

René David, Karim Nour, Christophe Raffalli

Introduction à la logique

Théorie de la démonstration

3^e ÉDITION

**Préface de la 3^e édition : Olivier Laurent
Préface de la 2^e édition : Pierre-Louis Curien**

DUNOD

Direction et conception graphiques de la couverture :
Nicolas Wiel et Elizabeth Riba (Graphiste)

© Dunod, 1997, 2003, 2020, 2025
11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-089042-2

Homage à notre ami et collègue René David

Cette troisième édition d'*Introduction à la logique* (théorie de la démonstration) est pour nous l'occasion de rendre hommage à notre collègue et ami René David, qui a coécrit ce livre avec nous en 2001, suivi d'une seconde édition en 2003. René nous a quittés le 20 janvier 2022, laissant derrière lui un héritage scientifique et pédagogique d'une grande richesse.

Professeur à l'Université Savoie Mont Blanc, il a fondé et dirigé l'équipe de logique du laboratoire LAMA tout au long de sa carrière, jouant un rôle essentiel dans le développement et la structuration de la recherche en logique mathématique. Il a débuté ses travaux en théorie des ensembles, où il a obtenu des résultats remarquables, notamment avec le *David's trick*, une technique qui a eu un impact significatif dans ce domaine. Ses recherches l'ont ensuite conduit vers la théorie de la démonstration et ses applications au lambda-calcul. Reconnu pour sa maîtrise technique exceptionnelle, il a développé des méthodes syntaxiques originales, notamment sur la confluence, la standardisation et la normalisation, qui portent aujourd'hui son nom (notamment la méthode de substitution). Ses travaux ont donné lieu à de nombreuses publications dans des revues de référence et à des conférences à travers le monde, avec de multiples collaborations.

Au-delà de ses contributions théoriques, René s'est également engagé dans un champ de recherche explorant l'utilisation de la logique mathématique dans l'enseignement, avec une approche pédagogique mettant l'accent sur la rigueur et la maîtrise de la rédaction des démonstrations. Cette réflexion a guidé l'écriture de ce livre, qui expose les fondements théoriques du domaine dans un style sérieux, clair et accessible à un public non spécialiste,



René David

tout en proposant des exercices originaux accompagnés de corrigés. Son engagement dans la transmission du savoir l'a également conduit à finaliser la coécriture d'un autre ouvrage, moins technique, destiné principalement aux étudiants et aux futurs enseignants.

Même pendant sa retraite, René a poursuivi son engagement scientifique en tant que professeur émérite et s'est investi dans de nombreuses actions associatives pour partager sa passion de la montagne avec des jeunes en situation de handicap.

René a été un moteur essentiel dans la rédaction de ce livre. En travaillant sur cette troisième édition, nous avons retrouvé partout sa rigueur intellectuelle et son exigence du détail. Son sens exceptionnel de l'organisation et de la clarté a grandement contribué à la qualité et à la pérennité de cet ouvrage.

À travers ces quelques lignes, nous souhaitons lui rendre hommage et lui dédions cette nouvelle édition.

Karim Nour & Christophe Raffalli

Préface de la 3^e édition

Plus de vingt années ont passé depuis la précédente édition de ce livre, mais il reste toujours extrêmement précieux pour tous ceux qui souhaitent découvrir la logique et la notion de preuve formelle. Alors que de plus en plus d'enseignants ont recours aux assistants de démonstration pour consolider la compréhension de ce qu'est une preuve mathématique dès le premier cycle universitaire, on mesure combien l'approche proposée dans ce manuel était pertinente dès sa rédaction initiale. Le CAPES puis l'agrégation NSI (Numérique et Sciences Informatiques) ont (enfin) ouvert et l'on retrouve au programme différentes notions de logique abordées ici.

Cette 3^e édition s'enrichit d'un chapitre sur la logique linéaire. Introduite dans les années 1980 par Jean-Yves Girard, elle a progressivement irradié de nombreuses branches de la logique mathématique et de l'informatique : théorie de la démonstration, théorie des catégories, sémantique dénotationnelle, complexité implicite, interprétations calculatoires de la logique classique, théorie de la concurrence, systèmes de typage, etc. C'est un univers riche qui offre un cadre unificateur pour l'analyse de différentes logiques. La logique linéaire fait désormais partie de la boîte à outils standards de logique et d'informatique théorique, il est important qu'elle puisse être abordée dans ce livre. Les ingrédients de base, que sont le calcul des séquents linéaire et la sémantique des phases, sont décrits en détails. Le premier définit la prouvabilité de la logique, tandis que la seconde fournit un outil pour la réfutation, fidèlement à la dualité preuve vs contre-modèle. L'ensemble des connecteurs propositionnels est présenté, ce qui permet de percevoir la richesse d'expressivité du système, comme logique de ressources. Ainsi la décomposition des connecteurs de la logique classique et de la logique intuitionniste dans la logique linéaire a renouvelé notre regard sur ces systèmes nettement plus anciens.

Les auteurs nous font profiter de leur très grande expertise de l'enseignement de la logique à tous les niveaux universitaires. Les nombreux exercices corrigés sont un outil clef pour progresser par soi-même et s'approprier les nombreuses notions présentées.

Le temps a passé et René David n'est plus là. Je ne peux conclure sans mentionner ici le regret qu'il nous ait quittés ni l'investissement sans failles qui a été le sien en théorie de la

démonstration, en λ -calcul et en logique en général, notamment pour l'équipe de logique du LAMA à l'Université Savoie Mont Blanc où j'ai souvent eu le plaisir de passer.

Olivier Laurent

Préface de la 2^e édition

La logique mathématique est certainement presque aussi ancienne que les mathématiques elles-mêmes, comme en attestent des expressions telles que *modus ponens* qui ont survécu dans les présentations actuelles des règles de raisonnement. Plus près de nous, les paradoxes et controverses du début du XX^e siècle ont permis l'essor de la logique mathématique comme une branche des mathématiques, qui a elle-même engendré des sous-branches : on reconnaît aujourd'hui principalement la théorie des modèles, la théorie des ensembles, et la théorie de la démonstration. Cette dernière a pour objet d'étude les systèmes de preuves formelles, et vise à une compréhension des notions de preuve et de calcul, si possible indépendante de telle ou telle représentation précise. La théorie de la démonstration connaît aujourd'hui un essor considérable en raison de rapports très étroits avec l'informatique, et plus particulièrement avec le développement de logiciels sûrs.

Ce manuel est une introduction à la logique qui prend le point de vue de la théorie de la démonstration. Il n'est pas en premier lieu destiné à des étudiants souhaitant ensuite se spécialiser en logique, bien qu'il puisse bien servir ce rôle également. Il cherche d'abord à éduquer le lecteur (typiquement, un étudiant en licence) à la rédaction de preuves rigoureuses, et en même temps lisibles. De nombreux exemples montrent qu'il y a souvent peu de chose qui différencie une preuve rédigée avec des phrases et une preuve arborescente ne contenant que des formules et des règles. Sauf que bien sûr, dans la plupart des preuves rédigées en français, de nombreux détails sont laissés de côté, d'ailleurs qui les lirait ? L'ordinateur se révèle là une aide précieuse. Le troisième auteur du livre a développé lui-même un assistant de preuve, conçu notamment comme un outil pouvant accompagner les étudiants dans le processus d'acquisition de compétences de base en algèbre, analyse ou géométrie. Aujourd'hui, les assistants de preuve commencent à être utilisés industriellement aux fins de certification de logiciels. Et, pour revenir aux mathématiques, on a pu récemment formaliser entièrement la preuve du théorème des quatre couleurs (qui n'avait pu déjà être démontré qu'à l'aide de l'ordinateur). Ingénieurs, étudiants et chercheurs sont donc tous des clients potentiels de ces outils, qui doivent encore gagner en flexibilité, en efficacité, en facilité d'utilisation.

Ce livre est d'autant plus bienvenu qu'il n'existe aujourd'hui à ma connaissance que quelques livres de référence sur la théorie de la démonstration, mais (tout au moins en

langue française) aucun livre d'introduction. La rédaction en est remarquable par la limpidité et la richesse des exemples, qui campent la logique mathématique non comme une branche isolée, voire ésotérique, des mathématiques, mais comme un domaine autonome en interaction vivante avec le reste des mathématiques, ainsi, comme nous l'avons déjà souligné, qu'avec l'informatique. Les plus accrochés trouveront des résultats (tels que la décidabilité de l'arithmétique de Presburger), des exemples (tels que la suite de Goodstein) ou des remarques plus avancées (par exemple sur la logique linéaire). Cet excellent ouvrage contient donc beaucoup de matériel, exposé dans un style très progressif, ainsi qu'un stock considérable d'exercices. Rappelons ici qu'il ne faut pas regarder trop vite les corrigés!

Pierre-Louis Curien

Avant-propos

Ce livre résulte de la conjonction de nos expériences d'enseignants de mathématiques, pas uniquement de logique, et de chercheurs en théorie de la démonstration.

- René David et Karim Nour donnent, depuis plusieurs années, des cours et des TD dans divers modules de la licence et la maîtrise de mathématiques à l'Université de Savoie. L'une des difficultés majeures des étudiants réside dans l'absence de maîtrise du raisonnement. Le cours de logique de licence s'est ainsi, peu à peu, transformé en une introduction à la théorie de la démonstration : le but étant d'aider les étudiants à apprendre à raisonner.
- L'assistant de démonstration PhoX écrit par Christophe Raffalli a été testé avec les étudiants de licence : cela les a aidé à mieux comprendre les raisonnements qu'ils « subissaient » en algèbre, en analyse, etc.

Il nous a alors semblé intéressant de rédiger un cours qui puisse, à la fois :

- être utile aux étudiants qui veulent mieux connaître la « grammaire » du raisonnement dans les mathématiques « usuelles » ;
- être une introduction à la théorie de la démonstration qui est une théorie mathématique comme une autre avec ses définitions et ses théorèmes.

À notre connaissance, un tel livre n'existait ni en français ni en anglais.

Merci à tous ceux qui nous ont aidé : nos collègues Noël Bernard et Jacques Doyen, Jean-François Pabion dont les nombreuses remarques, en particulier celles à caractère plus philosophique, ont toujours été fort pertinentes et surtout Yves Bertini et René Cori qui ont fait une lecture très attentive de notre manuscrit et sont la source directe de nombreuses corrections et améliorations. Bien sûr, les erreurs qui peuvent rester sont de notre seule responsabilité.

Merci à Anne Bourguignon pour son efficacité dans l'édition.

Écrire un livre est un travail redoutable mais très enrichissant. Cela a demandé beaucoup d'énergie et de temps aux auteurs... et beaucoup de patience à leurs épouses Sophie, Souhad et Rebecca. Elles savent ce que nous leur devons et nous leur dédions ce livre.

À propos de la seconde édition

Dans cette seconde édition nous avons corrigé quelques erreurs qui avaient échappé à notre vigilance. Nous avons aussi tenu compte des innombrables remarques faites par Chantal Berline : nous espérons ainsi avoir pu préciser ou clarifier de nombreux points. Nous en avons, enfin, profité pour ajouter une vingtaine d'exercices.

Merci à Chantal Berline pour sa lecture très attentive et à Pierre-Louis Curien pour avoir accepté de préfacier cette seconde édition.

Chambéry, mai 2003.

À propos de la troisième édition

Depuis la seconde édition de ce livre, plusieurs événements importants ont marqué notre parcours. Tout d'abord, c'est avec une profonde tristesse que nous avons perdu notre co-auteur et ami René David, dont la rigueur scientifique, la générosité intellectuelle et la passion pour l'enseignement ont profondément façonné ce projet. Christophe Raffalli s'est installé en Polynésie Française, où il continue d'enseigner les mathématiques et l'informatique, poursuivant ainsi son engagement pédagogique. Karim Nour est resté à l'Université Savoie Mont Blanc, assurant toujours des enseignements en mathématiques aux niveaux licence et master.

Les réformes de maquette, conjuguées à diverses contraintes administratives et pédagogiques, ont malheureusement conduit à la disparition du cours de logique en licence à l'université Savoie Mont Blanc. Toutefois, une initiation à ce domaine subsiste sous la forme d'une option en première année, permettant aux étudiants de découvrir les fondements de la logique dès leur entrée à l'université. C'est dans ce contexte que nous avons été amenés à rédiger un autre ouvrage, dédié à ce nouveau public.

Malgré les années qui passent (plus de vingt-quatre ans depuis la première édition) ce livre continue d'être diffusé, et nous recevons encore régulièrement des messages d'enseignants, de chercheurs et d'étudiants nous témoignant de son utilité, en particulier pour les étudiants de master désireux de s'initier à la logique et à ses applications.

Préparer une troisième édition n'a pas été sans difficultés, notamment en raison de la distance géographique entre les auteurs. Après plusieurs mois de travail, nous sommes heureux de proposer cette nouvelle version. Elle corrige un certain nombre d'erreurs résiduelles, et surtout, introduit un nouveau chapitre consacré à la logique linéaire, enrichi d'exercices entièrement résolus.

Nous adressons nos plus vifs remerciements à Olivier Laurent pour sa disponibilité, ses réponses toujours rapides et précises à nos questions, ainsi que pour ses remarques précieuses, qui ont grandement contribué à l'élaboration de ce nouveau chapitre. Un grand merci également à notre collègue et ami Pierre Hyvernât, qui a relu avec attention ce nouveau projet et nous a fourni de nombreuses suggestions et corrections éclairantes. Son travail remarquable a grandement contribué à améliorer la rédaction de ce chapitre, afin de le rendre accessible à un public non spécialiste. Nous n'oublions pas de remercier chaleureusement Lætitia Jammet, responsable d'édition Prépas, Sciences et Techniques, pour ses encouragements précieux qui ont permis à cette nouvelle édition de voir le jour.

Chambéry et Punaauia, juin 2025

Table des matières

CHAPITRE 1 • LOGIQUE DU PREMIER ORDRE	9
1.1 Introduction	9
1.2 Les formules	10
1.3 Les démonstrations en déduction naturelle	21
1.4 Exemples	46
1.5 Démonstrations formelles et informelles	48
1.6 Premiers résultats théoriques	50
1.7 Systèmes alternatifs de démonstration	55
1.8 Exercices	59
CHAPITRE 2 • COMPLÉTUDE DE LA LOGIQUE DU PREMIER ORDRE	65
2.1 Introduction	65
2.2 Interprétations	66
2.3 Le cas du calcul propositionnel	71
2.4 Un peu de théorie des modèles	72
2.5 Théorème de complétude	77
2.6 Formes canoniques	84
2.7 Skolémisation	86
2.8 Exercices	88
CHAPITRE 3 • EXEMPLES DE THÉORIES	99
3.1 Introduction	99
3.2 Quelques théories algébriques	100
3.3 Exemples d'analyse	104

3.4	L'arithmétique de Peano	107
3.5	La théorie des ensembles de Zermelo Fraenkel	112
3.6	Les phénomènes d'incomplétude	119
3.7	Quelques théories et structures décidables	124
3.8	Exercices	133
CHAPITRE 4 • LOGIQUE INTUITIONNISTE ET MODÈLES DE KRIPKE		139
4.1	Introduction	139
4.2	Logique minimale, intuitionniste et classique	141
4.3	Traductions entre ces logiques	143
4.4	Sémantique du calcul propositionnel	151
4.5	Sémantique de la logique du premier ordre	159
4.6	Sémantique de la logique minimale	166
4.7	L'arithmétique de Heyting	168
4.8	Exercices	170
CHAPITRE 5 • CALCUL DES SÉQUENTS		179
5.1	Introduction	179
5.2	Les systèmes LK et LJ	180
5.3	Déduction naturelle et calcul des séquents	188
5.4	Élimination des coupures	194
5.5	Conséquences de l'élimination des coupures	204
5.6	Exercices	211
CHAPITRE 6 • INTRODUCTION À LA LOGIQUE LINÉAIRE		217
6.1	Introduction	217
6.2	Le système LL	219
6.3	Sémantique de phases pour LL	228
6.4	Exercices	238
CHAPITRE 7 • LOGIQUES D'ORDRE SUPÉRIEUR		243
7.1	Introduction	243
7.2	Le système	244
7.3	Exemples de logiques et de théories	250
7.4	Extensionnalité et axiome du choix	256
7.5	Sémantique	259
7.6	Exercices	261

CHAPITRE 8 • DÉMONSTRATION AUTOMATIQUE	265
8.1 Introduction	265
8.2 L'unification	266
8.3 La méthode des tableaux	272
8.4 La résolution	281
8.5 Exercices	288
 ANNEXE A • LE LOGICIEL PHOX	 291
A.1 Présentation du logiciel	291
A.2 Preuve de la formule $((C \rightarrow A) \vee (C \rightarrow B)) \rightarrow (C \rightarrow (A \vee B))$	292
A.3 Preuve de la proposition 1.4.1	294
 CORRIGÉS DES EXERCICES	 297
Exercices du chapitre 1	297
Exercices du chapitre 2	310
Exercices du chapitre 3	319
Exercices du chapitre 4	328
Exercices du chapitre 5	340
Exercices du chapitre 6	350
Exercices du chapitre 7	362
Exercices du chapitre 8	368

Introduction

Quand un étudiant arrive en licence, il a surtout appris à calculer, à utiliser des algorithmes : les opérations élémentaires à l'école primaire, les bases du calcul algébrique (règles des signes, identités remarquables, etc.) au collège et les bases de l'analyse (équations, limites, dérivées, etc.) au lycée.

Il a très peu appris à raisonner : cela a été fait essentiellement en géométrie. C'est en effet là qu'on trouve des phrases du genre « montrer que ce triangle est isocèle », « montrer que ces droites sont parallèles », etc. Pour tous ces raisonnements, le support visuel est fort, et les élèves qui ne « voient pas » qu'en traçant telle ou telle droite la solution apparaît ou qui ne « voient pas » dans l'espace sont très pénalisés.

Au lycée, on manipule déjà des objets « inconnus », mais c'est surtout pour faire des calculs, et quand on raisonne sur des objets représentés par des lettres, on peut les remplacer « visuellement » par un réel, un vecteur, etc. En licence, on demande aux étudiants de raisonner sur des structures plus abstraites, et donc de travailler sur des objets inconnus qui sont des éléments d'un ensemble lui-même inconnu, par exemple les éléments d'un espace vectoriel ou d'un anneau quelconque. Ce support visuel n'existe alors plus.

On aimerait que les étudiants puissent raisonner, démontrer des propriétés, mais souvent personne ne leur a jamais appris à raisonner, à écrire des preuves. Si on demande à un étudiant de licence de mathématiques ce qu'est une démonstration, il a quelques difficultés à répondre. Il peut dire que c'est un texte dans lequel on trouve des « mots-clés » : « donc », « parce que », « si », « si et seulement si », « prenons un x tel que », « supposons que », « cherchons une contradiction », etc. Mais il est incapable de donner la grammaire de ces

textes ni même ses rudiments. Les règles de démonstration, en particulier celles de la déduction naturelle, donnent une définition claire de démonstration qui est proche de ce dont on a besoin quand on rédige des mathématiques.

Pour parler, un enfant n'a pas besoin de connaître la grammaire. Il imite son entourage et cela marche très bien : un enfant de six ans sait utiliser des phrases déjà compliquées quant à la structure grammaticale sans avoir jamais fait de grammaire. La plupart des enseignants ne connaissent pas non plus les règles de démonstration qui forment la grammaire du raisonnement. Lors d'un cours de logique dispensé en licence de mathématiques, on va souvent parler uniquement du raisonnement par l'absurde, de la contraposée et du principe de récurrence, mais jamais de l'introduction et de l'élimination des connecteurs et des quantificateurs, qui sont pourtant fondamentales.

Pour les enseignants eux-mêmes, le processus d'imitation a bien marché et ils raisonnent correctement, même sans avoir une vue globale et complète des règles du raisonnement. L'expérience de tous les enseignants d'université montre que ce processus d'imitation marche bien chez les bons étudiants, et alors il est suffisant, mais il marche beaucoup moins bien, voire pas du tout, chez beaucoup d'autres.

Tant que le degré de complexité est faible (notamment lors d'un raisonnement de type « équationnel »), les règles de démonstration ne servent à rien, mais quand il augmente ou quand on ne comprend pas pourquoi quelque chose est faux, il devient nécessaire de faire un peu de logique pour pouvoir progresser. Les enseignants et les étudiants connaissent bien la situation suivante : dans un devoir, le correcteur a barré toute une page d'un grand trait rouge et mis « faux » dans la marge. Quand l'étudiant demande ce qui est faux, le correcteur ne peut que dire des choses du genre « ça n'a aucun rapport avec une démonstration », « rien n'est juste », etc., ce qui n'aide évidemment pas l'étudiant à comprendre. Cela vient, en partie, du fait que le texte rédigé par l'étudiant utilise les mots voulus mais dans un ordre plus ou moins aléatoire et qu'on ne peut donner de sens à l'assemblage de ces mots. Pouvoir se référer aux règles de démonstration permet de localiser avec précision les manques et les erreurs dans le texte d'un élève.

Les règles de la déduction naturelle ne sont pas nées à des fins pédagogiques, elles sont apparues dans le cadre d'une branche nouvelle de la logique mathématique : « la théorie de la démonstration ». Son origine est la crise des fondements, au début du xx^e siècle. À cette époque, il y a eu un doute sur ce qu'on avait le « droit » de faire dans un raisonnement mathématique. Des paradoxes sont apparus comme le « paradoxe de Russel » : soit a l'ensemble des ensembles ne se contenant pas eux-mêmes. Il est facile de montrer que a appartient à a si et seulement si a n'appartient pas à a , ce qui est manifestement contradictoire. Il a alors été nécessaire de préciser les règles de démonstration et de vérifier que ces règles ne sont pas contradictoires. Cette théorie est apparue il y a environ un siècle, ce qui est très peu puisque l'essentiel des mathématiques enseignées en premier et second cycles universitaires est connu (avec un formalisme éventuellement différent) depuis deux ou trois cents ans.

Plan du livre

Le but de ce livre est double.

Dans la première partie, on présente la logique comme un outil pour aider l'étudiant qui débute des études de mathématiques.

La seconde partie est une introduction à la théorie de la démonstration pour l'étudiant qui veut apprendre la logique en tant que discipline mathématique.

L'équilibre entre ces deux buts n'est pas simple : trop de formalisation pourra décourager le lecteur qui veut seulement apprendre à raisonner, pas assez donnera l'impression d'un manque de sérieux. Nous avons essayé de trouver le juste milieu.

La première partie (chapitres 1 à 3) correspond à un cours de logique de licence de mathématiques.

Le **chapitre 1** présente les bases de la théorie de la démonstration : qu'est-ce qu'une formule, une démonstration ? Quelles en sont les règles ? On présente en détail ce qu'on appelle la *déduction naturelle* mais d'autres formalisations sont possibles. Des exemples concrets (issus des mathématiques courantes) sont donnés. Il s'agit donc de :

- donner à l'étudiant les outils (i.e. la grammaire) pour pouvoir écrire correctement des preuves. Le but n'est évidemment pas de vouloir tout formaliser complètement : ce n'est pas faisable et cela ne sert à rien. Il faut cependant qu'il puisse faire suffisamment de preuves en détail pour que les principes en soient acquis : au collège, pour comprendre la règle des signes, il faut en faire usage ;
- l'aider à analyser suffisamment la preuve pour pouvoir la rédiger et pouvoir, éventuellement, lui montrer les erreurs faites ;
- l'aider à comprendre ce qu'on lui demande (dans le cours d'algèbre, de topologie, etc.) quand il fait une démonstration.

Le **chapitre 2** donne la sémantique, c'est-à-dire la notion générale d'interprétation (ou de structure) et de vérité d'une formule. Le résultat essentiel en est le théorème de complétude : on peut démontrer une formule si et seulement si elle est vraie quelle que soit l'interprétation des symboles utilisés.

Le **chapitre 3** donne des exemples de théories mathématiques. Après un rappel de quelques théories classiques, on introduit deux théories particulièrement importantes :

- l'arithmétique de Peano, la base de la théorie des nombres ;
- la théorie des ensembles de Zermelo Fraenkel, le fondement habituel de toutes les mathématiques.

La seconde partie (chapitres 4 à 8) est plutôt de niveau master.

Le **chapitre 4** introduit la logique intuitionniste : ses règles de démonstration, sa sémantique et son théorème de complétude. La logique intuitionniste se distingue de la logique « habituelle » (on appelle cette dernière la logique *classique*) par l'interdiction du raisonnement par l'absurde. L'intérêt de cette logique est de donner des preuves constructives : si on a prouvé qu'il existe un entier vérifiant telle propriété, la preuve donne explicitement cet entier alors qu'avec un raisonnement par l'absurde on sait simplement qu'il n'est pas possible qu'il n'y ait pas d'entier vérifiant la propriété. Le lien entre cette logique et la preuve de programmes informatiques est un domaine très actif de recherche.

Au **chapitre 5**, on donne une autre formalisation de la notion de démonstration : le calcul des séquents. Elle est moins naturelle (et donc moins utilisable dans la pratique quotidienne) que celle qu'on a présentée au chapitre 1, mais elle permet de montrer plus facilement des propriétés importantes des démonstrations et, en particulier, que les règles ne sont pas contradictoires.

Le **chapitre 6** présente la logique linéaire, une version affinée de la logique classique, qui permet d'analyser avec précision la manière dont les hypothèses sont utilisées dans une démonstration. Dans ce cadre, certains connecteurs logiques sont doublés afin de distinguer différentes façons de combiner les formules, et des symboles appelés modalités sont introduits pour mieux contrôler la répétition ou l'élimination des hypothèses. On commence par exposer les règles du système, puis on lui associe une sémantique spécifique, ce qui permet d'établir un théorème de complétude.

Le **chapitre 7** est consacré à des extensions de la logique du premier ordre introduite au chapitre 1. La logique du premier ordre ne permet pas de quantifier sur plusieurs types d'objets (par exemple les réels et les ensembles de réels ou les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$). Il s'agit donc d'étendre son pouvoir d'expression pour pouvoir le faire : on introduit pour cela les logiques d'ordre supérieur et les logiques multi sorte. La plupart des logiciels d'aide à la démonstration sont basés sur des logiques d'ordre supérieur. Ce chapitre est donc aussi destiné aux étudiants qui veulent connaître les bases dans ce domaine.

Enfin, le **chapitre 8** est une courte introduction aux techniques de base de la démonstration automatique. On y donne les résultats essentiels sur l'unification, la méthode des tableaux et la résolution.

Indépendance des chapitres

Les sections 1 à 5 du chapitre 1 et du chapitre 2 sont des préalables à tous les autres chapitres. Les chapitres 3 à 5 et 7 et les sections 1, 2 et 4 du chapitre 8 peuvent, dans une large mesure, être lus indépendamment les uns des autres. Le chapitre 6 nécessite d'avoir lu le chapitre 5. La section 3 du chapitre 8 nécessite une lecture préalable des sections 1 et 2 du chapitre 5.

Ce livre est destiné :

1. Aux étudiants en mathématiques et en informatique.
 - En troisième cycle, aux futurs chercheurs, l'ensemble des chapitres couvre les connaissances de base ainsi que certaines notions avancées en logique, illustrées par des démonstrations et de nombreux exercices.
 - En second cycle, notamment à travers les trois premiers chapitres, ce livre constitue une introduction à la logique, tant sur le plan syntaxique que sémantique, avec un grand nombre d'exercices corrigés.
 - En classes préparatoires et en licence de mathématiques, le chapitre 1 pourra être lu et étudié avec grand profit par les étudiants désireux de mieux comprendre ce qu'est un raisonnement mathématique.
2. Aux enseignants en mathématiques et en informatique, du lycée à l'université.

- À ceux qui souhaitent acquérir pour eux-mêmes les bases de la logique et en particulier de la théorie de la démonstration. Notons qu'un chapitre de logique figure au programme du CAPES de mathématiques :

Raisonnement et vocabulaire ensembliste. Opérateurs logiques et quantificateurs. Vocabulaire de la théorie des ensembles. Applications, relations d'ordre et relations d'équivalence. (extrait du Programme du CAPES 2026).

- Mais aussi à tous les autres : comment répondre aux questions des étudiants sur la façon de construire une démonstration lorsqu'on ne dispose pas soi-même d'une vision claire du sujet ? Les auteurs de ce livre ont présenté, à plusieurs reprises, des exposés d'introduction à la logique devant un public universitaire : les nombreuses questions posées montrent à l'évidence que ce type d'introduction est loin d'être superflu.

Utilisation d'un assistant de démonstration

Depuis l'apparition des ordinateurs, les logiciens ont cherché à faire des preuves sur machines, l'un des buts étant de pouvoir vérifier (avec un grand degré de fiabilité) des preuves longues et difficiles. Cette vérification est utile : il se peut, en effet, que dans de telles preuves on n'ait pas « vu » une difficulté. Des logiciels d'aide à la démonstration ont été développés qui permettent d'écrire des démonstrations complètes et sûres. Ils sont utilisés, en particulier, pour la vérification de logiciels.

Pendant plusieurs années, nous avons enseigné en licence et en master de mathématiques. Dans le cours de logique de la licence de mathématiques de l'université Savoie Mont Blanc, nous avons fait travailler les étudiants sur le logiciel PhoX écrit par C. Raffalli. Cette expérience a été très positive et il semble que cela ait permis aux étudiants de progresser. Nous avons, par exemple, fait démontrer le théorème des valeurs intermédiaires et cela nous a permis de mieux comprendre où étaient les difficultés rencontrées par les étudiants : si un enseignant rappelle la preuve de ce théorème en 3^e année de licence (elle est supposée connue dès les deux premières années), il n'y passera que quelques petites minutes. Et pourtant, quand on demande aux étudiants de l'écrire un peu en détail (« j'applique la définition de la continuité avec $\varepsilon = \dots$, je trouve α tel que, ... »), on se rend compte que tout cela est un peu vide de sens pour beaucoup d'entre eux.

L'aide de l'ordinateur devient indispensable quand on veut formaliser complètement des preuves un peu longues. Les outils informatiques dont on peut disposer commencent à devenir performants. En ce moment, le logiciel Lean <https://lean-lang.org/>, basé sur le « calcul des constructions », une logique d'ordre supérieur, est probablement le plus « à la mode ».

L'assistant de démonstration PhoX (cf. annexe), sur lequel travaillent les auteurs du livre, permet aussi cette formalisation et peut donc aider le lecteur à appréhender la notion de démonstration. PhoX est disponible gratuitement, ainsi que la correction de certains exercices réalisée avec PhoX, à partir du site Web :

<https://raffalli.eu/phox/online/index.html>

Les avantages de PhoX sont qu'il est entièrement utilisable en ligne, qu'il n'évolue plus et qu'il utilise exactement la théorie des types simples présentées au chapitre 7. Cela permet