado en la utilización del lenguaje y la lógica propia de las Ciencias Matemáticas, con la finalidad principal de proveer de mayor racionalidad y coherencia interna a estos modelos.

Esta nueva dirección en el análisis económico se consolida a lo largo del siglo XX, y junto a la utilización masiva de técnicas estadísticas y del ordenador, da

3 Véanse los Apuntes de Historia al final del presente capítulo.

lugar a lo que actualmente se conoce como **modelo económico-matemático**, entendido este como una construcción teórica formulada en lenguaje matemático que intenta explicar las interacciones de las variables económicas en estudio (representación de la realidad económica).

El proceso de **construcción de un modelo económico-matemático** no resulta unívoco para todos los investigadores, de la misma manera que el denominado “método científico” en realidad aglomera un conjunto de técnicas y métodos cuyo denominador común es llevar el apellido “científico”⁴. De cualquier manera, podríamos esquematizar su procedimiento de confección según el diagrama de flujo recogido en la Figura 1.1 donde, en realidad, no es absolutamente necesario pasar por todas y cada una de las etapas recogidas para considerar completamente acabada la modelización.

Si diéramos un repaso a fondo de los modelos económicos elaborados hasta el momento, apreciaríamos que pueden existir algunos cuyas hipótesis de partida se basan en supuestos *razonables* que no se encuentran corroborados por el análisis empírico, en muchos casos porque contrastar estos puede ser imposible de llevar a efecto (por ejemplo, la teoría de la utilidad del consumidor). También existen modelos cuyas conclusiones pueden ser difícilmente corroboradas por un análisis empírico (por ejemplo, el modelo de empresa maximizadora del beneficio supone que la empresa conoce toda la información relevante sobre sus costes y sobre el mercado al que vende). En muchos casos, el análisis empírico apunta una posible pauta económica de comportamiento⁵. En otros, se comienza con un modelo teórico inicial *razonable*, y se va perfeccionando a través de su contrastación con los datos aportados por la realidad económica hasta obtener un modelo que refleje adecuadamente el devenir⁶. Sin embargo, habrá ocasiones en que nos enfrentaremos a modelos teóricos *razonables* que no admiten siquiera contrastación empírica por carecer de contrapartidas en la realidad económica⁷.

Así las cosas, podemos concluir que el análisis económico-matemático moderno se compone de una amalgama entre **Teoría Económica**, formulada en términos matemáticos, y **Econometría**, cuyas evoluciones, bien sea por separado o interaccionando, fundamentan y conforman buena parte de la Ciencia Económica y Empresarial contemporánea.

4 Esto no es sino una manera formal de expresar la idea de que “cada maestrillo tiene su librillo”.

5 Como apunta Friedman (1991): “La moda actual me incita a correr hacia el ordenador y mirar qué extrapolación econométrica me puede indicar.”

6 Por ejemplo, el simple modelo de demanda y oferta de un producto como predictor del precio de mercado de este.

7 Así tenemos la Teoría del Equilibrio General, desarrollada inicialmente por los premios Nobel Arrow y Debreu (1954), o la versión más sofisticada de Auman (1964).

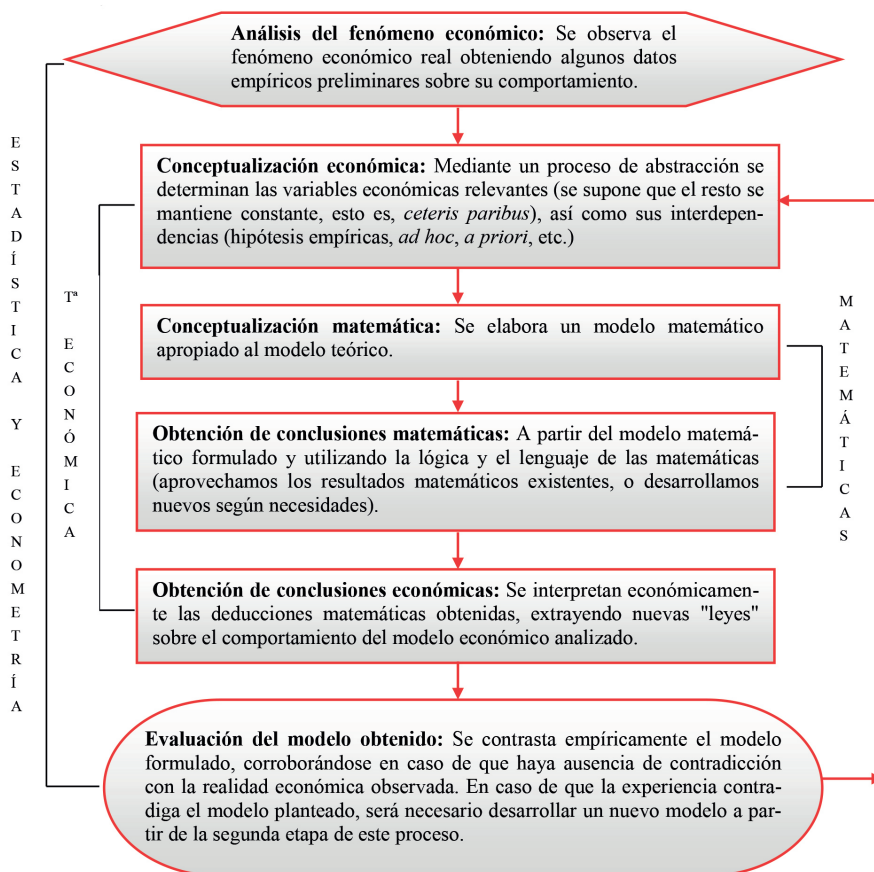


Figura I.1. Diagrama explicativo del proceso de construcción de un modelo económico-matemático⁸.

I.1.3. Ventajas e inconvenientes del uso de las Matemáticas en Economía y Empresa

Mucho se ha hablado y discutido a lo largo de la historia del pensamiento económico acerca del uso de las Matemáticas en el discurso económico, llegando incluso a momentos de controversia que, a mitad del siglo XX, provocaron la aparición de números monográficos en revistas científicas relevantes⁹. La creciente matematización de la Ciencia Económica y Empresarial, su cuantificación y la difusión de la Econometría, aparejada a la extensión y perfeccionamiento de

⁸ Siguiendo a Costa Reparaz (1982b), González y Gil (2000).

⁹ El vol. 36, Nº 4, del año 1954, de la *Review of Economics and Statistics* se dedica íntegramente a discutir el papel de las Matemáticas en la Ciencia Económica, con interlocutores tan relevantes como los posteriormente premios Nobel de Economía Paul Samuelson, Lawrence Klein, Jan Tinbergen o Robert Solow, entre otros.

los ordenadores como herramienta fundamental para el tratamiento de datos, es hoy un hecho manifiesto e irreversible, llegando a ser de gran ayuda los nuevos avances en *big data*.

No obstante, y con el objetivo de que el lector las discuta y saque sus propias conclusiones, en los cuadros siguientes intentamos recopilar y sintetizar¹⁰ las principales opiniones vertidas a lo largo de la historia del pensamiento económico y empresarial a favor y en contra del uso de las Matemáticas en esta área de conocimiento. Debe tener claro el lector que solamente pretendemos recoger diferentes opiniones.

PRINCIPALES VENTAJAS DEL USO DE LAS MATEMÁTICAS EN ECONOMÍA Y EMPRESA

1. Las Matemáticas constituyen **un lenguaje más preciso y conciso** que el discursivo natural. Como tal puede contribuir con **mayor rigor lógico** a la naturaleza acumulativa del conocimiento y a desarrollos analíticos innovadores, sintéticos y a la vez generales, frente a las contribuciones no matemáticas al Análisis Económico que pecan a menudo de vagas, poco rigurosas o infladas en exceso.
2. El método matemático obliga al científico a **explicitar de una manera clara** y sin ambigüedades las hipótesis de partida, erradicando las posibles contradicciones que pudieran existir entre estas o los supuestos encubiertos en las diferentes interpretaciones que se pueden deducir del lenguaje común.
3. Permite la utilización de la **amplia gama de técnicas y teorías disponibles** (lemas, proposiciones, teoremas, etc.) como ayuda en el razonamiento económico.
4. Por añadidura, las Matemáticas sirven de fundamento a los trabajos econométricos y, por tanto, sin ellas difícilmente se podría llevar a cabo la **contrastación científica** con la realidad económica.
5. El conocimiento de las Matemáticas facilita el **uso de software científico**.
6. Nos obliga a **utilizar las matemáticas de forma consciente y discriminada** en la búsqueda de relaciones de la Economía y Empresa con otras ciencias.

¹⁰ Siguiendo el trabajo de Beed y Kane (1991).

PRINCIPALES CRÍTICAS AL USO DE LAS MATEMÁTICAS EN ECONOMÍA Y EMPRESA

1. Las Matemáticas **no son el lenguaje materno de los economistas** y, por lo tanto, pueden llevar a problemas tanto de aprendizaje como de comunicación entre economistas discursivos y economistas matemáticos¹¹.
2. Los axiomas de la Economía Matemática¹² **no** se corresponden con el **comportamiento del mundo real**.
3. El número de teorías generadas por la Economía Matemática **comprobables empíricamente es pequeño** en comparación con el volumen global del Análisis Económico-Matemático. Este argumento es una consecuencia directa del punto anterior. Por tanto, si la expresión matemática de un fenómeno económico no descansa en supuestos reales, entonces, según señalan algunos autores, lógicamente no pueden llevar al científico a predicciones confirmables empíricamente. De esta manera, mientras que los economistas-matemáticos se preocupan fundamentalmente de analizar las propiedades formales de sus modelos, existe escaso interés en generar predicciones contrastables empíricamente¹³.
4. **Algunos aspectos económicos no son naturalmente cuantitativos**, en contraposición a lo que proclaman fervientemente los propulsores de las Matemáticas. Las Matemáticas **evitan la atención sobre problemas económicos eminentemente cualitativos**, tales como ciertos rasgos de comportamiento de los agentes económicos o la inclusión de consideraciones de equidad o de las posibles penurias transitorias en los modelos de política económica contruidos a partir de la teoría neoclásica, manteniéndose una tendencia a sesgar la información, reduciendo la importancia de aquellas cuestiones que no son convenientemente cuantificables. Como consecuencia de ello, la teoría matemática conduce y da forma a los problemas que son analizados.
5. La traducción del discurso económico sostenido en el lenguaje natural a las Matemáticas puede ser **simplista e ilegítima**, a pesar de la *estricta equivalencia entre símbolos matemáticos y lenguaje literario* que proclamaban autores como Paul Samuelson o George Stigler. Esta crítica se centra, principalmente, en dos características. Una, las Matemáticas no son efectivamente un lenguaje natural y por lo tanto no pueden expresar sino un

11 En este sentido conviene señalar que la inclusión de asignaturas con contenidos de Matemáticas en las titulaciones universitarias de Economía y de Administración y Dirección de Empresas en todas y cada una de las Facultades o Centros relacionados con Economía y Empresa a lo largo de todo el mundo está contemplada para evitar precisamente este tipo de situaciones.

12 Hay que reseñar que esta crítica es aplicable no solamente a la Economía Matemática sino también a la Economía y Empresa, en general.

13 Valga como ejemplo el libro de texto de *Microeconomía Intermedia* escrito por Varian (1991), en el que no se indica explícitamente cómo o cuándo cualquier teorema matemático produce predicciones empíricamente comprobables.

rango limitado de relaciones y acciones humanas; y otra, la expresión de procesos económicos en términos matemáticos puede conllevar connotaciones sobre el comportamiento de los mismos que estos no poseen. Por consiguiente, las explicaciones de fenómenos económicos que incluyen rasgos culturales, sociológicos, históricos o psicológicos, entre otros, son difícilmente reducibles a expresiones matemáticas.

6. **No existe una manera objetiva de comprobar** cuándo la Economía Matemática es más precisa o más simple que la Economía No Matemática. La claridad, precisión y concisión de las Matemáticas pueden ser cuestionadas. ¿Cuál es la definición objetiva de los términos *claridad*, *precisión* o *simplicidad*? Perfectamente pueden existir sistemas económicos analizados más hábilmente por las Matemáticas que sin ellas, y viceversa.
7. Se suele criticar a la Econometría el **preocuparse más por adecuar** ecuaciones de comportamiento, prescindiendo a veces de la Teoría Económica, en aras del mayor poder predictivo del modelo y en detrimento de sus posibilidades explicativas. Por otro lado, también se suele criticar la forma de extrapolar información de una determinada muestra al caso general, pero esto ya es cuestión más propia de la Teoría Estadística.

En un esfuerzo de tolerancia e integración, podemos concluir de la discusión anterior que parece acertado aceptar la pluralidad de métodos existentes en el Análisis Económico moderno, tanto matemáticos como no matemáticos, pues todos ellos contribuyen, cada uno con sus correspondientes costes y beneficios, ventajas e inconvenientes, a *desnudar* la verdad económica.

Ahora bien, también debe quedar claro que los desarrollos modernos de la Ciencia Económica y Empresarial se han guiado, en múltiples ocasiones, mediante métodos matemáticos, y que trabajos basados en estos constituyen una rama del Análisis Económico de gran peso en la actualidad y de gran aceptación en la comunidad científica internacional. Esta perspectiva nos permite afirmar que las causas de la inclusión de asignaturas con contenidos de Matemáticas en las titulaciones universitarias de Economía y de Administración y Dirección de Empresas de todo el mundo residen en dos pilares fundamentales. Por una parte, se intentan corregir los defectos de comunicación existentes en el pasado entre economistas matemáticos y no matemáticos, introduciendo a los futuros economistas o administradores de empresas en diferentes teorías y técnicas matemáticas que les serán de gran utilidad a la hora de comprender con mayor profundidad diferentes aspectos del Análisis Económico moderno. Por otro lado, el poseer este bagaje básico en el terreno matemático permitirá también a los profesionales del área de las próximas generaciones utilizar las herramientas matemáticas adecuadas a sus desarrollos analíticos abandonando la antigua aversión a su empleo.

Teniendo en cuenta todo lo dicho anteriormente, concluimos que entre los conocimientos de cualquier economista moderno deben figurar ciertas nociones y

técnicas matemáticas que le proporcionen una cultura general en diferentes teorías matemáticas, que, junto con otros métodos, le serán de gran ayuda en el desempeño de su labor. En palabras del ilustre Frank Hahn¹⁴:

Tengo que decir que alguna clase de formación cuantitativa será de utilidad. Con esto quiero decir que será útil para los economistas ser de aquella clase de personas a las que les gustaban las Matemáticas en la escuela y que no se atemorizan al ver una x . Habrá también otras salidas especiales para aquellos estudiantes más matemáticos. Pienso que también es importante que el economista esté, como se dice generalmente, “ampliamente educado”. Por ejemplo, debería leer poesía.

I.2. LENGUAJE Y RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

En este apartado pretendemos dar un breve repaso, primero a la simbología matemática básica que emplearemos –fundamentalmente la propia de la Teoría de Conjuntos– así como intentar asentar diversas ideas elementales acerca del razonamiento matemático. Posteriormente trataremos aquellas nociones y propiedades del conjunto de números reales y su producto cartesiano que utilizaremos a lo largo de todos los capítulos de este manual.

I.2.1. Símbolos e ideas sobre el razonamiento matemático

Las siguientes tablas recogen, con cierto orden, los símbolos matemáticos de uso frecuente y aquellos aspectos del razonamiento matemático que pensamos debe tener muy claros el lector¹⁵, para avanzar posteriormente en el conocimiento y uso de las Matemáticas como herramienta.

SÍMBOLOS MATEMÁTICOS DE USO FRECUENTE		
SÍMBOLOS	SIGNIFICADO	EJEMPLOS
$\{ \}$	se utilizan para describir un conjunto	$A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2\}$ $C = \{\text{números enteros positivos mayores que } 4\}$
$\mathbb{N}$	conjunto de los números naturales	$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$
$\mathbb{Z}$	conjunto de los números enteros	$\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$
$\mathbb{Q}$	conjunto de los números racionales	$\mathbb{Q} = \{\dots, -2, -3/2, -1, -1/3, 0, 1/2, 1, 2, 5/2, \dots\}$
$\mathbb{R}$	conjunto de los números reales	$\mathbb{R} = \{\dots, -2, -3/2, -1, -1/3, 0, 1/2, 1, \sqrt{2}, 2, 5/2, \pi, \dots\}$

14 Entrevista a Frank Hahn en Parkin y King (1992), pág. 261.

15 Véase, por ejemplo, de Guzmán (2003).

SÍMBOLOS MATEMÁTICOS DE USO FRECUENTE		
SÍMBOLOS	SIGNIFICADO	EJEMPLOS
$\mathbb{R}^+$	conjunto de los números reales no negativos (incluye el 0)	$\mathbb{R}^+ = \{0, 1/2, 1, \sqrt{2}, 2, 5/2, \pi, \dots\}$
$\mathbb{R}^-$	conjunto de los números reales no positivos (incluye el 0)	$\mathbb{R}^- = \{\dots, -\pi, -2, -3/2, -1, -1/3, 0\}$
$\in, \notin$	pertenece, no pertenece	$1 \in A, 3 \notin B$
$\subset, \subseteq, \not\subset$	contenido, contenido o igual, no contenido	$B \subset A, C \not\subset A$, Sea D un conjunto tal que $D \subseteq A, \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
$\cup, \cap$	unión, intersección	$A \cup C = \mathbb{N}, A \cap B = B$
A^c	conjunto complementario del subconjunto $A \subseteq X$: $A^c = X - A$	$B \subset A : B^c = A - B = \{3, 4\}$
$\emptyset$	conjunto vacío	$A \cap C = \emptyset$
/	tal que	$A = \{x/x \text{ entero positivo menor que } 5\}$
$<, \leq, >, \geq$	menor, menor o igual, mayor, mayor o igual	$3 < 4, C = \{x \in \mathbb{Z}/x > 4\}$. Sea $x \in \mathbb{Z}$ tal que $x \leq 5$, o bien $x \geq 7$.
∞	infinito	$x \rightarrow \infty$
$\Rightarrow$	implica	perro $\Rightarrow$ animal
$\Leftrightarrow$	si y solo si	cuadrado $\Leftrightarrow$ polígono de cuatro lados iguales y cuatro ángulos interiores rectos
$\forall$	para todo	$\forall a \in A, a < 5$
$\exists$	existe	$\exists a \in A/a = 4$
$\sum, \prod$	sumatorio, producto	$\sum_{a \in A} a = \sum_{a=1}^4 a = 10, \prod_{a \in A} a = \prod_{a=1}^4 a = 24$

IDEAS ELEMENTALES SOBRE EL RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

El razonamiento matemático es esencialmente **deductivo**, esto es, se parte de **unas hipótesis o conjeturas** que se suponen verdaderas y, a través de la lógica, se llegan a conclusiones, **resultados o tesis**, cuya verdad se deduce de las primeras.

Las formas principales que adoptan los resultados matemáticos son las de **Proposición y Teorema** (la diferencia suele estar en la mayor importancia o alcance de los Teoremas frente a las Proposiciones). Ambos pueden ser de dos formas:

$$A \Rightarrow B$$

$$A \Leftrightarrow B$$

En el primer caso la hipótesis viene representada por A y se demuestra la tesis B . En este caso también se dice que **B es una condición necesaria para A** , esto es, siempre que ocurra A ocurrirá también B o, dicho de otra manera que suele ser de enorme utilidad en la práctica, **si no se da B tampoco se puede dar A** (esta última afirmación equivalente al primer resultado se suele llamar **contrarrecíproco** y esquemáticamente sería $\text{No } B \Rightarrow \text{No } A$). También se puede decir que **A es una condición suficiente para B** .

El segundo tipo de resultado es lo que se llama **una condición necesaria y suficiente** (caracterización) en el sentido de que A solamente se da cuando se verifica B y viceversa, es decir, no se puede verificar A y no B , ni tampoco verificarse B y no A . Es decir, el segundo resultado equivale a dos resultados del tipo anterior $A \Rightarrow B$ y $B \Rightarrow A$. Por lo tanto, para probar una condición necesaria y suficiente debemos demostrar ambas implicaciones.

A la hora de demostrar la veracidad de un resultado matemático del tipo $A \Rightarrow B$, es importante tener presente que disponemos de varios caminos, principalmente:

- a) **Demostración directa:** consiste en partir de las hipótesis que tengamos y, directamente, empleando el razonamiento y la lógica matemáticas, llegar a comprobar que se verifica la tesis.
- b) **Demostrar el contrarrecíproco:** probar la afirmación $\text{No } B \Rightarrow \text{No } A$ directamente, esto es, suponer que no se verifica B y llegar empleando la lógica matemática a que tampoco se verifica A .
- c) **Demostración por reducción al absurdo:** esta es una tercera vía muy utilizada. Consiste en suponer cierta la hipótesis A y también que no se verifica B (suponer cierto $\text{No } B$) e intentar ver que de ello se deriva una situación contradictoria o absurda, con lo cual si se da A necesariamente se tiene que verificar B (en caso contrario llegamos a un absurdo).

Por último, baste señalar que en muchas ocasiones intentaremos probar un resultado sin llegar a acabar de demostrarlo. En estas situaciones puede ayudarnos el tomar algún ejemplo concreto y comprobar si este verifica la afirmación que pretendemos demostrar. Si la satisface, no podremos afirmar la veracidad general del resultado (esto que puede parecer trivial es quizá una de las fuentes de errores más extendidas)¹⁶. Si por el contrario, encontramos un ejemplo para el que no se satisface la afirmación (esto es lo que se llama un contraejemplo), entonces ya habremos probado la falsedad de la misma¹⁷.

16 Para que el lector comprenda adecuadamente lo que acabamos de comentar bien vale un ejemplo típico debido a Kuhn. Si nos enfrentamos a la afirmación: “todos los cisnes son blancos”, y vemos en un río un cisne blanco, esto no querrá decir que tengamos probada esta afirmación de forma general, sino que simplemente la hemos corroborado en un caso concreto (es decir, solamente hemos comprobado que cierto cisne verifica la afirmación anterior).

17 Siguiendo con el ejemplo del cisne, efectivamente si llegáramos a ver un cisne negro, ya quedaría claro que la afirmación “todos los cisnes son blancos” es radicalmente falsa.

1.2.2. Nociones elementales sobre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^n$

En este apartado queremos recoger diferentes conceptos referentes a los conjuntos $\mathbb{R}$ y a sus productos cartesianos $\mathbb{R}^n$ que supondrán la base para la mayoría de los temas que tocaremos en el presente manual. En primer lugar, recordemos la definición general de producto cartesiano para comprender en toda su dimensión el conjunto euclídeo $\mathbb{R}^n$.

Definición 1.1. El **producto cartesiano de dos conjuntos** A y B se denota $A \times B$ y es el conjunto formado por todas las parejas ordenadas

$$A \times B = \{(a, b) / a \in A \text{ y } b \in B\}$$

Análogamente, el **producto cartesiano de n conjuntos** ($n \in \mathbb{N}$) $A_1, \dots, A_n$ es el conjunto formado por las n-uplas ordenadas

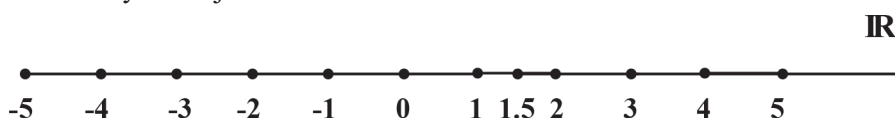
$$A_1 \times \dots \times A_n = \{(a_1, \dots, a_n) / a_i \in A_i, i = 1, \dots, n\}.$$

El caso particular de la definición anterior que más nos interesa son los productos cartesianos de $\mathbb{R}$ por sí mismo, esto es, los denominados **conjuntos euclídeos**.

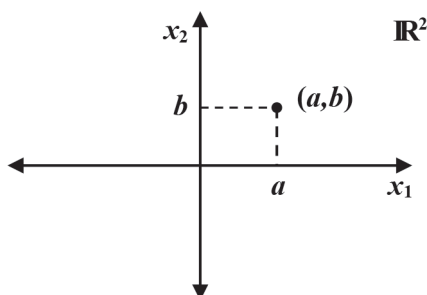
$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) / x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n\}$$

Así obtenemos, por ejemplo:

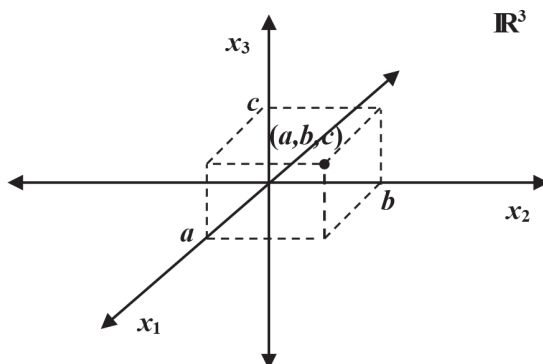
- a) **La recta real ($n = 1$): $\mathbb{R}$.** Como es bien sabido, su representación gráfica es una recta, esto es, existe una aplicación biyectiva entre los puntos de una recta y el conjunto de números reales.



- b) **El plano euclídeo ($n=2$): $\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) / x_i \in \mathbb{R}, i=1,2\}$.** Su representación gráfica se suele realizar a través del sistema cartesiano habitual con dos ejes de coordenadas.



- c) **El espacio euclídeo ($n = 3$):** $\mathbb{R}^3 = \{ (x_1, x_2, x_3) / x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, 3 \}$. Su representación gráfica se lleva a cabo habitualmente mediante la proyección diédrica del espacio tridimensional en el plano, con tres ejes de coordenadas.



Cada componente $x_i, i=1, \dots, n$ de un elemento $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ se suele denominar también **coordenada i-ésima** del mismo. Así, por ejemplo, el punto $(1, 3, 5) \in \mathbb{R}^3$ tiene primera coordenada 1, segunda coordenada 3 y tercera coordenada 5. Además, nótese que en la definición anterior **es esencial que las ternas son ordenadas**, esto es, por ejemplo en $\mathbb{R}^3$, los elementos de coordenadas $(1, 3, 5)$ y $(3, 1, 5)$ son completamente diferentes.

Definición 1.2. Dados dos puntos $x=(x_1, \dots, x_n), y=(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ se define la **distancia (euclídea) entre x e y** , y se denota **$d(x, y)$** , como aquel número real positivo dado por:

a) Si $n=1, \forall x, y \in \mathbb{R}, d(x, y) = |x - y|$.

b) Si $n > 1, \forall x, y \in \mathbb{R}^n, d(x, y) = +\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$.

Ejemplo 1.1. Ejemplos de cálculo de distancias en $\mathbb{R}^n$.

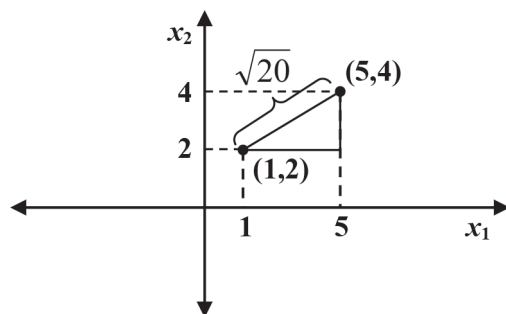
a) En $\mathbb{R}$ $d(-1, 2) = |-1 - 2| = 3$
 $d(2.5, 10) = |2.5 - 10| = 7.5$

Nótese que, en consecuencia, la distancia entre dos números reales nos da el número de unidades que se encuentran entre ellos (concretamente entre sus representaciones gráficas).

b) En $\mathbb{R}^2$ $d((1, 2), (5, 4)) = +\sqrt{(1 - 5)^2 + (2 - 4)^2} = +\sqrt{20}$
 $d((0, 0), (3, 4)) = +\sqrt{(0 - 3)^2 + (0 - 4)^2} = +\sqrt{25} = 5$

Adviértase que la distancia entre dos puntos del plano euclídeo coincide con el número de unidades que contiene el segmento que los une. Gráficamente podemos

ver esto de forma simple aplicando el Teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo que aparece a continuación:



Propiedades de la distancia euclídea en $\mathbb{R}^n$

$\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$, se tienen las siguientes propiedades de la distancia euclídea definida en $\mathbb{R}^n$ cuya demostración dejamos al lector debido a que se derivan fácilmente de la definición dada:

1. $d(x, y) \geq 0$. Además, $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x)$
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

(Esta última propiedad es más difícil de demostrar, pues hay que utilizar ciertas desigualdades para ello. Sin embargo, gráficamente en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ el lector la podrá comprobar sin dificultad).

Pasamos a continuación a recordar en primer lugar la noción de intervalos abiertos, cerrados o semicerrados en $\mathbb{R}$ para después definir los conjuntos de $\mathbb{R}^n$ denominados bolas abiertas o cerradas centradas en un punto y de radio dado. Este concepto nos permitirá dar la definición de **entorno de un punto de $\mathbb{R}^n$** ; estos conjuntos serán clave en los capítulos siguientes.

Definición 1.3. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, se definen los conjuntos de números reales siguientes con la notación que se indica:

- a) **Intervalo cerrado de extremos a y b :** $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$
- b) **Intervalo abierto de extremos a y b :** $(a, b) \equiv]a, b[= \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$
- c) **Intervalo cerrado en a y abierto en b :** $[a, b) \equiv [a, b[= \{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$
- d) **Intervalo abierto en a y cerrado en b :** $(a, b] \equiv]a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\}$

Además, en los apartados b y d, el extremo a puede ser $-\infty$, y en los casos b y c, el extremo b puede ser $+\infty$.

Ejemplo 1.2. Ejemplos de Intervalos en $\mathbb{R}$.

- a) $[1,2]$ está compuesto por todos los números reales entre 1 y 2 incluyendo los extremos pues es un intervalo cerrado.
- b) $]1,2[$ está compuesto por todos los números reales entre 1 y 2 sin incluir los extremos (esto es, $1,2 \notin]1,2[$) pues es un intervalo abierto.
- c) $[1,2[$ está formado por todos los números reales entre 1 y 2, incluyendo el 1 pero excluyéndose el 2 (es un intervalo cerrado en 1 y abierto en 2).
- d) $]-\infty,2[$ es el conjunto de todos los números reales menores estrictos que 2.
- e) $]-\infty,2]$ es el conjunto de todos los números reales menores o iguales a 2.
- f) $]1,+\infty[$ es el conjunto de todos los números reales mayores estrictos que 1.
- g) $[1,+\infty[$ es el conjunto de todos los números reales mayores o iguales que 1.
- h) $]-\infty,+\infty[$ coincide con el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$.

Definición 1.4. Dado $x \in \mathbb{R}^n$, $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, se define la:

- a) **Bola cerrada de centro x y radio r** , $\overline{B}(x,r)$, como el conjunto de puntos de $\mathbb{R}^n$ cuya distancia al punto x es menor o igual que r , es decir,

$$\overline{B}(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n / d(x,y) \leq r\}$$

- b) **Bola abierta de centro x y radio r** , $B(x,r)$, como el conjunto de puntos de $\mathbb{R}^n$ cuya distancia al punto x es menor estrictamente que r , esto es,

$$B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n / d(x,y) < r\}$$

Obviamente siempre se tendrá que $B(x,r) \subset \overline{B}(x,r)$. Cuando hablemos en adelante de una bola centrada en un punto a secas se debe entender una bola abierta.

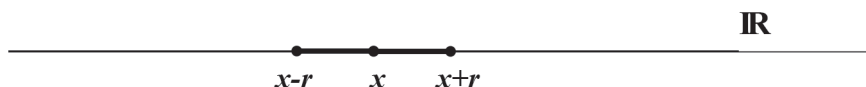
Ejemplo 1.3. Bolas abiertas y cerradas en $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

- a) En $\mathbb{R}$, tenemos los intervalos:

$$\overline{B}(x,r) = \{y \in \mathbb{R} / d(x,y) = |x-y| \leq r\} = [x-r, x+r]$$

$$B(x,r) = \{y \in \mathbb{R} / d(x,y) = |x-y| < r\} =]x-r, x+r[$$

Gráficamente,

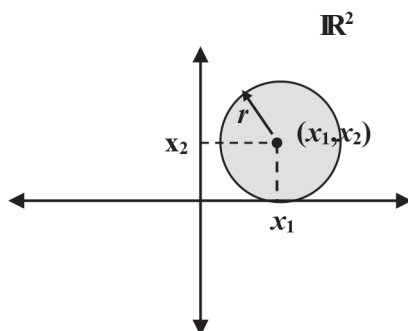


b) En $\mathbb{R}^2$, sea $x=(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ entonces,

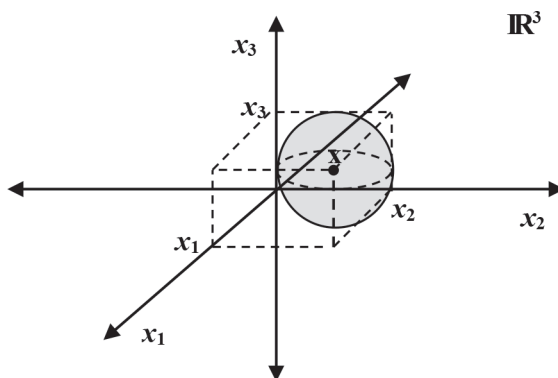
$$\overline{B}(x, r) = \{ y=(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 / d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \leq r \}$$

$$B(x, r) = \{ y=(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 / d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} < r \}$$

Gráficamente estos conjuntos coincidirán, el primero con los puntos de un círculo centrado en el punto x y radio r incluyendo los puntos de la circunferencia de centro x y radio r , y el segundo los puntos del círculo centrado en x y radio r excluyendo los puntos de la circunferencia que lo rodea. Gráficamente,



c) En $\mathbb{R}^3$, análogamente se comprueba que la bola cerrada de centro x y radio r coincide con los puntos interiores de la esfera de centro x y radio r incluyendo los puntos de la esfera que la delimita, mientras que la bola abierta de centro x y radio r consta solamente de los puntos interiores. Gráficamente,



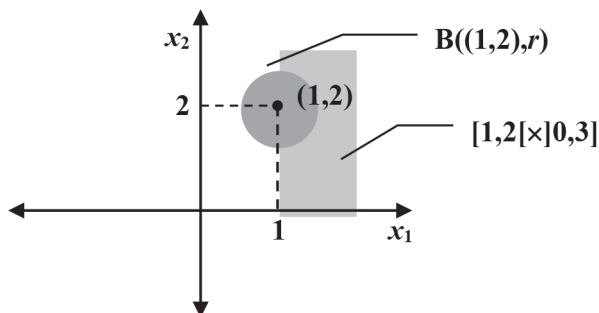
Definición 1.5. Sea $x \in \mathbb{R}^n$, se dice que un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^n$ es un **entorno del punto x** si existe alguna bola centrada en x que está contenida completamente en el mismo, esto es, si

$$\exists r > 0 / B(x, r) \subseteq E$$

Adviértase por lo tanto que, de forma intuitiva, la definición anterior está considerando como un entorno de un punto $x \in \mathbb{R}^n$ a cualquier conjunto que *rodee* totalmente al punto, en el sentido de que existe una bola centrada en el punto (nótese que los puntos de la bola *rodean* completamente al punto x) formada toda ella por puntos del conjunto entorno, es decir, contenida en el entorno. Obviamente **cualquier bola centrada en un punto será un entorno del mismo**.

Ejemplo 1.4. Entornos de un punto en $\mathbb{R}^n$.

- a) **En $\mathbb{R}$:** Las $B(2,r)$, con $r>0$, el propio $\mathbb{R}$, o los intervalos $]-\infty, 5[$, $[0, 3]$, $]0, 3]$, $[0, 4[$ son todos ellos entornos del punto $x=2$. Sin embargo, los intervalos $]-\infty, 2[$, $[0, 2]$, o el conjunto $\{2\}$ no son entornos de este punto puesto que, el primero ni siquiera contiene al punto (obsérvese que todo entorno de un punto debe contener a este), mientras que los otros dos no contienen totalmente ninguna bola centrada en $x=2$ (puesto que toda bola centrada en 2 contiene siempre números mayores que 2, esto es, a la derecha de $x=2$).
- b) **En $\mathbb{R}^2$:** Nuevamente las $B((1,2),r)$, con $r>0$, $\mathbb{R}^2$, o los conjuntos $]0, 3] \times [1, 3]$, $]0, 1.5[\times]1.5, +\infty[$, $\mathbb{R} \times [0, 3]$, son entornos del punto $(1,2)$. Sin embargo, los conjuntos $[1, 2] \times [0, 3]$ ó $[0, 3] \times [1, 2]$ no lo son puesto que no existe ninguna bola centrada en $(1,2)$ y radio r contenida totalmente en ellos. Gráficamente,



La definición de bola centrada en un punto nos permitirá clasificar cada punto de $\mathbb{R}^n$ con relación a un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ dado. Así, diremos que un punto es **interior** a un conjunto si existe una bola centrada en el mismo contenida en el conjunto, que es **adherente** si cualquier bola centrada en el mismo contiene siempre puntos del conjunto, de **acumulación** si también cualquier bola centrada en el punto incluye siempre puntos del conjunto diferentes del punto que tratemos, **aislado** si existe una bola centrada en el punto que no contiene más elementos del conjunto salvo al punto en cuestión, y **frontera** si cualquier bola centrada en el punto siempre contiene elementos del conjunto y de su complementario. Las siguientes definiciones formalizan estas ideas.

Definición 1.6. Sea $x \in \mathbb{R}^n$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, se dice que el punto x es

- a) **Interior al conjunto A** , si $\exists r > 0 / B(x, r) \subseteq A$.
- b) **Adherente al conjunto A** , si $\forall r > 0, B(x, r) \cap A \neq \emptyset$.
- c) **De acumulación del conjunto A** , si $\forall r > 0, (B(x, r) - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$.
- d) **Aislado del conjunto A** , si $\exists r > 0 / B(x, r) \cap A = \{x\}$.
- e) **Frontera del conjunto A** , si $\forall r > 0, B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ y $B(x, r) \cap A^c \neq \emptyset$.

Definición 1.7. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$, definimos los conjuntos:

- a) **Conjunto Interior de A** , y se denota $\overset{\circ}{A}$, como el formado por todos los puntos interiores al conjunto A , esto es, $\overset{\circ}{A} = \{x \in \mathbb{R}^n / x \text{ es punto interior de } A\}$.
- b) **Conjunto Clausura o Adherencia de A** , y se denota $\overline{A}$, como el formado por todos los puntos adherentes al conjunto A , esto es, $\overline{A} = \{x \in \mathbb{R}^n / x \text{ es adherente a } A\}$.
- c) **Conjunto Derivado de A** , y se denota A' , como el formado por todos los puntos de acumulación del conjunto A , esto es, $A' = \{x \in \mathbb{R}^n / x \text{ es punto de acumulación de } A\}$.
- d) **Conjunto Frontera de A** , y se denota $\text{Fr}(A)$, como el formado por todos los puntos frontera del conjunto A , esto es, $\text{Fr}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n / x \text{ es punto frontera de } A\}$.

Puntualizaciones a las definiciones anteriores:

- a) Fácilmente se comprueba que el interior de un conjunto está siempre incluido en el mismo, esto es, $\overset{\circ}{A} \subseteq A$. Asimismo, todo conjunto contiene a sus puntos aislados.
- b) Obviamente, todo punto de un conjunto será adherente, esto es, pertenecerá a su clausura, $A \subseteq \overline{A}$. Lo mismo ocurre con el conjunto frontera y el derivado de un conjunto, esto es, $A' \subseteq \overline{A}$ y $\text{Fr}(A) \subseteq \overline{A}$. Advértase que los puntos frontera o de acumulación no tienen necesariamente que pertenecer al conjunto.
- c) De la definición de punto frontera se infiere inmediatamente que $\text{Fr}(A) = \text{Fr}(A^c)$. Por otro lado, un punto frontera necesariamente es un punto aislado o de acumulación. Además, un punto interior no puede pertenecer a la frontera del conjunto.

Ejemplo 1.5. Puntos interiores, adherentes, de acumulación, aislados y fronteras de conjuntos en $\mathbb{R}^n$.

a) En $\mathbb{R}$: Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Fácilmente se deducen a partir de las definiciones anteriores los conjuntos interior, clausura, derivado y frontera de los distintos intervalos de extremos a y b .

$$]a, b[=]a, b[; \overline{]a, b[} = [a, b] ;]a, b]' = [a, b] ; \text{Fr}(]a, b[) = \{a, b\}$$

$$[a, b] =]a, b[; \overline{[a, b]} = [a, b] ; [a, b]' = [a, b] ; \text{Fr}([a, b]) = \{a, b\}$$

$$]a, b[=]a, b[; \overline{]a, b[} = [a, b] ; [a, b]' = [a, b] ; \text{Fr}([a, b]) = \{a, b\}$$

$$]a, b[=]a, b[; \overline{]a, b[} = [a, b] ;]a, b]' = [a, b] ; \text{Fr}(]a, b[) = \{a, b\}$$

Además, si $a = -\infty$

$$]-\infty, b[=]-\infty, b[; \overline{]-\infty, b[} =]-\infty, b] ;]-\infty, b]' =]-\infty, b] ; \text{Fr}(]-\infty, b[) = \{b\}$$

$$]-\infty, b] =]-\infty, b[; \overline{]-\infty, b]} =]-\infty, b] ;]-\infty, b]' =]-\infty, b] ; \text{Fr}(]-\infty, b]) = \{b\}$$

También, si $b = +\infty$

$$]a, +\infty[=]a, +\infty[; \overline{]a, +\infty[} = [a, +\infty[;]a, +\infty]' = [a, +\infty[; \text{Fr}(]a, +\infty[) = \{a\}$$

$$[a, +\infty[=]a, +\infty[; \overline{[a, +\infty[} = [a, +\infty[; [a, +\infty]' = [a, +\infty[; \text{Fr}([a, +\infty[) = \{a\}$$

b) En $\mathbb{R}^2$: por ejemplo para el conjunto $A = [1, 2[\times]0, 3]$ representado en el Ejemplo 1.4b, se tiene

$$\begin{aligned} \overset{0}{A} &=]1, 2[\times]0, 3[, \overline{A} = [1, 2] \times [0, 3], A' = [1, 2] \times [0, 3], \\ \text{Fr}(A) &= (\{1\} \times [0, 3]) \cup (\{2\} \times [0, 3]) \cup ([1, 2] \times \{0\}) \cup ([1, 2] \times \{3\})^{18}. \end{aligned}$$

Concluimos este apartado con las definiciones de conjuntos acotados, abiertos, cerrados y compactos en $\mathbb{R}^n$, las cuales jugarán un papel fundamental en múltiples aplicaciones a lo largo de los diferentes capítulos que se enmarcan en el presente Manual.

18 Obsérvese que el conjunto frontera de A no es sino el formado por los puntos que se sitúan sobre el rectángulo que bordea al mismo.

Definición 1.8. Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ se dirá

- a) **Abierto** si todos sus puntos son interiores, esto es, si $A = \overset{0}{A}$.
- b) **Cerrado** si contiene todos sus puntos adherentes, esto es, si $A = \overline{A}$.
- c) **Acotado** si existe una bola centrada en $0 \in \mathbb{R}^n$ y radio $r > 0$ que lo contiene totalmente, esto es, si $\exists r > 0 / A \subseteq B(0, r)$.
- d) **Compacto** si es cerrado y acotado.
- e) **Convexo** si $\forall x_1, x_2 \in X$ se tiene $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in X$, con $0 \leq \lambda \leq 1$.

Puntualizaciones a las definiciones anteriores:

- a) $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto $\Leftrightarrow \text{Fr}(A) \subseteq A^c$

Esta afirmación es inmediata puesto que, en primer lugar todos los puntos de un conjunto abierto son interiores y, como vimos antes, un punto interior no puede pertenecer a la frontera del conjunto. Recíprocamente, si $\text{Fr}(A) \subseteq A^c$, entonces todo punto $a \in A$ necesariamente es interior (esto es, $\exists r > 0 / B(a, r) \subseteq A$), puesto que si esto no fuera así (es decir, $B(a, r) \cap A^c \neq \emptyset$), como es evidente que $B(a, r) \cap A \neq \emptyset$ entonces $a \in \text{Fr}(A)$, lo cual sería absurdo.

- b) Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es cerrado $\Leftrightarrow$ Su complementario A^c es abierto

Esta caracterización alternativa de los conjuntos cerrados y abiertos resulta muy útil en la práctica y es una consecuencia inmediata de la observación anterior. Efectivamente, si $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es cerrado $\Rightarrow A = \overline{A}$ y como siempre la frontera de un conjunto está incluida en su clausura $\Rightarrow \text{Fr}(A) = \text{Fr}(A^c) \subseteq \overline{A} = A \Rightarrow A^c$ es abierto. Recíprocamente, si A^c es abierto $\Rightarrow \text{Fr}(A) = \text{Fr}(A^c) \subseteq A$, y como vimos anteriormente $\overline{A} = A \cup \text{Fr}(A) \Rightarrow A = \overline{A} \Rightarrow A$ es un conjunto cerrado.

Ejemplo 1.6. Conjuntos abiertos, cerrados, acotados y compactos en $\mathbb{R}^n$.

- a) **En $\mathbb{R}$:** Los intervalos abiertos por ambos extremos serán conjuntos abiertos, mientras que los cerrados por ambos extremos serán conjuntos cerrados (los intervalos abiertos no contienen su frontera y los cerrados sí). Obsérvese que no todo conjunto tiene que ser bien abierto o bien cerrado. Así, por ejemplo, cualquier intervalo finito que sea abierto en un extremo y cerrado en el otro no puede ser clasificado en ninguna de estas dos categorías (no son ni abiertos ni cerrados).

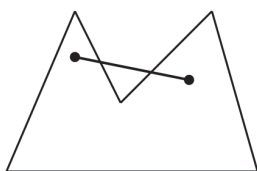
Además, siempre que los dos extremos del intervalo sean finitos, el conjunto será acotado (siempre encontraremos una bola centrada en 0 que contenga al intervalo), mientras que si alguno de sus extremos es infinito será no acotado.

En consecuencia, cualquier intervalo cerrado de amplitud finita será un conjunto cerrado y acotado y, por tanto, compacto.

Por otra parte, todo intervalo, ya sea abierto o cerrado, es también convexo. Sin embargo, un conjunto que esté formado por la unión de dos intervalos disjuntos no tiene porqué ser convexo en general.

b) En $\mathbb{R}^2$: el conjunto $A =]1,2[\times]0,3[$ es abierto pues $A = \overset{0}{\overset{\circ}{A}}$, además obviamente es acotado (por ejemplo está contenido en la bola de centro $(0,0)$ y radio 4). Al no ser cerrado no será un conjunto compacto. Por el contrario, el conjunto $B = [1,2] \times [0,3]$ es compacto al ser cerrado ($\overline{B} = B$) y acotado. Fácilmente se comprueba ya que el conjunto $C =]1,2[\times [0,3]$ no es abierto puesto que contiene puntos frontera, ni cerrado puesto que no contiene algunos de sus puntos frontera (los de coordenadas $(1,x)$, con $x \in [0,3]$), siendo nuevamente un conjunto acotado, pero no compacto.

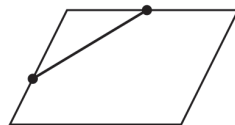
Para construir conjuntos convexos lo único que tendríamos que tener en cuenta es que la definición anterior se traduciría en términos gráficos diciendo que un conjunto es convexo si el segmento que une dos puntos cualesquiera de dicho conjunto está totalmente contenido en el conjunto.



No convexo



Convexo



Convexo

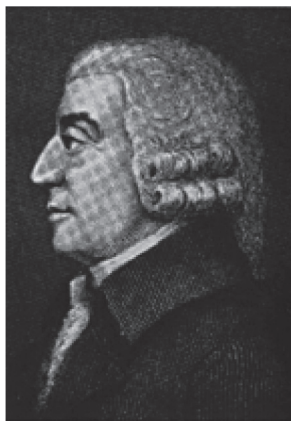


APUNTES DE HISTORIA

PRECURSORES DEL USO DE LAS MATEMÁTICAS EN LA CIENCIA ECONÓMICA Y EMPRESARIAL

Se suele apuntar a la Escuela Fisiocrática, con su principal exponente, François Quesnay (1641-1774), como punto de partida de la Economía como ciencia¹⁹. Su método, basado en el proceso de abstracción, pretendía descubrir la existencia de leyes generales que regían el comportamiento de los fenómenos económicos.

Aparecía así dentro de la historia del pensamiento económico el razonamiento deductivo como factor explicativo de los acontecimientos económicos, dando comienzo a la metodología que podríamos denominar discursiva, que se basa en el lenguaje natural, y que encontrará ilustres seguidores en los autores clásicos: Adam Smith (1723-1790), Thomas Malthus (1766-1834), David Ricardo (1772-1823), o John Stuart Mill (1806-1873).



**Adam Smith
(1723-1790)**



**Augustin Cournot
(1801-1877)**

No obstante, si bien ya Thomas Malthus apreciaba la posible utilidad del cálculo diferencial en la teoría económica²⁰, no fue hasta bien entrados en el siglo XIX, y de la mano de varios innovadores, entre los que podríamos destacar los trabajos de Augustin Cournot (1801-1877), cuando surgió un nuevo enfoque del análisis económico basado en la utilización del lenguaje y la lógica que proveen las Ciencias Matemáticas, persiguiéndose la finalidad principal de asegurar la racionalidad y coherencia interna de las leyes económicas estudiadas.

De aquí hasta la actualidad, sería irreplicable en este corto espacio, la lista de ilustres precursores del método matemático en la ciencia económica, optando en este

¹⁹ Véase, por ejemplo, Hahne (1995), pág. 70.

²⁰ El folleto de Malthus, "Observaciones sobre los efectos de las leyes del grano" publicado en 1814, contiene probablemente la primera referencia, en la economía política inglesa, de la utilidad del cálculo diferencial en la teoría económica, tal y como señala Spiegel (1990), pág. 349.

manual por recoger, a lo largo de los capítulos que siguen, diferentes notas históricas que apuntarán algunos de estos nombres, así como algunas de sus contribuciones al estado presente de la disciplina.

Dicho lo cual, a modo de “aperitivo”, y para reforzar la motivación del lector hacia nuestra particular parcela, a continuación recogemos una lista escueta de insignes economistas que han empleado, en la mayor parte de su obra, el lenguaje y la lógica matemática:

Augustin Cournot (1801-1877)

Léon Walras (1834-1910)

Francis Y. Edgeworth (1845-1926)

Ragnar Frisch (1886-1982)

Tjalling Koopmans (1910-1986)

Paul A. Samuelson (1915-)

Gerald Debreu (1921-)

William S. Jevons (1835-1882)

Vilfredo Pareto (1848-1923)

Irving Fisher (1867-1947)

Jan Tinbergen (1903-1994)

L. V. Kantorovich (1912-1986)

Keneth J. Arrow (1921-)

NOTAS BIOGRÁFICAS: WILLIAM STANLEY JEVONS

William Stanley Jevons (1835-1882) es una de las figuras que ha dejado huella dentro del pensamiento económico moderno. Nacido en Liverpool, tuvo que interrumpir, debido a dificultades económicas, sus estudios en Filosofía Natural (básicamente Matemáticas, Química y Botánica) en el University College de Londres y marchar a Australia de contrastador en la Casa de la Moneda de Sidney. A su vuelta a Londres, Jevons reemprendió sus estudios desviando su atención hacia la Lógica y la Economía; se graduó con honores en 1862 y pasó a ocupar, sucesivamente, plaza de catedrático de Economía en la Universidad de Manchester y luego en el University College londinense.

Su aportación más emblemática al campo de la Economía la constituye su obra Teoría de la Economía Política, publicada en 1871, en la que sienta las bases de la Teoría de la Utilidad y con ella la del Principio de la Utilidad Marginal, que junto con las aportaciones de Carl Menger (1840-1925) y Léon Walras (1834-1910) consolidarían la corriente marginalista que revolucionó en su momento la teoría económica vigente, rompiendo con la tradición clásica preponderante en la época basada fundamentalmente en el trío Adam Smith, David Ricardo y John Stuart Mill. De esta manera, pone la primera piedra de la moderna Teoría Subjetiva del Valor basada en la utilidad marginal en oposición al costo de producción como determinante del valor de cambio, y con un rasgo distintivo clave respecto a la tradición clásica, la utilización del método matemático como herramienta fundamental del análisis económico. A continuación, recogemos diversos fragmentos del Prólogo de esta obra en los que Jevons



**W.S. Jevons
(1835-1882)**

deja patente su particular punto de vista sobre la construcción de la Economía como ciencia.

TEXTOS CLÁSICOS: W.S. Jevons, Teoría de la Economía Política, 1871. Fragmentos del prólogo a la 2ª Ed. (1879)

*“(...) Dos o tres corresponsales (especialmente Herr Harald Westergaad de Copenhague) han señalado que una pequeña manipulación de los símbolos de acuerdo con las sencillas reglas del cálculo diferencial produciría, con frecuencia, los resultados que yo he venido argumentando de forma laboriosa. Toda la cuestión es de máximos y mínimos, cuyas condiciones matemáticas son familiares a los matemáticos. Pero, aun en el caso de que yo fuera capaz de presentar el tema en el conciso estilo simbólico de forma satisfactoria para el gusto de un matemático experimentado, preferiría, en un ensayo de esta naturaleza, obtener a través de un curso argumental que no solo es fundamentalmente veraz, sino claro y convincente para muchos lectores que, como yo mismo, no son avezados matemáticos profesionales. En suma, **no escribo para matemáticos, ni como matemático, sino como economista deseoso de persuadir a otros economistas de que su ciencia solo se puede abordar satisfactoriamente sobre una base explícitamente matemática.***

*(...) Mientras preparaba esta nueva edición, se me ocurrió intentar reseñar todos los escritos de este tipo existentes. Con esta idea, tracé una lista cronológica de todas las obras matemático-económicas que me eran conocidas, lista que se imprimió (por gentileza del director, el señor Giffen) en el Journal of the London Statistical Society de junio de 1878 (...). Para evitar malentendidos, conviene explicar que el criterio para incluir una publicación o una parte de una publicación en esta lista es el de que contenga un reconocimiento expreso del carácter matemático de la Economía o de la ventaja que se consigue mediante el tratamiento simbólico de la misma. **Yo sostengo que todos los escritos económicos deben ser matemáticos en la misma medida en que son científicos, porque se ocupan de las cantidades económicas y de las relaciones entre tales cantidades, y todas las cantidades y relaciones entre cantidades caen en el ámbito de las Matemáticas.** (...)*

(...) Podríamos remontarnos fácilmente aún más atrás y descubrir que incluso el padre de la Economía, como se le considera con frecuencia es totalmente matemático. En el Capítulo V del Libro Primero de la Riqueza de las Naciones, por ejemplo, observamos cómo Adam Smith argumenta continuamente sobre «cantidades de trabajo», «medidas de valor», «medidas de la privación», «proporción», «igualdad», etc., partes científicas del tratado, a distinguir de las partes históricas. En el Capítulo Primero del Libro Segundo (párrafo 29) se lee: «El producto de la tierra, las minas y las pesquerías (cuando es la misma su fertilidad natural) están en proporción a la extensión y apropiada aplicación de los capitales empleados en ellos. Cuando los capitales son iguales e igualmente aplicados, están en proporción a su fertilidad natural». Pero el uso de la palabra igual o

igualdad implica siempre la existencia de una ecuación matemática: una ecuación es simplemente una igualdad. Y el uso de la palabra proporción implica siempre un cociente expresable en forma de ecuación.

*Sostengo, por tanto, que argumentar matemáticamente, sea correcta o erróneamente, no constituye ninguna diferencia real por lo que respecta a los autores sobre teoría económica. Pero una cosa es argumentar y otra reconocer y entender explícitamente el método del argumento. Así como muchos hablan en prosa sin saberlo, o, igualmente, construyen silogismos sin saber lo que es un silogismo, **los economistas han sido durante mucho tiempo matemáticos sin ser conscientes de ello.** El desafortunado resultado es que han sido generalmente malos matemáticos, y sus obras deben perder importancia. He aquí por qué **el reconocimiento explícito del carácter matemático de la ciencia era una condición casi necesaria para toda mejora sustancial de la teoría.** Por supuesto, **de ello no se deduce que ser expresamente matemático sea asegurarse la consecución de la verdad**, y en escritos tales como los de Canard o Whewell encontramos multitud de símbolos y ecuaciones sin ningún resultado valioso, debido al hecho de que simplemente vertieron en símbolos las doctrinas obtenidas, y erróneamente obtenidas, sin su uso. Tales autores mal interpretaron y tergiversaron por completo la función de los símbolos matemáticos, que es guiar a nuestro pensamiento por los resbaladizos y complicados procesos del razonamiento. **El lenguaje ordinario normalmente puede servir de expresión a los axiomas primeros de una ciencia y con frecuencia también a las últimas conclusiones; pero únicamente de la forma más torpe, oscura y tediosa nos puede conducir a través de los laberintos de la inferencia. (...).**”*



PRÁCTICAS DE INFORMÁTICA

En pleno siglo XXI es inconcebible abordar el tratamiento matemático de la ciencia económica y empresarial sin la ayuda de la amplia variedad de herramientas informáticas disponibles. El abanico de recursos de software matemático existente es hoy en día inmenso, variado y en constante evolución. Por ello, no hemos optado aquí por utilizar ningún software específico para ilustrar el tratamiento informático de cada uno de los temas que veremos en este manual, sino que, por el contrario, animamos activamente al lector a que utilice cualquier herramienta de software disponible, sea cual sea la plataforma en la que se base (MS Windows, IOS, Android, Linux...), para llevar a cabo una serie de ejercicios que iremos recogiendo en este apartado de prácticas de informática al final de cada capítulo.

Sin ánimo de ser exhaustivo, recogemos a continuación algunas de estas herramientas de software que están disponibles hoy en día, y que animamos a que conozcan y utilicen en alguna medida:

A) Software matemático comercial

1. **Derive:** supone un software comercial con cálculo simbólico sencillo de utilizar pero cuyo fabricante (Texas Instruments) dejó de distribuir en el año 2007 para ser incorporado desde entonces en calculadoras gráficas bajo la denominación TI-Nspire CAS.
2. **Maple:** incluye multitud de herramientas de cálculo simbólico y numérico en una amplia variedad de ramas de las matemáticas.
3. **Matlab:** constituye un sistema de cálculo numérico y representación gráfica que incorpora un lenguaje de programación avanzado.
4. **Wolfram Mathematica:** software comercial de álgebra computacional que incluye un lenguaje de programación avanzado.

B) Software matemático libre

1. **Euler Math Toolbox:** integra un amplio y poderoso abanico de herramientas matemáticas, tanto a nivel numérico como de cálculo simbólico (utiliza Maxima para esto último).
2. **Maxima:** constituye un sistema muy completo para la manipulación de expresiones simbólicas y numéricas, incluyendo diferenciación e integración, así como para la realización de gráficos.

C) Sitios webs con herramientas matemáticas

1. **Geogebra:** básicamente es un compendio de herramientas matemáticas interactivas de distribución libre y de uso sencillo, que permiten desde resolver ecuaciones hasta realizar y manipular gráficos en 2D y 3D.

2. **Wolfram Alpha:** es una web comercial que pone en libre disposición un sistema de cálculo simbólico y matricial, además de posibilitar realizar gráficos en 2D y 3D. También ofrece una versión superior de pago con mayores funcionalidades.

D) Lenguajes de programación libres

1. **Python:** constituye el lenguaje de programación matemático más extendido en la actualidad debido a su enorme potencia y distribución libre. Incorpora bibliotecas de cálculo simbólico y matricial (SymPy), de gráficos en 2D y 3D, y numéricas muy potentes.
2. **R:** es un lenguaje de programación y entorno de trabajo orientado más hacia el análisis estadístico, pero que dispone de infinidad de bibliotecas adicionales (paquetes) desarrollados por una amplísima variedad de usuarios en todo el mundo, y que posibilita cálculos matemáticos, gráficos en 2D y 3D, así como numerosas herramientas para manipular datos.

PRIMERAS PRÁCTICAS DE INFORMÁTICA

1. Acceder e instalar en nuestro ordenador, si es el caso, alguna herramienta de software matemático que seleccionemos para realizar los ejercicios de matemáticas que se proponen. A través de la ayuda e información disponible en internet, familiarizarse con este software y con la manera de introducir expresiones matemáticas en el mismo con el objetivo de realizar operaciones, cálculos y gráficos.
2. Utilizar el software seleccionado para realizar a los siguientes cálculos en forma simbólica y también aproximando numéricamente los cálculos que sean factibles:

a) $\frac{12}{250} + \frac{5}{34} - 15$

b) $\frac{x}{2} + \frac{3x}{5} + 14x$

c) $5x + \frac{1}{x+2}$

d) $\sin(x+y)$

e) $\left(\sqrt{x^2 + y^3}\right)\left(\sqrt{x-y}\right)$

f) $2e^{x-y}$

g) $\ln(x^2+10)$

h) $\log_{10}(x^2+10)$

3. Aprender a introducir las constantes y funciones matemáticas que solemos utilizar: el número e, el número π , el símbolo de infinito (∞), la raíz cuadrada y de cualquier otro índice, la exponencial, el logaritmo neperiano y en cualquier otra base, las funciones trigonométricas (seno, coseno, tangente).



EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Calcular el conjunto interior, clausura, derivado y frontera de los siguientes conjuntos de $\mathbb{R}$:
 - a) El conjunto de números naturales $\mathbb{N}$
 - b) $A = \{-10, -5, 0, 5, 10\}$
 - c) $[2, 5],]2, 5[, [2, 5[$ y $]2, 5[$
 - d) $B = \{0, 5\} \cup [1, 2]$
 - e) $C = \{1/2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$
 - f) $D = \mathbb{R} - C$, siendo C el conjunto dado en el apartado e anterior.
 - g) $[0, \infty[$ y $]0, \infty[$
 - h) La bola abierta $B(2, 3)$, y la cerrada $\bar{B}(2, 3)$
2. Calcular el conjunto interior, clausura, derivado y frontera de los siguientes conjuntos de $\mathbb{R}^2$:
 - a) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$
 - b) $A = \{1, 2, 3\} \times]0, 5[, B = \{1, 2, 3\} \times [0, 5], C = \{1, 2, 3\} \times [0, 5[$ y $D = \{1, 2, 3\} \times [0, 5]$
 - c) $]0, 4[\times]-1, 0[, [0, 4[\times]-1, 0[, [0, 4] \times]-1, 0[,]0, 4[\times [-1, 0[$ y $[0, 4] \times [-1, 0]$
 - d) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0\}$
 - e) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > y\}$
 - f) $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2, x \leq 2\}$
 - g) $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, $I = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ y $J = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$
 - h) $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq 1, x^2 + y^2 \leq 4\}$
3. Comprobar si son abiertos, cerrados, acotados o compactos los conjuntos incluidos en cada uno de los apartados de los ejercicios 1 y 2 anteriores.
4. Demostrar las siguientes afirmaciones donde A y B son conjuntos de $\mathbb{R}^n$:
 - a) Si A y B son conjuntos abiertos $\Rightarrow A \cup B$ es un conjunto abierto.
 - b) Si A y B son conjuntos abiertos $\Rightarrow A \cap B$ es un conjunto abierto.
 - c) Si A y B son conjuntos cerrados $\Rightarrow A \cup B$ es un conjunto cerrado.
 - d) Si A y B son conjuntos cerrados $\Rightarrow A \cap B$ es un conjunto cerrado.
 - e) Si A y B son conjuntos compactos $\Rightarrow A \cup B$ es un conjunto compacto.
 - f) Si A y B son conjuntos compactos $\Rightarrow A \cap B$ es un conjunto compacto.
5. Comprobar que:
 - a) Un intervalo cerrado de $\mathbb{R}$ es un conjunto compacto.

- b) Cualquier rectángulo cerrado de $\mathbb{R}^2$ (esto es, cualquier producto cartesiano de intervalos cerrados) es un conjunto compacto.
- c) Cualquier bola cerrada de $\mathbb{R}^n$ es un conjunto compacto.



APÉNDICE

A lo largo de este manual, se supone que el lector está familiarizado con cuestiones de matemáticas básicas tanto de carácter numérico como simbólico. Es decir, que no tiene dificultades para resolver ejercicios de los tipos que siguen y similares:

A) Clasificación de los números

1. Indicar a qué conjuntos numéricos pertenecen los siguientes números:

10 1.7 -28 0.0505050 23/7 $\sqrt{15}$

2. Escribir en forma de fracción: 0.054 3.454545

B) Operaciones con números

3. $\frac{3}{4} - \frac{7}{6} + \frac{2}{9} =$ 9. $\left(\frac{1}{3}\right)^6 (-9)^6 =$

4. $4 - \frac{7}{5} - \left(\frac{8}{17} - 5\right) =$ 10. $6^4 + 6^7 =$

5. $\frac{3}{\frac{2}{7}} + \frac{\frac{3}{1}}{\frac{5}{5}} =$ 11. $\sqrt{5^2 - 4^2} =$

6. $14^{-8} 14^6 =$ 12. $\sqrt{18} - \sqrt{27} + 3\sqrt{32} + \sqrt{243} =$

7. $(-3)^4 =$ 13. $\frac{\sqrt{15}}{(\sqrt{15} + \sqrt{5})} =$

8. $-3^4 =$ 14. $(\sqrt{a^9})^{\frac{1}{3}} =$

C) Proporcionalidad

15. Tres amigos compran un décimo de lotería aportando 3, 6 y 9 euros respectivamente. El décimo resulta premiado con 90000 euros, ¿cómo deberían repartirse el premio según la inversión de cada uno?

16. Calcular: a) El 7% de 3240
b) El 20% de 130000
c) El 3% del 12% de un millón
17. ¿De qué cantidad son 1200 el 6%?
18. Juan desea invertir 8000 euros. Una parte al 11% de interés y el resto al 10%. Si ha ganado 850 euros ¿cómo realizó la inversión?

D) Polinomios y fracciones algebraicas

19. $(2x^3 - x^2 + 3)(-x^2 + 5x - \frac{1}{2}) =$
20. $(3x + 2)^2 =$
21. $\left(2a + \frac{1}{3}\right)\left(2a - \frac{1}{3}\right) =$
22. $\frac{2x}{x+1} + \frac{1}{x+2} - \frac{2}{x-3} =$
23. $\frac{-2x^3 + 3x^2 + 80}{x-4} =$
24. $\frac{6x^2 + 7x - 5}{x^2 + 2x - 24} : \frac{12x^2 + 11x - 15}{4x^2 + 21x - 18} =$

25. Descomponer en factores:

- a) $3x^5 - 6x^4 =$ c) $4x^2 - 4x + 1 =$
b) $4x^2 - 9 =$ d) $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 =$

E) Ecuaciones polinómicas

26. $3x + 4 = 10$ 30. $\frac{x+5}{2} + \frac{1}{x} = 3$
27. $105x + 125(x+20) = 120(2x+20)$ 31. $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$
28. $10\left(3\frac{x}{4} - 5\right) = \frac{x}{4} + 37$ 32. $x^4 - 2x^3 + 2x - 1 = 0$
29. $2x^2 + 3x - 5 = 0$ 33. $\frac{2}{x-1} = \frac{4}{3x} + \frac{1}{x^2 - x}$

F) Inecuaciones

34. $5x+6<3x-8$

37. $x^2 + x \leq 2$

35. $3x > -2$

38. $|2x + 1| < 1$

36. $10(5-x) > 1-x$

G) Manipulaciones algebraicas

39. $a = \frac{v - v_0}{t}, v =, t =$

40. $D = ap + b, p =$

41. $B = qp - C, q =, p =, C =$

H) Exponencial y logaritmo

42. $x = (-2)^3$

47. $\ln x = 2$

43. $x = 3.1^4$

48. $\ln x^2 = 2e$

44. $x = (-2)^{1.2}$

49. $e^0 =, e^1 =, e^{+\infty} =, e^{-\infty} =$

45. $3^x = 1.2$

50. $\ln 0 =, \ln 1 =, \ln e =, \ln(+\infty) =, \ln(-\infty) =$

46. $e^x = 3$

I) Trigonometría

(Recordar propiedades)

51. Rellenar la tabla

Grados	Radianes
0	
	$\pi/6$
45	
	$\pi/3$
90	
	π
270	
360	
	$-\pi/6$
	$-\pi$

52. $\sin(\pi/6) =, \cos(\pi/6) =, \tan(\pi/6) =$

53. $\sin x = 0.8, \cos x =, \tan x =, x =$

PARTE II

CÁLCULO DIFERENCIAL DE FUNCIONES REALES

FUNCIONES REALES DE UNA VARIABLE REAL

2.1. EL CONCEPTO DE FUNCIÓN EN ECONOMÍA. EJEMPLOS

Veamos, a través de algunos ejemplos típicos, cómo se introduce de forma natural el concepto de función real como herramienta fundamental dentro del análisis económico moderno, incluso desde los modelos más simples.

Ejemplo 2.1. Supongamos que deseamos estudiar cómo evoluciona la cantidad demandada de un cierto bien del mercado provincial, por ejemplo latas de determinado refresco de cola (A-cola) de 33 cl., a lo largo de cierto periodo de tiempo, digamos una semana.

Lo primero que deberíamos preguntarnos es: ¿qué factores influyen en la cantidad demandada de este bien en dicho mercado durante el periodo de tiempo considerado?

Posibles respuestas a esta pregunta son:

P	$P_1, \dots, P_n$	I	Pob	...
Precio del bien	Precio de n bienes relacionados (otras colas, combustible, transporte, etc.)	Renta media de los consumidores	Población de hecho	Otros factores: gustos de los consumidores, cambios climatológicos, gastos en publicidad, etc.

No obstante, hasta el modelizador más inexperto se daría cuenta de que intentar abarcar todas las influencias del mundo real es una tarea, además de ardua, inviable. Por lo tanto, podríamos pensar en comenzar por un modelo sencillo en el que, ceteris paribus, fijemos nuestra atención solo en dos variables: Q (cantidad demandada medida en unidades físicas) y P (precio del bien medido en u.m.).

Además, deseamos construir un modelo de demanda del consumidor tal que, dado el precio del bien, podamos determinar la cantidad demandada del mismo. Esto es, P se toma como dato para el consumidor (en Economía se denomina **variable exógena** para el modelo planteado, y en Matemáticas **variable inde-**

pendiente), mientras que Q dependerá de los valores que tome P (en Economía se denomina **variable endógena** para el modelo en cuestión, y en Matemáticas, **variable dependiente**).

En términos matemáticos esto se traduce en postular que la relación $Q \leftrightarrow P$ se representa mediante una función real de variable real donde, para cada precio del bien, corresponderá una única cantidad demandada del mismo.

$$Q=f(P)$$

Función de demanda del consumidor

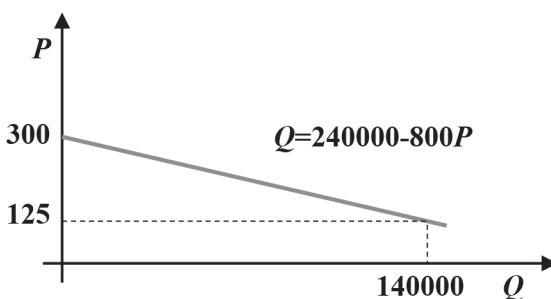
Vayamos un poco más allá hacia un ejemplo concreto. Supongamos que disponemos de datos sobre precios de venta al público y cantidad demandada de las latas de cierta cola (A-cola) en nuestro mercado provincial, según la siguiente tabla de valores:

Q (latas demandadas en una semana)	208241	199775	191849	176254	159983	140222
P (precio de una lata en u.m.)	40	50	60	80	100	125

En este caso, empleando técnicas estadísticas, el investigador podría llegar a la conclusión de que una función de demanda adecuada para aproximar esta situación sería

$$Q = 240000 - 800P$$

función cuya gráfica se correspondería con la siguiente¹:



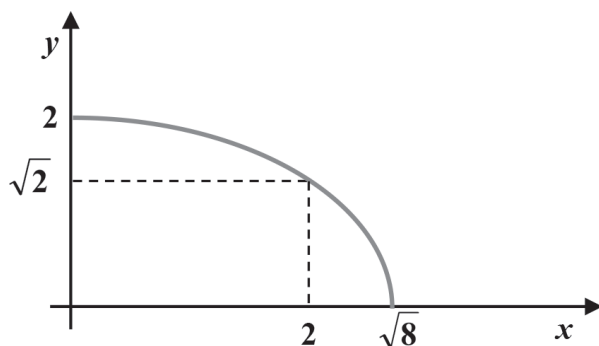
y que nos daría, para cada precio, cuántas latas de A-cola de 33 cl están dispuestos a adquirir, aproximadamente, los consumidores de nuestra provincia durante el periodo de tiempo considerado.

¹ La costumbre en el análisis económico es dibujar la función de demanda con la variable precios sobre el eje vertical. Esto es, en realidad lo que se hace es obtener la gráfica de la función inversa de demanda, $P=f^{-1}(Q)=300-Q/800$ en nuestro ejemplo. El concepto de función inversa será abordado más adelante, en la Sección 2.3.

Ejemplo 2.2. Consideremos una economía en la que se producen dos bienes, en cantidades x e y , con recursos escasos, de tal manera que la **Frontera de Posibilidades de Producción**² viene dada por la igualdad

$$2y^2 + x^2 = 8$$

Gráficamente, se puede probar que la representación de esta curva se corresponde con una elipse centrada en el origen de coordenadas. Como desde el punto de vista económico solo tenemos en cuenta combinaciones de las cantidades x e y no negativas, solo dibujamos el primer cuadrante de esta



En este caso, podemos decir que la igualdad anterior define la cantidad y como **función implícita de x** (con la condición $y \geq 0$, $x \geq 0$). La correspondiente función explícita se puede obtener analíticamente despejando y en función de x

$$y(x) = +\sqrt{4 - \frac{1}{2}x^2}$$

Esta función permite determinar, para cada cantidad del bien x que deseemos producir, la cantidad máxima del bien y que podríamos fabricar aprovechando todos los recursos disponibles (por ejemplo, para $x=2$ unidades, $y(2)=+\sqrt{2}$ unidades).

Ejemplo 2.3. Si enfocamos el Ejemplo 2.1 desde el punto de vista de la empresa productora de las latas de A-cola, podemos obtener, a partir de su función de demanda estimada, la **función de ingresos totales** semanales (en función de la cantidad demandada Q o del precio P) que escribimos bien como

$$IT(Q) = P(Q) Q = \left(300 - \frac{1}{800}Q\right) Q = 300Q - \frac{1}{800}Q^2$$

2 Aquí la palabra Frontera tiene significado matemático y representa la curva que separa la posibilidad (conjunto interior) y la imposibilidad (conjunto exterior) de producir.