

Hervé Queffélec

Topologie

Cours et exercices corrigés

7^e édition

DUNOD

© Dunod, 2025

11, rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com

ISBN 978-2-10-088559-6

À Jérémy

TABLE DES MATIÈRES

Avant-propos	VII
Notations	VIII
Chapitre 1. Le corps des réels	1
I Définition axiomatique de $\mathbb{R}$	1
II Le théorème de la borne supérieure	4
Exercices	11
Corrigés	15
Chapitre 2. Espaces topologiques ; Espaces métriques	21
I Définitions générales ; notations	22
II Sous-espace topologique ; topologie induite	27
III Notion de limite ; continuité	29
IV Espaces métriques	37
V Produit d'espaces topologiques	46
Exercices	53
Corrigés	61
Chapitre 3. Espaces compacts	77
I Définition et premières propriétés	77
II Fonctions continues sur un espace compact	82
III Produit d'espaces compacts	87
IV Espaces métriques compacts	91
Exercices	101
Corrigés	109
Chapitre 4. Espaces connexes	120
I Définition et premières propriétés	120
II Théorèmes de stabilité	122
III Espaces métriques connexes	126
IV Composantes connexes	128
V Applications de la connexité ; homotopie	134
Exercices	152
Corrigés	161
Chapitre 5. Espaces métriques complets	179
I Définition ; premières propriétés	179
II Théorème du point fixe de Picard	184
III Théorème de Baire	191
Exercices	202
Corrigés	209

Table des matières

Chapitre 6. Espaces localement trucs	223
I Définition générale; premiers exemples	223
II Espaces localement compacts	224
III Espaces localement connexes	231
Exercices	244
Corrigés	247
Chapitre 7. Dimension et fractalité	253
I Dimension de boîte (ou dimension métrique)	254
II Dimension de Hausdorff	269
III Dimension topologique	287
Exercices	297
Problème	300
Corrigés	302
Chapitre 8. Espaces normés de dimension finie	314
I Introduction	314
II Compléments sur les espaces normés	315
III Compléments de topologie	318
IV Uniforme convexité et espaces L^p	322
V Applications de la topologie aux espaces normés	324
Exercices	334
Problème	336
Corrigés	337
Références bibliographiques	343
Index	345

AVANT-PROPOS

Nous avons mis à profit cette septième édition essentiellement sur le point suivant : l'étude des espaces normés de dimension finie est infiniment plus riche, complexe, et utile, qu'on ne pourrait le croire, et a des interactions fortes (compacité, complétude, points fixes, etc..) avec la topologie générale. Nous avons donc ajouté un chapitre 8 sur les applications de cette topologie aux espaces normés de dimension finie et leur ensemble, le continuum de Minkowski ; le théorème du point fixe de Brouwer, qui jouait déjà un rôle important dans l'édition précédente, est démontré ici en toute dimension. Une place importante est donnée à la théorie de l'approximation, en lien avec la stricte convexité, la stricte lissité, et le théorème antipodal de *Borsuk-Ulam*. Faute de place, ce dernier théorème est seulement prouvé en détail en dimension deux ; mais le principe d'une preuve dans le cas général est esquissé (nous renvoyons au beau livre de J. Matousek, notamment p. 30–31, pour plus de détails), et un exercice nouveau en donne une application. Enfin, on démontre qu'il est plus fort que le théorème du point fixe de *Brouwer*.

Le théorème de convexité de *Bunt-Motzkin* est également démontré en détail (nous remercions chaleureusement J. F. Burnol et D. Choimet pour des informations enrichissantes sur ce théorème, et des preuves alternatives, dont l'une est d'ailleurs proposée en problème). Enfin, un énoncé de problème a été réinséré au chapitre 7, une “misconception”, des coquilles (encore...) ont été corrigées, et plusieurs dessins aident à la compréhension des preuves.

Nous prenons l'occasion pour remercier les nombreux collègues de leurs remarques extrêmement utiles sur l'édition précédente. Et nous accueillerons avec plaisir et gratitude toutes les remarques et suggestions sur cette nouvelle édition, envoyées à l'adresse :

Herve.Queffelec@univ-lille.fr

NOTATIONS

- Si A est une partie de X , on note A^c le complémentaire de A dans X ; si $A \subset X$ et $B \subset X$, on note $A \setminus B = A \cap B^c$; si les A_i ($i \in I$) sont des parties de X , on note leur union par $\bigcup_{i \in I} A_i$, $\bigcup_I A_i$, ou $\cup A_i$ s'il n'y a pas de risque de confusion; on note de même $\bigcap_{i \in I} A_i$, $\bigcap_I A_i$, $\cap A_i$ pour l'intersection, et $\bigsqcup_{i \in I} A_i$, $\bigsqcup_I A_i$, $\sqcup A_i$ pour l'union disjointe.
- 1_A désigne la fonction indicatrice de $A \subset X$; $1_A(x) = 1$ si $x \in A$, et $1_A(x) = 0$ si $x \notin A$.
- $|A|$ désigne le nombre d'éléments de l'ensemble fini A .
- Si les ensembles X_i ($i \in I$) ont une propriété (P) sauf peut-être un nombre fini d'entre eux, on dit que **presque tous** les X_i ont la propriété (P); si $X = \prod_{i \in I} X_i$ est leur produit cartésien, p_i désigne la projection canonique de X sur le i -ème facteur X_i : si $x = (x_i)_{i \in I} \in X$, $p_i(x) = x_i$.
- $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ désignent respectivement l'ensemble des nombres entiers naturels, entiers relatifs, rationnels, réels, complexes; si E est l'un de ces ensembles, ou plus généralement un demi-groupe d'élément neutre 0, on note $E^* = E \setminus \{0\}$.
- Pour $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$, on note $\{f > a\}$ pour $\{x \in X; f(x) > a\}$ et on définit de même $\{f \geq a\}$, $\{f < a\}$, $\{f \leq a\}$.
- Pour $f : X \rightarrow X$, f^p désigne l'itérée de f p fois par elle-même : $f^p = f \circ \dots \circ f$ p fois.
- Pour $f : X \rightarrow Y$, la restriction de f à $A \subset X$ se note $f|_A$.
- $A := B$ signifie que l'on définit l'objet A comme étant l'objet déjà connu B ; de même, $A =: B$ définit B quand on connaît A .
- $\mathcal{P}(X)$ désigne l'ensemble des parties de l'ensemble X .
- Si X, Y sont deux espaces topologiques, $C(X, Y)$ désigne l'ensemble des applications continues de X dans Y ; si X est compact et Y métrique, $C(X, Y)$ est toujours muni de la « distance de la convergence uniforme » : $d(f, g) = \sup\{d(f(x), g(x)); x \in X\}$; cette distance est associée à une norme quand Y est un espace vectoriel normé : $\|f\| = \sup\{\|f(x)\|; x \in X\}$; si X n'est pas compact, cette norme est encore définie sur l'espace $C_b(X, Y)$ des applications continues **bornées** de X dans Y ; $C_b(X, \mathbb{R})$ ou $C_b(X, \mathbb{C})$ se note $C_b(X)$ s'il n'y a pas de risque de confusion; si Y est complet, $C_b(X, Y)$ l'est aussi.

- Tous les espaces vectoriels (en abrégé K -ev ou ev) considérés (à l'exception de l'exercice 1, chapitre I) seront sur le corps $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; on note evn un espace vectoriel normé; un espace de Banach est un evn complet. Une semi-norme sur un K -ev E est une application $p : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ ayant toutes les propriétés d'une norme sauf peut-être l'implication $p(x) = 0 \Rightarrow x = 0$. Un hyperplan d'un ev E est un sous-espace vectoriel de E de codimension 1.

- Le produit scalaire sur un espace de Hilbert H est noté (x/y) ou $\langle x, y \rangle$, la norme associée $|x|$; i.e. $|x| = \sqrt{(x/x)}$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit : $|(x/y)| \leq |x| |y|$ pour $x, y \in H$. L'espace $\mathcal{L}(H)$ des applications linéaires continues de H dans H est normé par : $\|f\| = \sup\{|f(x)|; |x| = 1\}$. u^* désigne l'adjoint de $u \in \mathcal{L}(H)$: $(x/u^*(y)) = (u(x)/y)$ pour tous $x, y \in H$.

- « K^n usuel » désignera toujours $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}^n$) muni de son produit scalaire euclidien (resp. hermitien usuel); la norme associée définit la topologie usuelle sur K^n , c'est-à-dire la topologie produit de la topologie usuelle de K n fois par elle-même; la base canonique de K^n est notée $(e_1, \dots, e_n)$, et on identifie $f \in \mathcal{L}(K^n)$ et sa matrice sur la base canonique. S^n est la sphère unité euclidienne de $\mathbb{R}^{n+1}$: $x \in S^n \Leftrightarrow |x| = 1$.

- Si E est un ensemble de référence, I désigne l'identité de E dans E ; si $E = K^n$, I désigne aussi la matrice unité d'ordre n . $\det$ désigne la fonction déterminant sur K^n , normalisée par $\det I = 1$.

- $GL(n, K)$ désigne le groupe des matrices carrées inversibles ($n \times n$) à coefficients dans K , $O(n)$ (resp. $U(n)$) le sous-groupe des éléments orthogonaux (resp. unitaires) de $GL(n, \mathbb{R})$ (resp. $GL(n, \mathbb{C})$). $O(n)$ est aussi le groupe des bijections linéaires de $\mathbb{R}^n$ qui conservent le produit scalaire euclidien.

- Une homographie est une application de la forme $h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ avec $ad - bc \neq 0$; si $h^2 = I$, h est dite involutive.

- Si E est un K -ev, $a, b \in E$, $A, B \subset E$, $\lambda \in K$, on note : $[a, b] = \{(1-t)a + tb; t \in \mathbb{R}, 0 \leq t \leq 1\}$; c'est le segment d'origine a et d'extrémité b ; $A + B = \{a + b; a \in A, b \in B\}$; $\lambda A = \{\lambda a; a \in A\}$. A est dite convexe si : $a, b \in A \Rightarrow [a, b] \subset A$.

- Si A, B sont deux parties d'un groupe multiplicatif G , on note de même $A \cdot B = \{ab; a \in A, b \in B\}$.

- Aux rares endroits du livre où intervient la théorie de la mesure, on emploie les notations usuelles à cette théorie; par exemple si $p \in [1, \infty[$, $L^p(\mu)$ désigne l'espace de Banach des classes de fonctions intégrables par rapport à la mesure positive μ , normé par (inégalité de Minkowski) $\|f\|_p = (\int |f|^p d\mu)^{1/p}$; on pose $\|\mu\| = \int d\mu \leq +\infty$; μ est une mesure de probabilité si $\|\mu\| = 1$, une mesure borélienne si elle est définie sur la tribu borélienne (i.e. engendrée par les ouverts) de l'espace topologique X ; la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ est notée m_n , ou même m , s'il n'y a pas de risque de confusion.

Topologie

- Une fonction entière est la somme d'une série entière de rayon de convergence infini. Plus généralement, une fonction holomorphe sur un ouvert U de $\mathbb{C}$ est une application $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ qui est $\mathbb{C}$ -différentiable en tout point de U . H^∞ est l'espace des fonctions holomorphes bornées sur D , le disque unité ouvert.
- $\log x$ désigne le logarithme népérien du réel $x > 0$; Arc cos , Arc sin , Arctg désignent les déterminations principales des fonctions réciproques des fonctions trigonométriques cosinus, sinus, tangente et on a des bijections $\text{Arc cos} : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$, $\text{Arc sin} : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\text{Arctg} : \mathbb{R} \rightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
- Dans le plan complexe $\mathbb{C}$, on emploie les notations suivantes : $|z|$ est le module de z ; $\bar{z} = x - iy$ est le conjugué de $z = x + iy$. $\Re z = x$, $\text{Im } z = y$ sont respectivement les parties réelle et imaginaire de z .
 $D(a, r) = \{z \in \mathbb{C}; |z - a| < r\}$ est le disque ouvert de centre a et de rayon r .
 $\bar{D}(a, r) = \{z \in \mathbb{C}; |z - a| \leq r\}$ est le disque fermé de centre a et de rayon r .
 $C(a, r) = \{z \in \mathbb{C}; |z - a| = r\}$ est le cercle de centre a et de rayon r .
 $D = D(0, 1)$ est le disque unité ouvert; $\Gamma = C(0, 1)$ est le cercle unité. C'est aussi l'ensemble des e^{it} , où t parcourt un intervalle de longueur 2π .
- Une courbe est une application continue $\gamma : [u, v] \rightarrow \mathbb{C}$ où $u, v \in \mathbb{R}$ et $u < v$; $\gamma^* = \gamma([u, v])$ s'appelle l'image de γ .
- Une progression arithmétique dans $\mathbb{Z}$ est une partie de $\mathbb{Z}$ de la forme $a + b\mathbb{Z}$, où $a, b \in \mathbb{Z}$. On emploie les abréviations usuelles pgcd et ppcm pour plus grand commun diviseur et plus petit commun multiple.
- Pour $f, g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, la notation (de Landau) $f = O(g)$ signifie qu'on peut trouver $M > 0$ et $\delta > 0$ tels que $|f(z)| \leq M|g(z)|$ si $|z| \leq \delta$.
- Un ensemble inductif E est un ensemble partiellement ordonné $(E, \leq)$ dans lequel toute partie totalement ordonnée possède un majorant; $b \in E$ est dit maximal si $x \in E$ et $x \geq b$ entraîne $x = b$. Si E est inductif et $a \in E$, on peut trouver b maximal avec $b \geq a$ (lemme de Zorn; cf. [HL]). Si $a \in E$ vérifie $a \leq x$ pour tout $x \in E$, on dit que a est le minimum de E et on note $a = \min E$; on définit de même $\max E$, quand il existe.
- Si X, Y sont deux espaces métriques, $f : X \rightarrow X$ est dite lipschitzienne s'il existe $k > 0$ tel que $d[f(a), f(b)] \leq k d(a, b)$ pour tous $a, b \in X$. f est dite isométrique si $d[f(a), f(b)] = d(a, b)$ pour tous $a, b \in X$.
- On dit (supposant connue la notion d'action de groupe) que le groupe G agit transitivement sur l'ensemble X si, étant donné $a, b \in X$, il existe $g \in G$ tel que $ga = b$.

I DÉFINITION AXIOMATIQUE DE $\mathbb{R}$

I.1 Corps archimédiens ; segments emboîtés

On adopte ici le point de vue de Dieudonné ([D], chapitre II), c'est-à-dire qu'on prend en cours de route la construction de Dedekind par la méthode dite « des coupures », qui consiste à adjoindre aux rationnels déjà connus de nouveaux éléments ; cette construction possède des propriétés dont la preuve n'est au début qu'une vérification ennuyeuse ; on prend ces premières propriétés comme axiomes (axiome voulant dire **propriété admise**) et on renvoie à [L] pour leur vérification ; à partir de ces « axiomes », on démontre de façon rigoureuse d'autres propriétés fondamentales du nouvel ensemble $\mathbb{R}$ considéré, notamment celle de la borne supérieure. On suppose donc qu'il existe un ensemble $\mathbb{R}$ (appelé corps des (nombres) réels) tel que :

Axiome 1. $\mathbb{R}$ est un corps commutatif (de lois notées $+$, et $\cdot$), les éléments neutres pour l'addition et la multiplication étant respectivement notés 0 et 1 (zéro et un).

Axiome 2. $\mathbb{R}$ est un corps ordonné, *i.e.* il existe sur $\mathbb{R}$ une relation d'ordre total notée $\leq$, compatible avec la structure de corps au sens où pour tous x, y, z de $\mathbb{R}$:

$$x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z \quad (\text{I.1})$$

$$x \geq 0, y \geq 0 \Rightarrow xy \geq 0. \quad (\text{I.2})$$

On posera $\max(x, y) = y$ si $x \leq y$ et $= x$ si $x \geq y$; on définit de même $\min(x, y)$.

Axiome 3. $\mathbb{R}$ est un corps ordonné **archimédien**, *i.e.* $x > 0, y \geq 0$ entraîne l'existence de $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $nx \geq y$ (où $nx = x + \dots + x$ n fois). Pour $a \leq b$, on appelle segment ab , et on note $[a, b]$, l'ensemble des x tels que $a \leq x \leq b$.

Axiome 4. $\mathbb{R}$ a la propriété des segments emboîtés, c'est-à-dire : toute suite décroissante $[a_n, b_n]$ de segments (cela équivaut à dire $a_{n+1} \geq a_n$ et $b_{n+1} \leq b_n$) a une intersection non vide.

Remarque. Le corps $\mathbb{Q}$ des rationnels vérifie les axiomes 1, 2, 3 ; il est donc prévisible que c'est l'axiome 4 qui jouera le rôle essentiel dans les preuves à venir.

1.2 Partie positive, négative, valeur absolue ; intervalles ; distance sur $\mathbb{R}$

Étant donné $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$x^+ = \max(x, 0) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0, \end{cases} \quad (\text{I.3})$$

et x^+ s'appelle la partie positive de x ;

$$x^- = \max(-x, 0) = \begin{cases} -x & \text{si } x \leq 0 \\ 0 & \text{si } x > 0, \end{cases} \quad (\text{I.4})$$

et x^- s'appelle la partie négative de x ;

$$|x| = \max(x, -x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0, \end{cases} \quad (\text{I.5})$$

et $|x|$ s'appelle la valeur absolue de x .

Les premières propriétés de ces trois symboles sont données par la proposition simple qui suit ; pour plus de clarté, définissons d'abord les intervalles de $\mathbb{R}$; a et b désignent des réels.

- $]a, b[:= \{x; a < x < b\}$ s'appelle l'intervalle ouvert d'extrémités a et b ; on définit de même les intervalles ouverts

$$]a, \infty[:= \{x; x > a\}, \quad]-\infty, b[:= \{x; x < b\}, \quad]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}.$$

- $[a, b] := \{x; a \leq x \leq b\}$ s'appelle le segment (ou intervalle fermé) d'extrémités a et b (cf. axiome 4) ; on définit de même les intervalles fermés

$$[a, +\infty[:= \{x; x \geq a\}, \quad]-\infty, b] = \{x; x \leq b\}, \quad]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}.$$

- $[a, b[:= \{x; a \leq x < b\}$ s'appelle l'intervalle d'extrémités a et b , fermé en a et ouvert en b .
- $]a, b] := \{x; a < x \leq b\}$ s'appelle l'intervalle d'extrémités a et b , ouvert en a et fermé en b .
- Par convention, $\emptyset$ est un intervalle ouvert et fermé ; $\emptyset$ et $\mathbb{R}$ sont les deux seuls intervalles à la fois ouverts et fermés.

Proposition I.1. Soit $a, b, x \in \mathbb{R}$ avec $a \leq b$, et soit $c = \frac{a+b}{2}$; alors

$$x = x^+ - x^- ; \quad |x| = x^+ + x^- \quad (\text{I.6})$$

$$]a, b[= \left\{u; |u - c| < \frac{b-a}{2}\right\} ; \quad [a, b] = \left\{u; |u - c| \leq \frac{b-a}{2}\right\}. \quad (\text{I.7})$$

Démonstration. (I.6) est évidente, mais utile ; on voit que

$$a < u < b \Leftrightarrow -\frac{b-a}{2} = a-c < u-c < b-c = \frac{b-a}{2},$$

d'où la première égalité de (I.7) ; la seconde se prouve de même. $\square$

Les notions de partie positive, partie négative et le couple de formules (I.6) se révèlent très utiles en Analyse (cf. exercice 9) ; la notion de valeur absolue permet de définir une distance sur $\mathbb{R}$, appelée distance usuelle et notée d , qui est une fonction des deux variables réelles x et y à valeurs dans la « demi-droite positive » $\mathbb{R}^+ := [0, \infty[$

$$d(x, y) = |x - y|. \quad (\text{I.8})$$

Proposition I.2. La distance d jouit des propriétés suivantes :

- a) $d(x, y) = d(y, x)$ (symétrie)
- b) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (séparation)
- c) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (inégalité triangulaire).

Démonstration. a) et b) sont évidents ; c) Posons $x - y = u$ et $y - z = v$; il est clair que $-(|u| + |v|) \leq u + v \leq (|u| + |v|)$; d'où $|x - z| = |u + v| \leq |u| + |v| = |x - y| + |y - z|$, i.e. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. $\square$

Remarque I.3. En anticipant sur les définitions du chapitre II, les propositions I.1 et I.2 expriment l'importante propriété suivante :

sur $\mathbb{R}$, les topologies de l'ordre et de la distance coïncident. (I.9)

En effet, la topologie de l'ordre (resp. de la distance) est celle engendrée par les intervalles ouverts (resp. les boules ouvertes) ; or, intervalles ouverts et boules ouvertes coïncident d'après (I.7).

I.3 Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Notons d'abord que $\mathbb{R}$ est, comme tous les corps ordonnés, un corps de caractéristique zéro au sens où

$$x \in \mathbb{R}, \quad x \neq 0, \quad n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow nx \neq 0. \quad (\text{I.10})$$

En effet, $x > 0$ entraîne $nx \geq x > 0$ d'après l'axiome 2 et une récurrence sur n (noter que $b_1 \geq a_1$ et $b_2 \geq a_2$ entraîne $b_1 + b_2 \geq a_1 + a_2$) ; de même, $x < 0$ entraîne $nx < 0$. Comme tous les corps commutatifs de caractéristique zéro, $\mathbb{R}$ contient une copie du corps $\mathbb{Q}$ des rationnels ; plus précisément, l'application $\varphi : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(\frac{p}{q}) = (p \cdot 1)(q \cdot 1)^{-1}$, où $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$, est un isomorphisme croissant du corps ordonné $\mathbb{Q}$ sur un sous-corps de $\mathbb{R}$, qu'on note encore $\mathbb{Q}$ par abus de langage. Le théorème suivant est fondamental.

Théorème I.4. $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Démonstration. En vertu de (I.9), il s'agit de montrer que tout intervalle ouvert $]a, b[$, où $a < b$, contient un rationnel $\frac{p}{q}$; d'après l'axiome 3, il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $q > \frac{1}{b-a}$, ou $\frac{1}{q} < b - a$; soit $p \in \mathbb{Z}$ le plus petit entier tel que $\frac{p}{q} > a$; alors $\frac{p-1}{q} \leq a$, d'où

$$a < \frac{p}{q} = \frac{p-1}{q} + \frac{1}{q} < a + (b-a) = b,$$

et $\frac{p}{q}$ répond à la question. □

II LE THÉORÈME DE LA BORNE SUPÉRIEURE

II.1 Le théorème

Donnons d'abord deux définitions; soit $(X, \leq)$ un ensemble totalement ordonné, A une partie non vide de X , $x, m \in X$.

$$x \text{ est un majorant de } A \text{ si } x \geq a \text{ pour tout } a \in A. \quad (\text{II.1})$$

$$\begin{cases} m \text{ est la borne supérieure de } A \text{ si } m \text{ est un majorant de } A \\ \text{et si } x \text{ majorant de } A \text{ entraîne } x \geq m. \end{cases} \quad (\text{II.2})$$

La borne supérieure, si elle existe, est par définition le plus petit des majorants : elle est donc unique et se note $\sup A$; on définit de même un minorant de A et la borne inférieure (si elle existe) de A , qui est le plus grand des minorants et se note $\inf A$; A est dite majorée (resp. minorée) si elle possède un majorant (resp. un minorant); le théorème suivant est lui aussi fondamental.

Théorème II.1 (Théorème de la borne supérieure).

a) Toute partie A non vide majorée (resp. minorée) de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure (resp. une borne inférieure) m .

b) m est caractérisé par les deux propriétés suivantes :

i) $m \geq a$ pour tout $a \in A$,

ii) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a \in A$ tel que $a \geq m - \varepsilon$.

c) $m \in \overline{A}$, autrement dit tout intervalle ouvert contenant m coupe A .

Démonstration. a) Soit M l'ensemble non vide des majorants de A ; fixons $a \in A$ et $b \in M$; pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $a + p 2^{-n} \geq b$, a fortiori tel

II. Le théorème de la borne supérieure

que $a + p 2^{-n} \in M$; soit p_n le plus petit entier ayant cette deuxième propriété, et $I_n = [a + (p_n - 1) 2^{-n}, a + p_n 2^{-n}]$; observons d'abord que

$$2p_n - 1 \leq p_{n+1} \leq 2p_n. \quad (\text{II.3})$$

En effet, $a + 2p_n 2^{-n-1} = a + p_n 2^{-n} \in M$, donc $p_{n+1} \leq 2p_n$; d'autre part $a + (2p_n - 2) 2^{-n-1} = a + (p_n - 1) 2^{-n} \notin M$, donc $p_{n+1} > 2p_n - 2$.
(II.3) entraîne

$$I_{n+1} \subset I_n. \quad (\text{II.4})$$

En effet, $a + (p_{n+1} - 1) 2^{-n-1} \geq a + (2p_n - 2) 2^{-n-1} = a + (p_n - 1) 2^{-n}$, et $a + p_{n+1} 2^{-n-1} \leq a + 2p_n 2^{-n-1} = a + p_n 2^{-n}$. D'après l'axiome 4, l'intersection des segments emboîtés I_n contient au moins un point m ; on voit que

$$x \in A \Rightarrow x \leq a + p_n 2^{-n} = a + (p_n - 1) 2^{-n} + 2^{-n} \leq m + 2^{-n}.$$

Faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient $x \leq m$, d'où $m \in M$. Soit y un autre élément de M ; pour tout n , il existe $x_n \in A$ tel que $x_n > a + (p_n - 1) 2^{-n}$, puisque $a + (p_n - 1) 2^{-n} \notin M$; d'où $y \geq x_n > a + (p_n - 1) 2^{-n} \geq m - 2^{-n}$; faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient $y \geq m$, ce qui montre que m est la borne supérieure de A .

b) L'inégalité $x_n \geq m - 2^{-n}$ dans a) montre que m vérifie i) et ii) ; si m' vérifie ces conditions, on a en particulier $m' \geq a \geq m - \varepsilon$ d'où $m' \geq m$ vu l'arbitraire sur ε , et de même $m \geq m'$, i.e. $m = m'$.

c) Il s'agit (cf. chapitre II) de trouver une suite (x_n) de A convergeant vers m ; or la suite (x_n) du a) fait l'affaire, puisqu'elle vérifie la double inégalité $m - 2^{-n} \leq x_n \leq m$. □

Remarque II.2. Le théorème de la borne supérieure, vrai pour $\mathbb{R}$, ne l'est plus pour $\mathbb{Q}$ (cf. exercice 13) ; c'est l'une des grandes supériorités des réels sur les rationnels, et une des justifications de leur introduction ; en voici d'autres.

II.2 Suites de Cauchy ; suites monotones

Une suite (x_n) de réels est dite de Cauchy si elle vérifie la propriété suivante, qui sera reprise entre autres au chapitre V :

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall p, q \geq n_0) : d(x_p, x_q) = |x_p - x_q| \leq \varepsilon. \quad (\text{II.5})$$

En termes intuitifs, (x_n) est de Cauchy si $x_p - x_q \rightarrow 0$ quand $p, q \rightarrow \infty$; une suite (x_n) convergeant vers ℓ est de Cauchy (cf. chapitre II) d'après l'inégalité $d(x_p, x_q) \leq d(x_p, \ell) + d(\ell, x_q)$, mais l'intérêt de (II.5) est de ne pas faire intervenir la

Chapitre 1 · Le corps des réels

limite éventuelle et de pouvoir parfois conclure à son existence sans être capable de la calculer. Voici d'autres définitions importantes :

$$(x_n) \text{ est } \mathbf{croissante} \text{ si } x_{n+1} \geq x_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \quad (\text{II.6})$$

(On a alors $x_q \geq x_p$ pour $q \geq p$).

$$(x_n) \text{ est } \mathbf{décroissante} \text{ si } x_{n+1} \leq x_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \quad (\text{II.7})$$

(On a alors $x_q \leq x_p$ pour $q \geq p$).

$$(x_n) \text{ est } \mathbf{monotone} \text{ si elle est soit croissante soit décroissante}. \quad (\text{II.8})$$

« Tout ce qui monte converge » selon Teilhard de Chardin ; voici la version mathématique qui dit la même chose en termes peut-être moins poétiques ...

Théorème II.3.

- a) Toute suite de réels croissante, majorée converge dans $\mathbb{R}$ vers sa borne supérieure.
- b) Toute suite de réels croissante, non majorée converge vers $+\infty$.

Démonstration. a) Soit A l'ensemble des termes x_n de la suite ; A étant majoré, sa borne supérieure $m = \sup A$ existe d'après le théorème II.1 ; soit $\varepsilon > 0$; toujours d'après II.1, il existe n_0 tel que $x_{n_0} \geq m - \varepsilon$; la suite étant croissante, on voit que :

$$n \geq n_0 \Rightarrow m - \varepsilon \leq x_{n_0} \leq x_n \leq m, \text{ d'où } |x_n - m| \leq \varepsilon.$$

Par définition (cf. chapitre II) x_n converge vers m .

b) Soit y un réel ; A étant cette fois non majoré, il existe n_0 tel que $x_{n_0} \geq y$ et on voit que :

$$n \geq n_0 \Rightarrow x_n \geq x_{n_0} \geq y.$$

Par définition, cela signifie que x_n converge vers $+\infty$. □

On a bien sûr un énoncé analogue avec des suites décroissantes.

Théorème II.4. Toute suite de Cauchy de $\mathbb{R}$ converge dans $\mathbb{R}$; en d'autres termes, $\mathbb{R}$ est complet (cf. chapitre V).

Démonstration. Soit (x_n) une suite de Cauchy de $\mathbb{R}$; définissons n_1 comme le plus petit entier tel que $|x_p - x_{n_1}| \leq 2^{-2}$ pour tout $p \geq n_1$, puis par récurrence n_k comme le plus petit entier $\geq 1 + n_{k-1}$ tel que $|x_p - x_{n_k}| \leq 2^{-k-1}$ pour tout $p \geq n_k$; nous avons alors

$$n_{k+1} > n_k ; |x_{n_{k+1}} - x_{n_k}| \leq 2^{-k-1}. \quad (\text{II.9})$$

II. Le théorème de la borne supérieure

Il en résulte que les segments $I_k = [x_{n_k} - 2^{-k}, x_{n_k} + 2^{-k}]$ sont décroissants, puisque $x_{n_{k+1}} + 2^{-k-1} \leq x_{n_k} + 2^{-k-1} + 2^{-k-1} = x_{n_k} + 2^{-k}$ et de même $x_{n_{k+1}} - 2^{-k-1} \geq x_{n_k} - 2^{-k-1} - 2^{-k-1} = x_{n_k} - 2^{-k}$; d'après l'axiome 4, leur intersection contient un réel ℓ , avec

$$|x_{n_k} - \ell| \leq 2^{-k}. \quad (\text{II.10})$$

(II.10) montre que la suite $(y_k) = (x_{n_k})$ converge vers ℓ quand $k \rightarrow \infty$; et une suite de Cauchy qui contient une sous-suite convergente converge, vérifions-le ici; soit $\varepsilon > 0$, n_0 comme dans (II.5), $k_0 \in \mathbb{N}$ assez grand pour qu'on ait $2^{-k_0} \leq \varepsilon$ et $n_{k_0} \geq n_0$ (c'est possible d'après (II.9)); alors $n \geq n_{k_0}$ entraîne $|x_n - \ell| \leq |x_n - x_{n_{k_0}}| + |x_{n_{k_0}} - \ell| \leq \varepsilon + 2^{-k_0} \leq 2\varepsilon$, ce qui prouve le théorème puisque ε est arbitrairement petit. $\square$

Remarque II.5. Là encore (cf. exercice 13) le fait d'être complet est une propriété possédée par le corps des réels, et non par celui des rationnels.

II.3 Le théorème de Borel-Lebesgue

- Une partie de $\mathbb{R}$ s'appelle un ouvert si c'est une réunion d'intervalles ouverts (avec la convention $\bigcup_{\emptyset} \dots = \emptyset$).

- On dit qu'une famille $(\omega_i)_{i \in I}$ de parties de X est un recouvrement de $A \subset X$ si $A \subset \bigcup_I \omega_i$.

Le théorème suivant semble avoir été découvert par Borel et Lebesgue lorsqu'ils tentèrent d'établir de façon rigoureuse que la longueur $b - a$ d'un segment $[a, b]$ est plus petite que la somme des longueurs des segments non triviaux le recouvrant.

Théorème II.6 (Théorème de Borel-Lebesgue). Soit $(\omega_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert du segment $[a, b] = K$; alors il existe J fini, $J \subset I$ tel que $(\omega_i)_{i \in J}$ soit encore un recouvrement de K (on dit que K admet un sous-recouvrement fini extrait des ω_i).

Démonstration. Soit A l'ensemble des $x \in K$ tels que $[a, x]$ puisse être recouvert par un nombre fini de ω_i , et soit $m = \sup A \leq b$; nous allons voir que

$$m \in A; \quad m = b. \quad (\text{II.11})$$

En effet, $m \in K$, donc il existe j tel que $m \in \omega_j$, et $h > 0$ tel que $[m - h, m + h] \subset \omega_j$; on peut trouver $x \in A$ tel que $x \geq m - h$; $[a, x]$ est recouvert par un nombre p de ω_i ; en leur ajoutant ω_j , on voit que $[a, m + h]$ est recouvert par $p + 1$ des ω_i ; en particulier $m \in A$; si $m < b$, en diminuant au besoin h , on a $m + h \in K$ et donc $m + h \in A$, ce qui contredit la définition de m et achève de prouver (II.11). Or, (II.11) dit que K est recouvert par un nombre fini de ω_i . $\square$