

Jean-Marcel Rax

Mécanique analytique

Adiabaticité, résonances, chaos

DUNOD

Illustration de couverture : © gojalia – AdobeStock.com

© Dunod, 2020

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff

www.dunod.com

ISBN 978-2-10-081061-1

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.



Table des matières

Avant-propos

VII

1

Configurations, évolutions, variations

1

1. Formalismes lagrangien et hamiltonien 1
2. Variété des configurations 4
3. Variations naturelles et virtuelles 5
4. Formulations variationnelles 7
5. Multiplicateurs de Lagrange, réciprocity, dualité 9
6. Couplages gyroscopiques et dissipatifs 13
7. Couplage champs-particule 15

Les points clés du chapitre

17

2

Problèmes de Kepler et Alfven

18

1. Réductions cinétique et dynamique 19
2. Formules de Binet, théorèmes de Bertrand 24
3. Orbites, hodographes, lois de Kepler 27
4. Vecteur de Laplace-Runge-Lenz 29
5. Équation de Kepler 31
6. Orbite et hodographe de Larmor 36
7. Invariance adiabatique, forces séculaires 37
8. Théorie des dérives d'Alfven 42

Les points clés du chapitre

47

Entraînez-vous 48

Solutions 57

3

Équations d'Euler et Lagrange

60

1. Coordonnées et vitesses généralisées 60
2. Équations d'Euler-Lagrange 64

3.	Identité de Beltrami	65
4.	Couplages gyroscopiques	66
5.	Couplages électrodynamiques	67
	Les points clés du chapitre	69
	Entraînez-vous	70
	Solutions	83
4	Principes variationnels	89
1.	Principe de Hamilton	89
2.	Principe de Maupertuis	92
3.	Principe de Fermat	96
4.	Liaisons et contraintes	100
	Les points clés du chapitre	103
5	Symétries et adiabaticité	104
1.	Invariance de jauge, forces d'inertie	104
2.	Théorème de Noether	106
3.	Lagrangiens lent et rapide	108
4.	Formule d'Airy	110
5.	Invariance adiabatique	112
6.	Dérives séculaires	114
7.	Forces séculaires	118
	Les points clés du chapitre	121
	Entraînez-vous	122
	Solutions	131
6	Équations de Hamilton et Jacobi	135
1.	Équations de Hamilton	135
2.	Actions de Jacobi et Arnold	140
3.	Équations de Hamilton-Jacobi	143
4.	Invariant intégral de Cartan	149

5. Invariants de Liouville et Poincaré	151
6. Mécanique quantique, principe de Huygens	156
Les points clés du chapitre	160
Entraînez-vous	161
Solutions	163
7 Méthodes canoniques	164
1. Transformations canoniques	164
2. Angles-actions et tores de KAM	169
3. Invariance adiabatique de l'action	173
4. Crochets de Poisson	176
5. Théorème de Liouville	179
6. Oscillateurs linéaires et non linéaires	181
7. Interactions champs-particule	186
Les points clés du chapitre	191
Entraînez-vous	192
Solutions	203
8 Adiabaticité, résonances, chaos	208
1. Hamiltonien adiabatique	208
2. Hamiltonien pondéromoteur	215
3. Relation d'Einstein	219
4. Hamiltonien résonnant	222
5. Chaos et critère de Chirikov	226
6. Équation cinétique quasi linéaire	229
7. Équation cinétique de Landau	233
Les points clés du chapitre	237
Entraînez-vous	238
Solutions	243
Annexes	247
A. Courbure et torsion euclidiennes	247

Table des matières

B. Position, vitesse et accélération	249
C. Ellipse, hyperbole et parabole	250
D. Points O et X	253
E. Équation de Fokker-Planck	255
F. Transformée de Legendre	257
Bibliographie	260
Index	261

Avant-propos

On ne comprend rien si l'on ne cherche pas à comprendre tout.

Jacqueline de Romilly, *Ce que je crois*.

La statique, science de l'équilibre des fluides et des solides pesants, s'est constituée dès l'Antiquité avec les travaux d'Archimède, la dynamique, science du mouvement et de ses causes, à partir des travaux de Galilée sur la pesanteur et de Kepler sur la gravitation. L'unification par Newton de la pesanteur et de la gravitation marque l'acte de naissance de la physique classique avec la publication de ses *Principia* en 1687.

La mise en place du cadre mathématique adapté à la formulation des lois de la mécanique s'étale sur tout le XIX^e siècle à partir du traité de *Mécanique analytique* de Lagrange en 1788, et culmine avec la publication des *Méthodes nouvelles* de Poincaré en 1892. L'un des fils directeurs de ce développement est constitué par la quête d'une réduction de la dynamique à une statique, intuition formulée initialement par d'Alembert.

Cette recherche des invariants et de l'invariance, c'est-à-dire de l'essence au-delà des apparences, permet l'achèvement technique de la mécanique lagrangienne et de la mécanique hamiltonienne dès le début du XX^e siècle. L'esthétisation de ces acquis fut l'une des multiples sources du tournant algébrique des mathématiques après la période analytique qui va de Newton à Cauchy ; le *Programme d'Erlangen* de Félix Klein, en 1872, constituant l'expression militante de ce tournant structuraliste et le *bourbakisme* sa forme religieuse. Nombre de points de vue exprimés dans le *Programme d'Erlangen* sont partagés par la mécanique analytique, en particulier celui-ci : « Les expressions analytiques qui peuvent se présenter dans l'étude d'une multiplicité au sens d'un groupe doivent être, en raison de leur signification, indépendantes du système de coordonnées ». Mais la mécanique parle du réel à partir du réel, c'est-à-dire, contrairement aux mathématiques, s'appuie sur une dialectique de la *praxis* et du *logos*. Le point de vue formel de la recherche des invariants et de leurs significations algébriques doit donc être complété par des méthodes d'approximations.

L'inefficacité de certaines de ces méthodes d'approximations, dans le cadre du *problème à trois corps* et du *problème des petits diviseurs* en mécanique céleste, conduisit à une révision radicale de l'idéologie du déterminisme, révision entrevue par Poincaré et clairement formulée par Chirikov à la fin des années 1950. Pour prédire l'évolution d'un système, ce dernier doit être déterministe et stable au regard des instabilités *stochastiques*, c'est-à-dire robuste vis-à-vis d'une petite erreur de spécification des conditions initiales. L'étude du régime *chaotique* des systèmes hamiltoniens, durant la seconde moitié du XX^e siècle, participa au renouveau de cette vieille discipline et confirma les intuitions de Boltzmann et les présupposés de la théorie cinétique classique.

Ces trente dernières années, les allègements successifs des programmes d'analyse, de géométrie et de physique de l'enseignement secondaire, répercutés aux niveaux L1/L2 et Sup/Spé dans l'enseignement supérieur, ont considérablement modifié les cursus de mécanique classique au sein des facultés et des écoles aux niveaux Licence 3 et Master. L'évolution de notre système éducatif, à travers le renversement idéologique entre (i) la volonté d'abstraction et d'axiomatisation systématique des années 1970 et (ii) l'actuel refus de l'abstraction et de l'axiomatisation, semble être condamnée aux positions extrêmes ; extrêmes qui présentent de nombreuses difficultés pour l'apprentissage d'une discipline offrant la puissance conceptuelle, la pertinence pratique et la profondeur historique de la mécanique analytique. Ainsi est apparue la nécessité d'un cours rénové de mécanique analytique où nous avons renoncé à l'usage du cadre de la géométrie symplectique mais gardé l'intuition historique que les invariants sont plus aptes à révéler l'identité du réel que les lois d'évolutions.

Ces notes de cours, exercices et problèmes, ordonnés et présentés ici, sont issus de plusieurs cours enseignés aux niveaux L3, M1 et M2 ces vingt dernières années, principalement à l'École polytechnique et à la faculté des sciences de l'université de Paris XI.

Ce cours s'adresse aux physiciens et aux mécaniciens : enseignants et ingénieurs, futurs enseignants et futurs ingénieurs, étudiants des facultés des sciences et élèves des écoles d'ingénieurs. Il pourra aussi être consulté avec profit par les chercheurs confrontés à des problèmes complexes de dynamique des particules.

Orsay, Palaiseau, Barribas, décembre 2019.

Configurations, évolutions, variations

Et la complication croissante exige des signes de signes.

Simone Weil *La Pesanteur et la Grâce*.

Objectifs

Présenter les trois formalismes utilisés pour résoudre les problèmes de mécanique.

Introduire l'espace des configurations d'un système.

Distinguer les évolutions naturelles et les variations virtuelles.

Plan

- 1 Formalismes lagrangien et hamiltonien
- 2 Variété des configurations
- 3 Variations naturelles et virtuelles
- 4 Formulations variationnelles
- 5 Multiplicateurs de Lagrange, réciprocité, dualité
- 6 Couplages gyroscopiques et dissipatifs
- 7 Couplage champs-particule

La mécanique analytique est constituée par un ensemble de principes, de méthodes et de résultats permettant de décrire, prédire et analyser l'évolution, dans l'espace en fonction du temps, d'un système de points matériels caractérisés par des masses et des charges. Le lieu géométrique décrit dans l'espace par chacun de ces points est appelé l'**orbite** et le lieu des points correspondants dans l'espace des vitesses l'**hodographe**.

On considérera qu'un problème de mécanique est résolu, au sens de Poincaré, à travers la description de ces deux courbes, orbite et hodographe, pour chaque point matériel d'un système, quelles que soient les conditions initiales. Cette description pouvant être de nature analytique (Lagrange, Euler...), géométrique (Kepler, Newton...) ou topologique (Poincaré, Birkhoff...).

1 Formalismes lagrangien et hamiltonien

Le formalisme newtonien constitue la formulation la plus répandue des lois de la mécanique. Ce formalisme s'articule autour des concepts de force et de couple, l'accélération d'une particule est égale à la somme des forces appliquées divisée par sa masse, ces forces quantifiant (i) des interactions à distance, (ii) des actions de contact ou (iii) des

effets d'inertie. On notera que la force est un objet algébrique assimilable à une forme, car le travail est un scalaire, alors que l'accélération est un vecteur. La deuxième loi de Newton nécessite donc quelques commentaires sur la dualité algébrique entre formes et vecteurs.

Ce formalisme dynamique fut développé par Newton (la notation vectorielle actuelle fut introduite par Gibbs) à la même époque que le formalisme énergétique introduit par Leibniz qui identifia la *vis viva*, égale, à un facteur deux près, à l'énergie cinétique. Ces deux traditions, newtonienne et leibnizienne, sont à l'origine des différentes formulations des lois de la mécanique.

Le formalisme newtonien, construit sur la base du concept de force, est particulièrement bien adapté au développement d'une intuition mécanique. Il est donc généralement utilisé pour introduire les bases de la mécanique. Les formalismes lagrangien et hamiltonien, issus de la tradition leibnizienne, sont en général considérés comme des chapitres de mécanique avancée et permettent de traiter des problèmes complexes pour lesquels le cadre newtonien est inadapté.

Une formulation lagrangienne est bien adaptée aux problèmes où certains degrés de liberté sont contraints, ainsi qu'aux systèmes possédant des symétries.

La formulation hamiltonienne est, quant à elle, particulièrement bien adaptée à l'étude des mouvements possédant des échelles de temps rapides et lentes tels que les mouvements multiples périodiques. Ce formalisme permet aussi la construction d'une théorie de perturbations remarquablement efficace. L'étude de la transition vers le chaos dans les systèmes multiples périodiques nécessite aussi un formalisme hamiltonien et la description du régime chaotique des systèmes mécaniques conservatifs se formule également en termes de variables hamiltoniennes. Enfin, le formalisme hamiltonien permet de considérer la dynamique d'un système, soit comme un problème aux conditions initiales à l'aide des équations de Hamilton, soit comme un problème de type conditions aux limites à travers l'équation de Hamilton-Jacobi, renouvelant ainsi radicalement notre vision de la dynamique des systèmes de particules.

La mécanique lagrangienne et la mécanique hamiltonienne ne sont pas simplement enseignées au regard de leurs puissances opérationnelles dans le contexte de certains problèmes particuliers de mécanique céleste ou de dynamique des systèmes de solides articulés : elles constituent les fondements méthodologiques des deux grandes conquêtes cognitives de la physique moderne relative à la structure de la matière à petite échelle et à la structure de l'Univers à grande échelle.

- Notre conception actuelle de la structure de la matière est construite sur une dialectique du microscopique et du macroscopique, dialectique rendue opérationnelle par la physique quantique et la physique statistique. Or ces deux disciplines sont articulées autour de la description hamiltonienne de la dynamique microscopique. Cette remontée du microscopique au macroscopique est donc intimement liée aux méthodes et concepts hamiltoniens.

- Notre conception actuelle de la structure à grandes échelles de l'Univers, le terme «grandes échelles» impliquant les échelles de longueurs (cosmologie) mais aussi de temps (cosmogonie), est construite sur la base d'une description lagrangienne de la dynamique de l'espace, du temps et de la matière et le lagrangien est l'outil privilégié d'élaboration des modèles de structures ultimes de l'espace, du temps et de la matière.

Le formalisme lagrangien constitue le cadre méthodologique de la relativité et le formalisme hamiltonien est l'outil de prédilection des descriptions statistique et quantique, positionnant ainsi la mécanique analytique en amont de la physique fondamentale. Les méthodes lagrangienne et hamiltonienne, au-delà de leurs vertus pratiques, constituent la superstructure conceptuelle de la physique moderne, permettant de formuler le déploiement spatiotemporel de la masse, de la charge et du moment angulaire à petite et grande échelles. Ce rôle fondateur justifie le caractère impératif de leurs maîtrises pour aborder un cursus de physique fondamentale.

Pour décrire notre environnement, le physicien distingue trois niveaux : (i) les objets appartenant au réel sensible, (ii) les concepts idéalisant ces objets (vecteurs, tenseurs, *bra*, *ket* ...) et (iii) les représentations de ces concepts. Par exemple, un vecteur, qui est un élément d'un espace vectoriel, est représenté par un ensemble de nombres qui constituent ses composantes sur une base. Cette distinction entre idéalisation (géométrique/algébrique) du réel et représentation numérique de l'idéalisation géométrique/algébrique du réel, en apparence triviale, devient essentielle lorsqu'il est question de transformation. Deux types de transformations sont alors possibles : (i) les changements de représentations de l'objet et (ii) les transformations de l'objet lui même. On parle alors de transformations **passive** et **active**. Les transformations, actives ou passives, doivent être composables pour être physiquement recevables, elles possèdent alors nécessairement une structure de groupe.

La complémentarité de ces deux types de points de vue, actif et passif, se révèle dans le cadre d'une conception dialectique de la physique où ce ne sont plus l'espace, le temps et la matière qui sont les sujets d'étude, mais la relation entre un sujet observateur et un objet, dynamique ou statique, qui constitue le questionnement de la physique. Le physicien doit toujours garder à l'esprit l'origine des trois grandes ruptures épistémologiques du vingtième siècle, (i) la physique statistique ($S = k_B \ln \Omega(E)...$), (ii) la mécanique quantique ($H\Psi = E\Psi...$) et (iii) la relativité ($E = Mc^2...$). C'est le questionnement et l'analyse de l'**acte de mesure** : (i) **impossibilité de la mesure** des 10^{23} vitesses et positions au sens de Boltzmann, (ii) **incertitude de la mesure** de variables conjuguées au sens de Heisenberg et (iii) pertinence des **mesures simultanées** au sens d'Einstein, qui révéla les conceptions erronées de la physique classique et permit de dépasser les contradictions des modèles classiques pour résoudre ainsi les crises épistémologiques fondatrices de la fin du dix-neuvième siècle et du début du vingtième siècle.

Au-delà de la structure de **groupe de transformations**, l'étude des phénomènes physiques nécessite une certaine intimité avec les outils classiques de l'algèbre, de

la géométrie et de l'analyse. Historiquement, un grand nombre de ces concepts, algébriques, géométriques et analytiques, sont issus directement des problèmes posés par la mécanique analytique. On gardera toujours présent à l'esprit que généraliser une notion revient à s'affranchir de certains concepts posés consciemment a priori, ou induit inconsciemment à partir d'un sens primitif. Historiquement, la généralisation, à partir de la mécanique analytique, des outils de l'algèbre et de la géométrie élémentaires offre un exemple remarquable de cet affranchissement.

2 Variété des configurations

La première question qui doit être posée lorsque l'on aborde l'étude d'un système dynamique, est celle du nombre de degrés de liberté et de l'identification des paramètres de contrôle structurels du système. Les paramètres de contrôle ne sont pas des degrés de liberté, mais des variables de structure, et non de configuration, ajustables par l'opérateur extérieur. Les degrés de liberté déterminent la structure de l'espace des configurations. Ces questions sont en apparence simples mais se révèlent parfois subtiles. En particulier, la topologie de l'espace des configurations d'un système mécanique est une question importante.

Si nous considérons le pendule pesant, représenté sur la figure 1.1, il présente un degré de liberté unique, et l'espace des configurations V est le cercle : à chaque point du cercle correspond une configuration unique du pendule. La longueur du pendule constitue un paramètre de contrôle.

Si nous considérons un disque en translation suivant une direction, le nombre de degrés de liberté est aussi égal à un, mais la topologie de l'espace des configurations est celle de la droite réelle. Si une rotation autour d'un axe complémente cette dynamique, l'espace des configurations V est un cylindre, représenté sur la figure 1.1.

Considérons à présent le pendule sphérique et le double pendule pesant, illustrés sur la figure 1.2. Ces deux systèmes sont décrits par deux variables réelles, mais dans un cas l'espace des configurations V est un tore, et dans l'autre une sphère, ces deux surfaces, représentées sur la figure 1.2, étant continûment irréductibles l'une à l'autre.

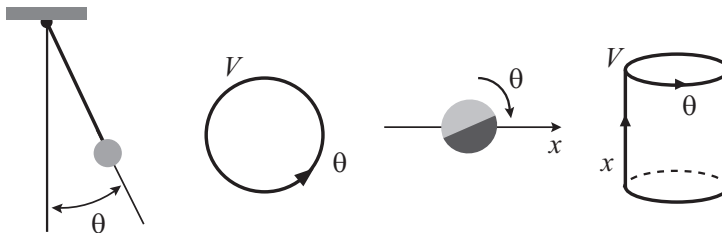


Figure 1.1 – Variété des configurations V du pendule pesant et d'un disque.

D'un point de vue mathématique la structure de l'espace des configurations présente toutes les propriétés d'une **variété différentiable** et l'on parle de la **variété des configurations**. À chaque point de la variété des configurations correspond un état statique du système. Pour étudier la dynamique il nous faut aussi considérer les vitesses généralisées, c'est-à-dire le taux de variation temporel des variables décrivant la variété des configurations. Techniquement, l'on construit ainsi le **fibré vectoriel tangent** associé à la variété des configurations et l'on double la dimension de la variété des états statiques (configurations) en considérant le fibré (configuration + vitesse).

L'espace des configurations et vitesses (moment canoniquement conjugué) est appelé **espace des phases**.

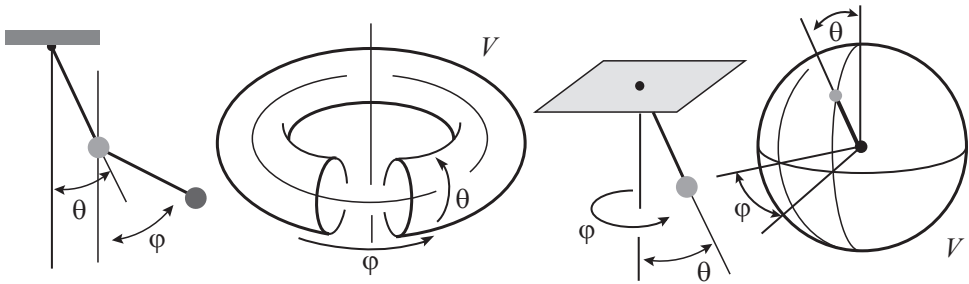


Figure 1.2 – Variété des configurations V des pendules double et sphérique.

La donnée d'un point dans l'espace des phases définit un état de configuration et de mouvement. Il va sans dire que position et vitesse sont des variables indépendantes, c'est un fait expérimental, nous pouvons fixer arbitrairement et indépendamment, à un instant donné, la position et la vitesse d'un point matériel.

3 Variations naturelles et virtuelles

La description dynamique d'un système peut être considérée (i) localement ou (ii) globalement.

Un point de vue **local** s'attachera à la construction d'un bilan d'évolution sur une durée infinitésimale et débouchera sur une formulation en termes d'équations différentielles. Un point de vue **global** embrassera orbite et hodographe dans leurs déploiements temporels sur une durée finie et débouchera sur une formulation en termes de propriétés d'une fonctionnelle associée à ces trajectoires. Lorsque cette propriété est constituée par l'occurrence d'un optimum, il s'agit d'un **principe variationnel**.