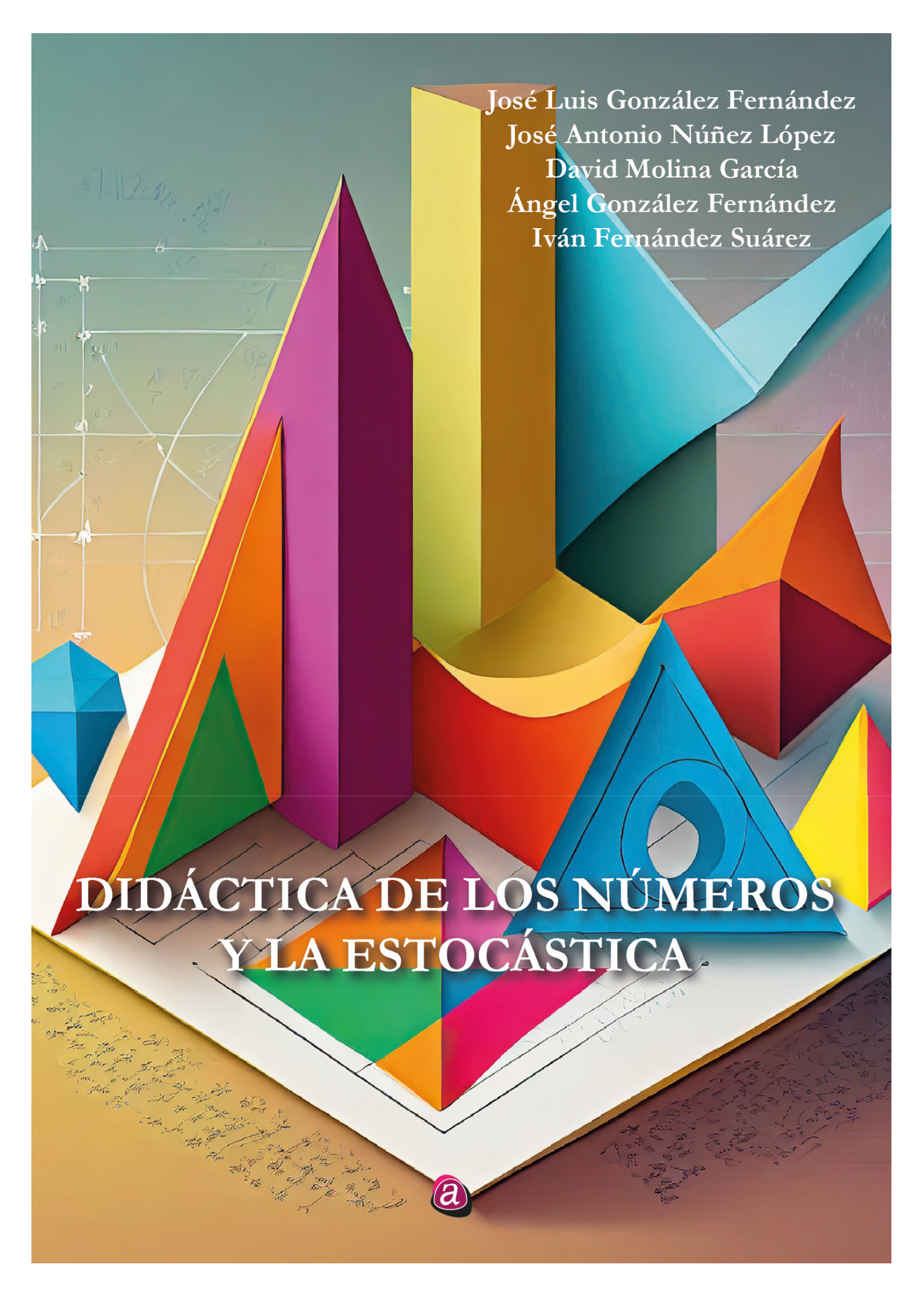


The background of the cover is a collage of mathematical and geometric elements. It includes a green chalkboard with a coordinate system and a curve, a yellow and orange 3D structure, a blue and orange 3D structure, and a blue and red 3D structure. The title is written in white serif font over the center of the image.

José Luis González Fernández
José Antonio Núñez López
David Molina García
Ángel González Fernández
Iván Fernández Suárez

DIDÁCTICA DE LOS NÚMEROS Y LA ESTOCÁSTICA



DIDÁCTICA DE LOS NÚMEROS Y LA ESTOCÁSTICA

José Luis González Fernández

José Antonio Núñez López

David Molina García

Ángel González Fernández

Iván Fernández Suárez



Ediciones Albores

DIDÁCTICA DE LOS NÚMEROS Y LA ESTOCÁSTICA

1ª Edición: Sevilla a 08 de Enero de 2024

©Copyright de la obra: José Luis González Fernández, José Antonio Núñez López, David Molina García,
Ángel González Fernández e Iván Fernández Suárez

©Copyright de la edición: Ediciones Albores

Email: info@edicionesalbores.com

ISBN: 984-84-19946-51-5

Depósito Legal: SE 2395-2023

Todos los derechos reservados. Queda prohibida la reproducción total o parcial de la obra, así como su contenido y/o el diseño de portada y contraportada. La editorial se exime de toda responsabilidad sobre los posibles daños o perjuicios que pudiera ocasionar el contenido mismo de la obra.

ÍNDICE

CAPÍTULO 1. EL CURRÍCULO DE LOS NÚMEROS Y LA ESTOCÁSTICA EN EDUCACIÓN PRIMARIA.....	12
1. Para empezar.....	13
2. Introducción.....	14
3. Niveles de concreción curricular.....	14
3.1. Legislación estatal	14
3.2. Legislación autonómica.....	15
3.3. Documentos de centro	17
4. Resolución de problemas	17
5. Ejemplos de problemas resueltos.....	22
CAPÍTULO 2. NÚMEROS	25
1. Para empezar.....	26
2. Un poco de historia.....	27
3. Introducción	29
4. Utilidades de los números	29
5. Adquisición del concepto de número.....	30
6. Sistemas de numeración.....	31
6.1. Sistemas de numeración aditivos.....	31
6.1.1. Sistema de numeración egipcio	31
6.1.2. Sistema de numeración griego	32
6.1.3. Sistema de numeración romano	33
6.2. Sistemas de numeración híbridos	34
6.2.1. Sistema de numeración chino.....	34
6.3. Sistemas de numeración posicionales	35
6.3.1. Sistema de numeración babilónico	35
6.3.2. Sistema de numeración maya.....	37
6.3.3. Sistema de numeración decimal.	38
6.3.4. Otros.....	38
6.3.5. Conversión entre sistemas de numeración	39
7. Sugerencias didácticas	40
8. Ejercicios para afianzar contenidos.....	40

CAPÍTULO 3. OPERACIONES	44
1. Para empezar.....	45
2. Un poco de historia.....	46
3. Introducción	47
4. La suma	48
4.1. Un primer contacto con la suma.....	48
4.2. Pasando a papel.....	48
4.3. Formalizando la suma	48
4.4. Mecanización de la suma	48
4.5. Algoritmo de la suma.....	49
4.6. Otras propuestas para afianzar la suma.....	50
4.7. Propiedades de la suma.....	50
5. La resta	51
5.1. Proceso de aprendizaje de la resta.....	51
5.2. Algoritmos de la resta.....	52
5.3. Otras propuestas para afianzar la resta	53
5.4. Propiedades de la resta.....	53
6. La multiplicación.....	53
6.1. Un primer contacto con la multiplicación	53
6.2. Pasando a papel.....	54
6.3. Formalizando la multiplicación.....	54
6.4. Las tablas de multiplicar	54
6.5. Propiedades de la multiplicación	56
6.6. Algoritmo de la multiplicación	56
6.7. Comprobando la multiplicación	59
7. La división.....	59
7.1. Un primer contacto con la división	60
7.2. Pasando a papel.....	60
7.3. Formalizando la división	60
7.4. Afirmaciones sobre la división	61
7.5. Algoritmo de la división.....	61
7.6. Comprobando la división	63
7.7. Propiedades de la división	64
CAPÍTULO 4. EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS NATURALES	65
1. Para empezar... ..	66
2. Un poco de historia	67

3. Introducción.....	67
4. Ordenación y representación de números naturales.....	68
5. Jerarquía de operaciones.....	69
6. Divisibilidad	70
6.1. Múltiplos y divisores.....	70
6.2. Criterios de divisibilidad	71
6.3. Números primos y compuestos.....	72
6.4. Descomposición en factores primos.....	72
6.5. Mínimo común múltiplo	72
6.6. Máximo común divisor	73
7. Sugerencias didácticas.....	74
8. Ejercicios para afianzar contenidos	75
CAPÍTULO 5. EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS ENTEROS	79
1. Para empezar... ..	80
2. Un poco de historia	81
3. Introducción.....	81
4. Representación de números enteros. Valor absoluto.	81
5. Ordenación y comparación de números enteros	82
6. Operaciones y propiedades.....	83
6.1. Suma	83
6.2. Resta	84
6.3. Producto	85
6.4. Cociente	86
7. Operaciones combinadas.....	86
8. Sugerencias didácticas.....	87
9. Ejercicios para afianzar contenidos	88
CAPÍTULO 6. EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS RACIONALES. FRACCIONES, DECIMALES Y PORCENTAJES.....	91
1. Para empezar... ..	92
2. Un poco de historia	93
3. Introducción.....	93
4. Fracciones.....	93
4.1. Concepto de fracción.	93
4.2. Fracciones propias e impropias. Números mixtos.	95
4.2.1. Números mixtos.....	95
4.2.2. Algunos casos particulares	96

5. Fracciones equivalentes.....	96
5.1. Criterios de equivalencia.....	96
5.2. Amplificación y simplificación. Fracción irreducible.	97
6. Ordenación y comparación de fracciones.....	97
7. Representación de fracciones	99
8. Operaciones con fracciones	99
8.1. Suma y resta.....	99
8.2. Multiplicación	100
8.3. División	101
9. Expresión decimal de una fracción.....	102
10. Ordenación de números decimales	103
11. Operaciones con números decimales.....	103
11.1. Suma y resta.....	103
11.2. Producto	104
11.3. Cociente	104
12. Fracción generatriz.....	105
13. Fracciones, decimales y porcentajes. Equivalencias	106
13.1. Equivalencia entre porcentajes, fracciones y números decimales	106
13.2. Cálculo de porcentajes.....	106
13.3. Problemas de porcentajes	107
14. Sugerencias didácticas.....	108
15. Ejercicios para afianzar contenidos	109
CAPÍTULO 7. EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES.....	116
1. Para empezar.....	117
2. Un poco de historia.....	118
3. Introducción	118
4. Números irracionales y números reales	118
5. Aproximaciones	119
5.1. Redondeo	119
5.2. Truncamiento.....	119
6. Errores en la aproximación.....	120
6.1. Error absoluto	120
6.2. Error relativo	120
7. Representación de números irracionales.....	121
8. Notación científica	121
9. Sugerencias didácticas.....	122

10. Ejercicios para afianzar contenidos	122
CAPÍTULO 8. POTENCIAS Y RAÍCES CUADRADAS	124
1. Para empezar.....	125
2. Un poco de historia.....	126
3. Introducción	126
4. Potencias de exponente natural. Propiedades.....	126
4.1. Signo de una potencia de exponente natural	129
4.2. Propiedades de las potencias de exponente natural	129
4.3. Casos particulares	131
5. Potencias de exponente entero. Propiedades.....	131
5.1. Propiedades de las potencias de exponente entero	132
6. Raíces cuadradas	132
6.1. Raíz cuadrada exacta y entera de un número.....	132
6.2. Operaciones con raíces cuadradas.....	133
7. Relación entre potencias y raíces cuadradas.....	134
8. Sugerencias didácticas.....	134
9. Ejercicios para afianzar contenidos.....	135
CAPÍTULO 9. PROBABILIDAD	139
1. Para empezar... ..	140
2. Un poco de historia	141
3. Introducción (¿Por qué enseñar probabilidad?)	141
4. Experimentos deterministas y aleatorios.	142
5. Espacio muestral de un experimento aleatorio	142
6. Sucesos. Definición y tipos.....	143
6.1. Suceso elemental y compuesto	143
6.2. Suceso seguro y suceso imposible	143
6.3. Suceso complementario o contrario de un suceso.	143
7. Operaciones con sucesos. Diagramas de Venn.	144
7.1. Unión	144
7.2. Intersección. Sucesos compatibles e incompatibles.....	144
7.3. Diferencia.....	145
8. Propiedades de las operaciones con sucesos	145
9. Distintas concepciones de la probabilidad	146
9.1. Frecuentista. Ley de los grandes números.....	146
9.2. Clásica. Regla de Laplace	146
9.3. Axiomática.	147

10. Propiedades de la probabilidad.	147
11. Probabilidad en experimentos compuestos.	149
11.1. Representación de experimentos compuestos.....	149
11.2. Probabilidad condicionada	151
11.3. Sucesos dependientes e independientes	152
11.4. Sistema completo de sucesos.....	153
11.5. Teorema de la probabilidad total	153
11.6. Teorema de Bayes. Probabilidad a “posteriori”	153
12. Sugerencias didácticas.....	156
13. Ejercicios para afianzar contenidos	157
CAPÍTULO 10. ESTADÍSTICA UNIDIMENSIONAL	164
1. Para empezar... ..	165
2. Un poco de historia	166
3. Introducción a la estadística	168
4. Conceptos básicos. Variables estadísticas	168
5. Muestras estadísticas.....	169
5.1. Necesidad de las muestras.....	169
5.2. Tipos de muestreos	170
6. Frecuencias. Tablas estadísticas.....	171
7. Representaciones gráficas	174
7.1. Diagrama de barras o de bastones	174
7.2. Histograma	174
7.3. Polígono de frecuencias.....	175
7.4. Diagrama de sectores	175
7.5. Otros diagramas	176
8. Cálculo de parámetros	178
8.1. Medidas de centralización o de posición central	178
8.1.1. Media aritmética	178
8.1.2. Moda	179
8.1.3. Mediana.....	181
8.1.4. Cuantiles.....	183
8.2. Medidas de dispersión	185
8.2.1. Rango o recorrido	185
8.2.2. Desviación media	185
8.2.3. Varianza	185
8.2.4. Desviación típica.....	186

8.3. Medidas de forma	187
9. Tendenciosidad	188
10. Sugerencias didácticas.....	189
11. Ejercicios resueltos.....	191
12. Ejercicios para afianzar contenidos	207
SOLUCIONES	210
BIBLIOGRAFÍA	223

CAPÍTULO 1. EL CURRÍCULO DE LOS NÚMEROS Y LA ESTOCÁSTICA EN EDUCACIÓN PRIMARIA

1. Para empezar...
2. Introducción
3. Niveles de concreción curricular
 - 3.1. Legislación estatal
 - 3.2. Legislación autonómica
 - 3.3. Documentos de centro
4. Resolución de problemas
5. Ejemplos de problemas resueltos

1. Para empezar...



2. Introducción

La Didáctica de las Matemáticas trata de conocimientos útiles y aplicables, los cuales, aun necesitando una base teórica sólida, han de estar conectados con la práctica y con la enseñanza de las matemáticas en el sistema educativo. Además, tienen la especificidad derivada de los procesos de comunicación, transmisión y aprendizaje del conocimiento matemático. Las necesidades formativas del maestro de matemáticas pasan por equilibrar su buena formación técnica en matemáticas con una buena formación profesional en educación y en didáctica de la matemática. Para ello, necesita herramientas conceptuales bien construidas y al servicio de la práctica. Una de estas herramientas es el concepto de currículum elaborado desde la educación matemática (Rico, 1998).

Según la RAE, se define el currículum como el “conjunto de estudios y prácticas destinadas a que el alumno desarrolle plenamente sus posibilidades”. En síntesis, el currículum trata de establecer de manera razonada y para cada etapa educativa, qué enseñar y cómo en las distintas áreas de conocimiento. Los elementos que componen el currículum se pueden agrupar en torno a cuatro cuestiones: ¿qué enseñar? ¿cuándo enseñar? ¿cómo enseñar? y ¿qué, cómo, y cuándo evaluar? En un sentido restringido el "currículum" se refiere a las directrices y documentos oficiales dirigidos a un nivel y contenido concreto (Godino, 2003).

De esta manera, se entiende por currículum de matemáticas a toda actividad que organiza y lleva a cabo un plan de formación en matemáticas. Este plan de formación a implementar en el proceso de enseñanza-aprendizaje se desarrolla en diferentes niveles: a nivel estatal, a nivel autonómico, y a nivel de centro y aula, concretándose en cada uno de ellos dicho plan con el fin de conseguir la formación óptima para el alumnado al que va dirigido.

En el presente tema, se tratarán estos diferentes niveles de concreción curricular teniendo en cuenta que en la actualidad se están produciendo cambios legislativos importantes. Por ello, se expondrán las normativas actualmente vigentes con indicación de los cambios que sucederán de manera próxima. Además de esto, con el fin de cumplir con dicha normativa, se detallará uno de los métodos de resolución de problemas más relevantes en la didáctica de las matemáticas: el método de Pólya, con ejemplos claros en los que se ponen de manifiesto su utilidad.

3. Niveles de concreción curricular

3.1. Legislación estatal

La **Constitución Española** de 1978, aprobada por las Cortes Generales el 31 de octubre de 1978, y ratificada por el pueblo español en referéndum de 6 de diciembre de 1978, reconoce en el **artículo 27** el derecho a la educación como derecho fundamental, siendo este el contenido del mismo:

1. Todos tienen el derecho a la educación. Se reconoce la libertad de enseñanza.
2. La educación tendrá por objeto el pleno desarrollo de la personalidad humana en el respeto a los principios democráticos de convivencia y a los derechos y libertades fundamentales.
3. Los poderes públicos garantizan el derecho que asiste a los padres para que sus hijos reciban la formación religiosa y moral que esté de acuerdo con sus propias convicciones.
4. La enseñanza básica es obligatoria y gratuita.

5. Los poderes públicos garantizan el derecho de todos a la educación, mediante una programación general de la enseñanza, con participación efectiva de todos los sectores afectados y la creación de centros docentes.
6. Se reconoce a las personas físicas y jurídicas la libertad de creación de centros docentes, dentro del respeto a los principios constitucionales.
7. Los profesores, los padres y, en su caso, los alumnos intervendrán en el control y gestión de todos los centros sostenidos por la Administración con fondos públicos, en los términos que la ley establezca.
8. Los poderes públicos inspeccionarán y homologarán el sistema educativo para garantizar el cumplimiento de las leyes.
9. Los poderes públicos ayudarán a los centros docentes que reúnan los requisitos que la ley establezca.
10. Se reconoce la autonomía de las Universidades, en los términos que la ley establezca.

Además de la constitución que establece las pautas a seguir más generales, en España han existido distintas **leyes de educación**, habiendo estado en vigor en algún momento las siguientes:

- **LGE** (Ley General de Educación) de 1970 (previa a la constitución).
- **LOGSE** (Ley Orgánica de Ordenación General del Sistema Educativo de España) de 1990.
- **LOE** (Ley Orgánica de Educación) de 2006.
- **LOMCE** (Ley Orgánica para la Mejora de la Calidad Educativa) desde 2013 hasta 2021 (Ley orgánica 8/2013).
- **LOMLOE** (Ley Orgánica por la que se modifica la Ley Orgánica de Educación) desde enero de 2021 hasta la actualidad.

En cada una de las leyes anteriores, se fija el **currículo**, que es la regulación de los elementos que determinan los procesos de enseñanza y aprendizaje para cada una de las enseñanzas.

Para la LOMLOE, el currículo es el conjunto de:

1. Objetivos.
2. Competencias.
3. Contenidos.
4. Métodos pedagógicos.
5. Criterios de evaluación.

Una vez que la ley estatal fija los elementos del currículo y sus características, se realiza un desarrollo de este a nivel nacional a través de reales decretos. En el caso de Educación Primaria, se considera el Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria.

Tras esto, serán las Administraciones Educativas las encargadas de establecer el currículum de cada una de las enseñanzas reguladas por dicha Ley. Posteriormente, los centros docentes serán los que desarrollarán y completarán, en su caso, el currículo haciendo uso de su autonomía pedagógica.

3.2. Legislación autonómica

En la Comunidad Autónoma de Castilla-La Mancha se legisla mediante Órdenes y Decretos que aparecen en el Diario Oficial de Castilla-La Mancha (**DOCM**). Pueden consultarse en la página www.educa.jccm.es

Las órdenes y decretos relacionados con Educación Primaria más importantes, en vigor, son las siguientes:

- **Decreto 8/2022**, de 8 de febrero, por el que se regulan la evaluación y la promoción en la Educación Primaria, así como la evaluación, la promoción y la titulación en la Educación Secundaria Obligatoria, el Bachillerato y la Formación Profesional en la comunidad autónoma de Castilla-La Mancha.
- **Decreto 81/2022**, de 12 de julio, por el que se establece la ordenación y el currículo de Educación Primaria en la comunidad autónoma de Castilla-La Mancha.

En el Decreto 81/2022, se definen los conceptos siguientes:

- a) **Objetivos:** logros que se espera que el alumnado haya alcanzado al finalizar la etapa y cuya consecución está vinculada a la adquisición de las competencias clave.
- b) **Competencias clave:** desempeños que se consideran imprescindibles para que el alumnado pueda progresar, con garantías de éxito, en su itinerario formativo y afrontar los principales retos globales y locales.
- c) **Competencias específicas:** desempeños que el alumnado debe poder desplegar en actividades o en situaciones cuyo abordaje requiere de los saberes básicos de cada área o ámbito. Las competencias específicas constituyen un elemento de conexión entre, por una parte, el Perfil de salida del alumnado, y, por otra, los saberes básicos de las áreas o ámbitos y los criterios de evaluación.
- d) **Criterios de evaluación:** Referentes que indican los niveles de desempeño esperados en el alumnado, en las situaciones o actividades a las que se refieren las competencias específicas de cada área, en un momento determinado de su proceso de aprendizaje.
- e) **Saberes básicos:** Conocimientos, destrezas y actitudes que constituyen los contenidos propios de un área y cuyo aprendizaje es necesario para la adquisición de las competencias específicas.
- f) **Situaciones de aprendizaje:** Situaciones y actividades que implican el despliegue por parte del alumnado de actuaciones, asociadas tanto a las competencias clave, como a las específicas y que contribuyen a la adquisición y desarrollo de las mismas.

Además, en este **Decreto 81/2022** se fija el currículo de todas las asignaturas, y en lo referente al currículo de las Matemáticas en la Educación Primaria, en el Artículo 7 donde se habla de los objetivos de la Educación Primaria, en uno de sus apartados podemos leer lo siguiente:

*g) Desarrollar las **competencias matemáticas básicas** e iniciarse en la **resolución de problemas** que requieran la realización de **operaciones elementales** de cálculo, **conocimientos geométricos** y **estimaciones**, así como ser capaces de **aplicarlo** a las situaciones de su vida cotidiana.*

Para conseguir estos objetivos, se debe tener en cuenta lo que se expone, dentro de la parte específica en el currículo de matemáticas, en dicho decreto. Se especifica que:

Las competencias específicas, que se relacionan entre sí constituyendo un todo interconectado, se organizan en cinco ejes fundamentales: resolución de problemas, razonamiento y prueba, conexiones, comunicación y representación, y destrezas socioafectivas.

La resolución de problemas, que constituye el primero de los ejes mencionados, se debe favorecer no solo como competencia específica del área, sino como método para su aprendizaje. La resolución de problemas es una actividad presente en la vida diaria y a través de la cual se ponen en acción otros ejes del área como el razonamiento y el pensamiento computacional, la representación de objetos matemáticos y el manejo y la comunicación a través del lenguaje matemático.

De manera explícita, en tal decreto se detalla como competencia específica la siguiente:

2. Resolver situaciones problematizadas, aplicando diferentes técnicas, estrategias y formas de razonamiento, para explorar distintas maneras de proceder, obtener soluciones y asegurar su validez desde un punto de vista formal y en relación con el contexto planteado.

Por tanto, la **resolución de problemas** exige la enseñanza de un **procedimiento** que los alumnos deben adquirir y practicar desde los primeros cursos. Los pasos que debe seguir el procedimiento son los siguientes:

- 1. Lectura y comprensión del enunciado del problema*
- 2. Identificación de lo que nos pide*
- 3. Búsqueda de estrategias para la resolución*
- 4. Aplicación de las estrategias*
- 5. Resolución del problema*
- 6. Análisis de las soluciones*

Observación: Todos estos pasos deben ser explicados oralmente o por escrito durante el desarrollo del proceso, utilizando el vocabulario matemático específico adecuado a cada situación.

3.3. Documentos de centro

Teniendo en cuenta las directrices marcadas por la legislación autonómica, en los centros educativos se realiza una concreción más detallada del currículo. De esta manera, existen los siguientes niveles de concreción realizados por sus correspondientes responsables:

- En el colegio: Proyecto educativo y Programación General Anual.
- En el aula: programaciones didácticas y de aula.
- Para el alumno: planes de trabajo individualizado y de refuerzo educativo.

4. Resolución de problemas

Como se ha expuesto anteriormente, el eje fundamental del aprendizaje significativo es la **resolución de problemas**, que no debe considerarse solo como un fin, sino también como un medio para la adquisición y generación de conocimientos, habilidades, estrategias y procedimientos. La resolución de problemas exige la enseñanza de un procedimiento que los alumnos deban adquirir y practicar desde los primeros cursos.

Existen diferentes modelos de resolución de problemas. El proceso que se va a exponer para una correcta resolución de problemas será el **Método de Pólya**, desarrollado por el matemático húngaro George Pólya en su libro *Cómo plantear y resolver problemas* (Pólya, 1945). El método consta de 4 pasos para resolver problemas matemáticos, que son los siguientes:

- Comprender el problema
- Elaborar un plan
- Ejecutar el plan
- Comprobar las soluciones obtenidas

Veamos con detalle cada uno de estos pasos:

1. Comprender el problema

Para poder resolver un problema, primero hay que comprenderlo. Se debe leer con mucho cuidado y explorar hasta entender las relaciones dadas en la información proporcionada. En esta fase es esencial eliminar o traducir aquellos términos que se desconozcan o que encubran el sentido del problema.

Para eso, podemos responder a preguntas como:

- ¿Qué dice el problema? ¿Qué pide?
- ¿Cuáles son los datos y las condiciones del problema?
- ¿Es posible hacer una figura, un esquema o diagrama?
- ¿Es posible estimar la respuesta?

2. Elaborar un plan

Se debe elaborar una **estrategia**, una línea de pensamiento, para resolver el problema. Estas estrategias dependen, entre otros aspectos, de:

1. Conocimientos previos.
2. Relación con otros temas.
3. Similitud con otros problemas.

Algunas de las estrategias más utilizadas son:

- Ensayo y error.
- Razonamiento regresivo.
- Estudio de casos particulares
- Trazar un gráfico o diagrama.
- Descomponer el problema en partes con solución conocida.

En esta fase, podemos responder a preguntas como:

- ¿Recuerdas algún problema parecido a este que pueda ayudarte a resolverlo?
- ¿Puedes enunciar el problema de otro modo? Escoge un lenguaje adecuado y una notación apropiada.
- ¿Utilizaste todos los datos? ¿Has tenido en cuenta todos los conceptos esenciales incluidos en el problema?
- ¿Se puede resolver este problema por partes?
- Intenta organizar los datos en tablas o gráficos
- ¿Hay diferentes caminos para resolver este problema?
- ¿Cuál es el plan para resolver el problema?

3. Ejecutar el plan

Se ejecuta el plan elaborado resolviendo las operaciones, verificando paso a paso si los resultados están correctos. Se aplican también todas las estrategias pensadas, completando

(si se requiere) los diagramas, tablas o gráficos para obtener varias formas de resolver el problema. Si no se tiene éxito se vuelve a empezar.

4. Comprobación de las soluciones obtenidas

En el paso de comprobación se hace el análisis de la solución obtenida, no solo en cuanto a la corrección del resultado sino también en relación con la posibilidad de usar otras estrategias diferentes a la seguida, para llegar a la solución. Se verifica la respuesta en el contexto del problema original. También se puede hacer la generalización del problema o la formulación de otros nuevos a partir de él. Otra opción es el uso del resultado de problema como medio para obtener un dato del enunciado que decidamos "olvidar". Esta última opción equivaldría a resolver el problema inverso y, de ser correctos los pasos dados, debería poder obtenerse el dato del enunciado correcto a partir del resultado del problema.

Algunas preguntas que se pueden responder en este paso son:

- ¿Su respuesta tiene sentido?
- ¿Está de acuerdo con la información del problema?
- ¿Hay otro modo de resolver el problema?
- ¿Se puede utilizar el resultado o el procedimiento que ha empleado para resolver problemas semejantes?
- ¿Se puede generalizar?

Se expone a continuación un ejemplo en el que se muestra cómo se desarrollarían cada una de las fases del método de Polya para su resolución:

Ejemplo 1.1: Antonio tiene un terreno grande que quiere dividir en dos partes. Para ello tiene que construir una pared. El primer día de construcción usó $\frac{3}{8}$ de los ladrillos que tenía; el segundo día usó $\frac{1}{6}$ de los ladrillos que tenía al principio. Entonces contó los ladrillos que le quedaban y eran 55. ¿Cuántos ladrillos tenía cuando comenzó a construir la pared?

Resolución:

1. Comprender el problema

- ¿Qué pide el problema?
 - La cantidad de ladrillos que tenía al comenzar a construir el muro.
- ¿Cuáles son los datos y las condiciones del problema?
 - Antonio tiene cierta cantidad de ladrillos.
 - El primer día utiliza $\frac{3}{8}$ de esa cantidad.
 - El segundo día utiliza $\frac{1}{6}$ de esa cantidad.
 - Le quedan 55 ladrillos para el tercer día.

2. Elaborar un plan

Para este problema vamos a plantear tres planes diferentes.

PLAN A

Estrategia: Hacer un gráfico

- Primer día: “El primer día de construcción usó $\frac{3}{8}$ de los ladrillos que tenía”

- Segundo día: “el segundo día usó $\frac{1}{6}$ de los ladrillos que tenía al principio”

- Tercer día: “contó los ladrillos que le quedaban y eran 55”

Son 22 los rectángulos correspondientes a 55 ladrillos, por lo que, mediante una regla de tres se obtendría el resultado buscado.

PLAN B

Estrategia: Hacer un esquema



Observa que la suma de las fracciones que representan al número de ladrillos utilizando cada día es igual a la unidad, la cual representa la cantidad total de ladrillos que tenía para trabajar los 3 días.

Hallamos la fracción que representa a los ladrillos que se utilizan el primer y segundo día, mediante suma de fracciones.

Luego hallamos la fracción que representa a los ladrillos que se utilizan el tercer día, restando a la unidad la fracción anterior. Finalmente, **reducimos a la unidad** y hacemos el cálculo.

PLAN C

Estrategia: Utilizar una ecuación

- Número total de ladrillos: x
- Ladrillos utilizados el primer día: $\frac{3}{8}x$
- Ladrillos utilizados el segundo día: $\frac{1}{6}x$
- Ladrillos utilizados el tercer día: 55

El total de ladrillos es igual a la suma de los utilizados cada día:

$$\frac{3}{8}x + \frac{1}{6}x + 55 = x$$

3. Ejecutar el plan

PLAN A

Si 55 ladrillos se corresponden con 22 porciones:

$$\left. \begin{array}{rcl} \text{LADRILLOS} & & \text{PORCIONES} \\ 55 & - & 22 \\ x & - & 48 \end{array} \right\} x = \frac{48 \cdot 55}{22} = 120 \text{ ladrillos}$$

RESPUESTA: Antonio tenía 120 ladrillos cuando comenzó a construir el muro.

PLAN B

Fracción que representa la cantidad de ladrillos utilizados el primer y segundo día:

$$\frac{3}{8} + \frac{1}{6} = \frac{13}{24}$$

Fracción que representa la cantidad de ladrillos utilizados el tercer día:

$$1 - \frac{13}{24} = \frac{11}{24}$$

Como el número de ladrillos que quedaron para el tercer día fueron 55, se puede afirmar que $11/24$ equivalen a 55. Por lo tanto: $1/24$ equivale a 5.

Finalmente, como $1 = 24/24$, $24/24$ equivalen a $24 \times 5 = 120$ ladrillos.

RESPUESTA: Antonio tenía 120 ladrillos cuando comenzó a construir el muro.

PLAN C

Resolviendo la ecuación que hallamos en el paso anterior:

$$\frac{3}{8}x + \frac{1}{6}x + 55 = x \Rightarrow \dots \Rightarrow x = 120$$

RESPUESTA: Antonio tenía 120 ladrillos cuando comenzó a construir el muro.

4. Comprobación de las soluciones obtenidas

- Cantidad de ladrillos utilizados el primer día:

$$\frac{3}{8} \text{ de } 120 = \frac{3}{8} \cdot 120 = \frac{360}{8} = 45$$

- Cantidad de ladrillos utilizados el segundo día:

$$\frac{1}{6} \text{ de } 120 = \frac{1}{6} \cdot 120 = \frac{120}{6} = 20$$

- Cantidad de ladrillos utilizados el tercer día: 55
- Sumando la cantidad de ladrillos de los tres días:

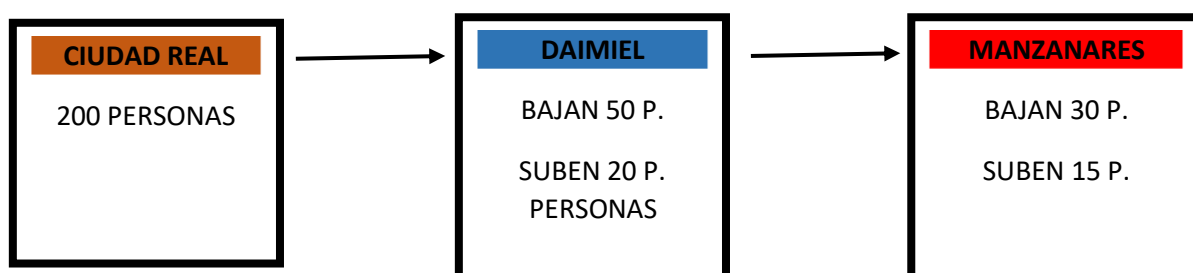
$$45 + 20 + 55 = 120 \checkmark$$

5. Ejemplos de problemas resueltos

Ejemplo 1.2. En un tren que parte de Ciudad Real había 200 personas. Al llegar a Daimiel, se bajaron 50 y subieron al tren 20. Cuando llegó a Manzanares, bajaron 30 y subieron 15. ¿Cuántas personas iban subidas en el tren al salir de la estación de Manzanares?

1. Comprender el problema

Se pide averiguar el número final de personas que hay en el tren en Manzanares tras varias bajadas y subidas. Los datos del problema pueden visualizarse en un diagrama como en el siguiente:



2. Elaborar un plan

Se puede aplicar la estrategia de sumar (a las 200 personas de Ciudad Real) las personas que suben y restar las que bajan en las dos estaciones siguientes.

3. Ejecutar el plan

Aplicando el plan anterior:

$$200 - 50 + 20 - 30 + 15 = \mathbf{155 \text{ personas}}$$