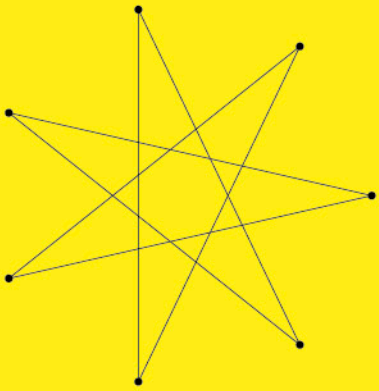
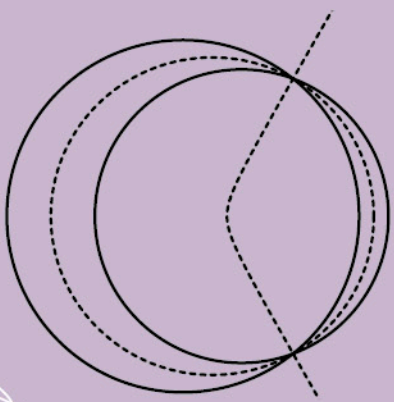


TERMINALE
SPÉCIALITÉ

# LES MATHS EN PROFONDEUR

Fabien Besnard

- Cours développé
- Démonstrations
- Questions d'élèves
- Exercices corrigés



ellipses

TERMINALE
SPÉCIALITÉ

# LES MATHS EN PROFONDEUR

Fabien Besnard

Professeur agrégé, docteur en mathématiques,
enseignant en école d'ingénieurs

ellipses

**Du même auteur, chez le même éditeur**

*Les Maths en profondeur - Seconde*, 256 pages, 2024.
*Les Maths en profondeur - Spé 1re*, 324 pages, 2025.

**Conception graphique couverture :** Nathalie FOULLOY

ISBN 9782340-120600
Dépôt légal : septembre 2026
©Ellipses Édition Marketing S.A.
8/10 rue la Quintinie 75015 Paris




Le Code de la propriété intellectuelle et artistique n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article L. 122-5, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite » (alinéa 1er de l'article L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

# Avant-propos

La rédaction des livres de la collection *Les maths en profondeur* est née d'une volonté simple : mettre à la disposition des élèves d'aujourd'hui des cours d'une rigueur et d'une précision comparables à ceux dont le lycéen que j'étais à la fin des années 1980 a eu la chance de bénéficier. J'espère avoir été un tant soit peu à la hauteur de cette très haute ambition !
S'il était impossible de simplement adapter un des meilleurs ouvrages de l'époque, tant les contextes sont différents, il était en revanche essentiel d'en conserver l'esprit et les principes, à savoir :

1. former à la rigueur,
2. nourrir l'intuition,
3. apprivoiser l'abstraction.

La branche des mathématiques dans laquelle ces trois principes s'articulent avec le plus de bonheur a toujours été, et je crois demeurera toujours, la géométrie. Elle a pourtant été, avec une constance remarquable, la victime principale des différentes réformes ayant affecté le lycée ces dernières décennies. Après tout, l'affaire est-elle si grave ? Je le crois, car j'ai enseigné assez d'années en cycle licence pour constater les dégâts. Je donnerai seulement deux exemples.
L'algèbre linéaire est, quelle que soit la voie choisie (classe prépa, prépa intégrée, université, ...), le cœur du programme de mathématiques des deux premières années post-bac. Or, sans une formation préalable un peu consistante en géométrie vectorielle, les concepts de bases de l'algèbre linéaire risquent de rester abstraits et désincarnés. Sans avoir jamais abordé, ou si peu, les transformations du plan et de l'espace, les étudiants sont jetés sans ménagement au milieu des endomorphismes d'espaces vectoriels... Et que dire de la transition entre géométrie affine et vectorielle qui n'est, le plus souvent, même pas évoquée ? Un peu comme si on changeait les règles d'un jeu au milieu de la partie... sans même prévenir les joueurs !
Le deuxième exemple concerne la vénérable théorie des coniques. On l'a sans doute trouvée trop poussiéreuse et sacrifiée sans remords. Les conséquences du crime se font sentir deux ans plus tard, lorsqu'il faut parler de formes quadratiques et expliquer l'aspect local des surfaces de niveau à des élèves qui ne savent pas [1] ce qu'est une conique... Et je ne parlerai même pas de la physique : on a sûrement jugé en haut lieu que les enseignants de cette discipline pouvaient bien se débrouiller

1. À l'exception notable des élèves de la voie PT.

avec ces fichues planètes qui persistent à tourner sur des ellipses dont le Soleil est l'un des foyers...

Dans ce livre, comme dans ses prédécesseurs de seconde et de première, j'ai voulu redonner à la géométrie la place qu'elle mérite. Il comporte donc de nombreux « compléments » qui auraient pu lui valoir le titre « À la recherche de la géométrie perdue » :

— les barycentres,
— les courbes paramétrées,
— les coniques,
— les produits vectoriels et mixtes.

Le livre de maths expertes complète cette liste avec les transformations du plan et de l'espace, et une initiation à la géométrie sphérique et aux polyèdres. Ensemble, ils forment l'aboutissement de la démarche entamée dès le livre de seconde.

La collection forme ainsi un tout cohérent, avec la géométrie en son centre. Elle s'écarte donc, parfois assez nettement, de la progression habituelle. Par exemple, pour ne pas surcharger le livre de terminale qui devait contenir de nombreux compléments géométriques, j'ai inclus la continuité des fonctions dans le livre de première. Cependant, les lecteurs qui n'auraient pas lu les premiers ouvrages ne doivent pas s'alarmer outre mesure : d'une part j'ai fait en sorte que les deux livres de terminale puissent être utilisés indépendamment, en ajoutant les rappels nécessaires ; d'autre part, il faut insister sur un point : ce livre ne se substitue pas au cours dispensé en classe, mais le complète ! Ainsi, les quelques notions anticipées dans le livre de première seront de toute façon abordées par les lecteurs avec leurs enseignants. On voit que si la lecture préalable des livres de seconde et première constitue indéniablement un atout, elle n'est nullement indispensable.

À l'inverse, les probabilités n'étaient pas présentes dans les livres de seconde et première, et j'ai longuement hésité à les inclure dans celui-ci. En effet, je ne voyais pas quoi ajouter de pertinent aux programmes actuels, qui sont déjà fort touffus dans cette partie des mathématiques [2]. Cependant, dans le contexte actuel, il m'a semblé qu'un ouvrage de terminale ne pouvait décemment faire l'impasse sur ce domaine. J'ai donc inclus un chapitre qui les traite de la façon la plus rigoureuse possible en restant dans le cadre d'un univers fini. Si je n'ai pas (ou à peine) dépassé le programme officiel de terminale, j'ai davantage insisté sur les fondements et l'interprétation de la théorie.

Un cours de mathématiques n'est utile que s'il est accompagné d'une sélection pertinente d'exercices. Ce livre en propose deux types. Les premiers émaillent le cours et doivent être cherchés au moment même où ils sont rencontrés : ce sont souvent des exercices simples, qui permettent d'assimiler progressivement les notions venant juste d'être introduites. Ils sont corrigés à la fin de chaque section. Les autres sont regroupés dans le chapitre 4. Certains sont des applications directes du cours, d'autres le prolongent, d'autres encore sont choisis pour leur caractère classique ou leur importance théorique, voire simplement pour leur élégance. Ils peuvent être difficiles. Tous sont corrigés, au moins partiellement.

2. C'est d'ailleurs une des raisons de l'abandon de l'essentiel de la géométrie. Le problème est que, si la géométrie irrigue presque toutes les branches des mathématiques modernes, je ne crois pas qu'on puisse honnêtement en dire autant des probabilités, pour respectables, importantes et utiles qu'elles soient.

On ne trouvera, en revanche, que peu d'exercices « type bac ». Ceux-ci sont certainement nécessaires, mais je fais confiance à vos enseignants pour vous en fournir une quantité suffisante : on l'aura compris, ce livre vise avant tout à préparer aux études supérieures. Si vous en maîtrisez le contenu, qui déborde largement sur le premier semestre de la licence, vous partirez du bon pied l'année prochaine !

# Table des matières

**Introduction** **ix**

**1 Analyse** **1**
1.1 Relations d'ordre (*) . . . 1
1.1.1 Corrigés des exercices de cours . . . 4
1.2 Continuité . . . 6
1.2.1 Rappels . . . 6
1.2.2 Théorème des valeurs intermédiaires et applications . . . 6
1.2.3 Théorème de la bijection . . . 10
1.2.4 Fonctions continues sur un segment (*) . . . 11
1.2.5 Discontinuités des fonctions monotones (*) . . . 12
1.2.6 Continuité de la réciproque (*) . . . 13
1.2.7 Itération d'une fonction continue (*) . . . 14
1.2.8 Corrigés des exercices de cours . . . 17
1.3 Compléments sur la dérivation . . . 18
1.3.1 Dérivée de la réciproque d'une bijection . . . 18
1.3.2 Théorème des accroissements finis (*) . . . 20
1.3.3 Corrigés des exercices de cours . . . 22
1.4 Calcul intégral . . . 23
1.4.1 Primitives . . . 23
1.4.2 Intégrale d'une fonction continue positive . . . 24
1.4.3 Intégrale d'une fonction continue . . . 28
1.4.4 Inégalité triangulaire pour les intégrales . . . 29
1.4.5 Moyenne d'une fonction . . . 30
1.4.6 Techniques d'intégration . . . 31
1.4.7 Corrigés des exercices de cours . . . 34
1.5 Nouvelles fonctions usuelles . . . 36
1.5.1 Fonctions trigonométriques réciproques . . . 36
1.5.2 Logarithme népérien . . . 41
1.5.3 Exponentielle . . . 45
1.5.4 Exponentielle de base $a$ . . . 48
1.5.5 Fonctions trigonométriques hyperboliques (*) . . . 49
1.5.6 Logarithme de base $a$ . . . 51

1.5.7 Fonctions puissances . . . . . 52
1.5.8 Corrigés des exercices de cours . . . . . 52
1.6 Compléments sur les limites . . . . . 55
1.6.1 Négligeabilité . . . . . 55
1.6.2 Croissances comparées des fonctions usuelles . . . . . 56
1.6.3 Règle de L'Hôpital (*) . . . . . 57
1.6.4 Corrigés des exercices de cours . . . . . 59
1.7 Équations différentielles . . . . . 60
1.7.1 Généralités . . . . . 60
1.7.2 Équations du premier ordre . . . . . 62
1.7.3 Équations du second ordre (♯) . . . . . 65
1.7.4 Corrigés des exercices de cours . . . . . 68
1.8 Fonctions convexes . . . . . 70
1.8.1 Définition et propriétés générales (*) . . . . . 70
1.8.2 Convexité et optimisation (*) . . . . . 73
1.8.3 Convexité et taux d'accroissement (*) . . . . . 75
1.8.4 Convexité et dérivées . . . . . 76
1.8.5 Point d'inflexion . . . . . 78
1.8.6 Corrigés des exercices de cours . . . . . 79

**2 Algèbre et géométrie** **81**
2.1 Déterminants et systèmes (*) . . . . . 81
2.1.1 Déterminants $2 \times 2$ . . . . . 81
2.1.2 Déterminants $3 \times 3$ . . . . . 83
2.1.3 Corrigé des exercices de cours . . . . . 86
2.2 Barycentres (*) . . . . . 90
2.2.1 Cas de deux points pondérés . . . . . 90
2.2.2 Barycentre d'une famille de points pondérés du plan . . . . 93
2.2.3 Associativité du barycentre . . . . . 96
2.2.4 Ensembles convexes . . . . . 99
2.2.5 Corrigés des exercices de cours . . . . . 101
2.3 Courbes paramétrées (*) . . . . . 103
2.3.1 Introduction . . . . . 103
2.3.2 Cas des droites . . . . . 103
2.3.3 Cas général . . . . . 104
2.3.4 Vecteur vitesse et tangente . . . . . 105
2.3.5 Symétries et périodicités d'une courbe paramétrée . . . . . 107
2.3.6 Longueur d'une courbe (*) . . . . . 109
2.4 Coniques (*) . . . . . 111
2.4.1 Définitions et équations . . . . . 111
2.4.2 Les ellipses . . . . . 112
2.4.3 Les hyperboles . . . . . 119
2.4.4 Les paraboles . . . . . 122
2.4.5 Corrigés des exercices de cours . . . . . 124
2.5 Produit vectoriel, produit mixte (*) . . . . . 126
2.5.1 Généralités . . . . . 126
2.5.2 Orientations de l'espace. . . . . 127

2.5.3 Définition et premières propriétés du produit vectoriel . . . 129
2.5.4 Produit mixte . . . 131
2.5.5 Produit vectoriel : linéarité et expression en BOND . . . 135
2.5.6 Applications des produits vectoriels et mixtes . . . 137
2.5.7 Résolutions des systèmes $3 \times 3$ . . . 139
2.5.8 Corrigé des exercices de cours . . . 141
2.6 Surfaces et solides . . . 144
2.6.1 Plans : équations et paramétrages . . . 144
2.6.2 Sphères . . . 145
2.6.3 Cylindres (*) . . . 148
2.6.4 Cônes (*) . . . 150
2.6.5 Aires et volumes (♯) . . . 152
2.6.6 Aire et volume de la sphère (♯) . . . 161
2.6.7 Corrigé des exercices de cours . . . 165

**3 Dénombrements et probabilités 167**
3.1 Dénombrements . . . 167
3.2 Probabilités finies . . . 170
3.2.1 Introduction . . . 170
3.2.2 Loi de probabilité sur un ensemble fini . . . 171
3.2.3 Conditionnement . . . 176
3.2.4 Indépendance . . . 182
3.2.5 Variables aléatoires . . . 184
3.2.6 Espérance, variance, écart-type . . . 186
3.2.7 Variables aléatoires indépendantes . . . 189
3.2.8 Loi de Bernoulli et loi binomiale . . . 191
3.2.9 Convergence des moyennes . . . 193
3.2.10 Corrigés des exercices de cours . . . 196

**4 Exercices supplémentaires 199**
4.1 Exercices sur le chapitre 1 . . . 199
4.1.1 Continuité . . . 199
4.1.2 Dérivation . . . 205
4.1.3 Calcul intégral . . . 207
4.1.4 Fonctions trigonométriques réciproques . . . 211
4.1.5 Logarithmes . . . 212
4.1.6 Exponentielles et puissances . . . 216
4.1.7 Compléments sur les limites . . . 220
4.1.8 Équations différentielles . . . 222
4.1.9 Fonctions convexes . . . 224
4.2 Exercices sur le chapitre 2 . . . 226
4.2.1 Barycentres et ensembles convexes . . . 226
4.2.2 Déterminants et systèmes . . . 229
4.2.3 Courbes paramétrées . . . 232
4.2.4 Coniques . . . 235
4.2.5 Produits vectoriels et mixtes . . . 240
4.2.6 Solides et surfaces . . . 244

4.3 Exercices sur le chapitre 3 . . . . . 247
4.3.1 Dénombrements . . . . . 247
4.3.2 Probabilités . . . . . 249

**5 Correction des exercices** **257**
5.1 Corrigés des exercices sur le chapitre 1 . . . . . 257
5.2 Corrigés des exercices sur le chapitre 2 . . . . . 295
5.3 Corrigés des exercices sur le chapitre 3 . . . . . 327

**A Formulaire de dérivation** **346**

# Introduction

Ce que vous tenez entre les mains *n'est pas* un manuel scolaire, mais un *cours* de mathématiques, destiné aux meilleurs élèves de niveau terminale. Il fait suite à un cours de seconde [3] et un cours de première [4] écrits dans le même esprit, dont la lecture préalable n'est pas indispensable, mais fortement recommandée.
Vous verrez apparaître régulièrement des références au livre de seconde, de première et de maths expertes [5] : elles sont précédées d'un chiffre romain : I pour le livre de seconde, II pour le livre de première, et IV pour le livre de maths expertes. Ainsi le théorème I-3.1.1 est le premier théorème de la section 1 du chapitre 3 du livre de seconde.
Ce cours est dispensé par un professeur (moi), pensé pour un élève seul (vous). À vrai dire, vous ne serez pas tout-à-fait seul. Comme vous ne pouvez pas me poser de question, deux autres élèves, que vous connaissez déjà si vous avez lu les autres livres, s'en chargeront : Natacha,

 Bonjour !

et Martin [6].

 Salut !

Ces deux personnages rendront, je l'espère, l'exposé plus vivant. Ils me permettront d'introduire des questions que les lecteurs pourraient se poser, restituant ainsi, en partie, *la dimension orale* sans laquelle un cours de mathématiques tombe immanquablement dans l'aridité. C'est aussi par leur biais que j'essaierai de rendre justice à la *dimension culturelle* des mathématiques, qui me semble si importante.
Il n'en demeure pas moins que ce livre demandera de votre part des efforts considérables, autant le dire d'emblée. Voici quelques conseils pour vous aider à bien l'utiliser.

 Il ne faut pas lire ce livre, il faut le travailler.

3. Les maths en profondeur, 2$^{\text{de}}$, Ellipses (2024).
4. Les maths en profondeur, 1$^{\text{ere}}$, Ellipses (2025).
5. Les maths en profondeur, Terminale : maths expertes, Ellipses (2026).
6. Hommage à Martin Vogel, auteur de l'extension LaTeX *marvosym* que j'utilise pour faire apparaître ces visages.

Ne le lisez pas au lit ou sur la plage, mais assis à un bureau avec un stylo à la main. En lisant, imaginez qu'un professeur vous parle, et dès que vous lisez le mot « exercice », qu'il vous demande de faire cet exercice. Ne passez pas à la suite sans l'avoir fait ! Si vous séchez — et il faut avoir essayé au moins 15 minutes avant de renoncer —, ne vous inquiétez pas : tous les exercices de cours sont corrigés. Quand vous aurez fini un chapitre, ne passez pas au suivant sans avoir traité plusieurs des exercices supplémentaires. Ils sont regroupés au chapitre 4, et sont généralement plus longs. Certains peuvent être difficiles. Ils sont signalés par une ou plusieurs ☕. C'est uniquement en les cherchant que vous progresserez et comprendrez en profondeur les concepts du cours. Certains exercices s'enchaînent : ils permettent de s'entraîner aux problèmes longs. Le symbole [⇝] indique les dépendances.



N'allez pas trop vite !

Si un chapitre vous semble plus facile, ne cédez pas à la tentation d'accélérer. Avez-vous bien compris tous les détails ? Êtes-vous capable de traiter tous les exercices supplémentaires ? Une connaissance approfondie de ce chapitre sera nécessaire dans la suite, alors assurez-vous de ne pas être passé à côté de quelque chose. Au contraire, si un chapitre vous semble trop ardu, ne cédez pas non plus à la tentation de le laisser de côté pour plus tard. Prenez votre temps, faites-vous aider si possible.



Respectez (ou pas) l'ordre des chapitres !

Les chapitres de ce livre suivent un ordre thématique, afin de faciliter son utilisation comme référence. Il peut être un peu fastidieux de passer trop de temps sur un même domaine. Pour construire votre propre parcours, vous pouvez utiliser la figure 1 qui explicite les dépendances entre les différentes sections.
Voici par exemple une proposition de parcours mêlant les sujets traités dans le livre de spé maths et de maths expertes :

- Analyse : sections III.1.1 à III.1.6
- Nombres complexes : sections IV.1.1 à IV.1.4
- Géométrie : sections III.2.1 à III.2.4
- Matrices et graphes : sections IV.2.1 et IV.2.2
- Dénombrements et probabilités : sections III.3.1 et III.3.2
- Chaînes de Markov : section IV.2.3
- Analyse : sections III.1.7 et III.1.8
- Arithmétique : sections IV.3.1 à IV.3.3
- Groupes : sections IV.4.1 et IV.4.2
- Géométrie dans l'espace : section III.2.5, III.2.6, puis IV.5.1 à IV.5.3



Ayez des objectifs réalistes et tenez-les !

Combien de temps pensez-vous pouvoir consacrer à ce livre par semaine ? Ne soyez pas trop ambitieux : mieux vaut se fixer un objectif de 2 heures et le tenir, ou le dépasser, que de vous croire capable d'y passer 8 heures si ce n'est pas le cas. Si vous ne tenez pas vos objectifs vous vous découragerez.

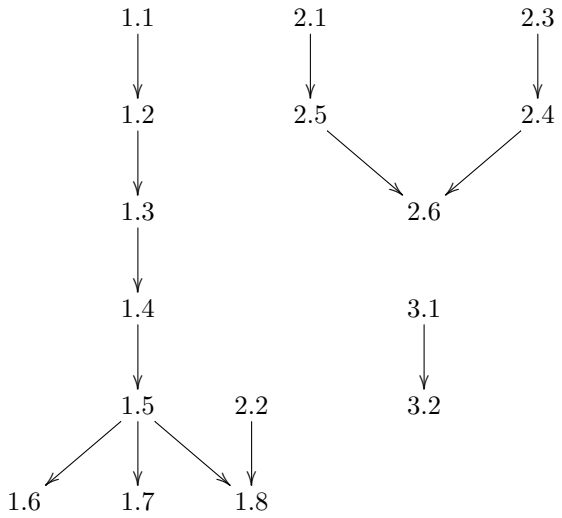



FIGURE 1 – Graphe de dépendance des sections.

 Ne restez pas seul !

On voit que ce livre demande de s'astreindre à une discipline rigoureuse sur une durée de plusieurs mois. Si personne ne vous épaule, il est probable que vous vous découragiez en cours de route. Peut-être pouvez-vous vous entraider avec une connaissance ? Vos parents peuvent également vérifier que vous progressez et tenez vos objectifs. Enfin, n'hésitez pas à consulter la page web dédiée à ce livre. Vous pourrez y discuter avec d'autres lecteurs, ainsi qu'avec l'auteur, accéder à des compléments, des corrigés plus détaillés, des vidéos, des cours en petits groupes, etc.
Pour cela, il vous suffit de d'entrer

fabienbesnard.fr/les-maths-en-profondeur

dans votre navigateur.

 Scindez vos séances de travail !

Il est beaucoup plus profitable de travailler trois fois une heure qu'une fois trois heures. Scindez vos séances et répartissez-les le plus uniformément possible sur une semaine. Ne restez pas plus de deux jours sans ouvrir le livre !

 Autorisez-vous des retours en arrière.

Ne cherchez pas à faire tous les exercices supplémentaires d'un chapitre. Vous reviendrez dessus par la suite et constaterez vos progrès, tout en réactivant vos souvenirs. N'hésitez pas à relire des chapitres déjà traités, vous remarquerez sûrement

des détails qui vous avaient échappé. Je conseille au minimum une seconde lecture (qui sera beaucoup plus rapide que la première) de la totalité du livre. Celle-ci pourra être particulièrement bénéfique en début de première année d'études supérieures.

Un dernier mot sur la signalétique avant de vous souhaiter bon courage :

- (*) indique un complément par rapport au programme de terminale, dont la lecture est considérée comme indispensable,
- (♯) indique un complément moins critique, dont la lecture peut être remise à plus tard,
- ☞ insiste sur un point particulièrement important,
- ☛ est suivi d'un rappel important,
-  signale un passage dangereux ou un piège.

Enfin, les passages un peu difficiles qui peuvent être omis en première lecture sont écrits en petits caractères.

Bon courage !

# Chapitre 1

# Analyse

## 1.1 Relations d'ordre (*)

En première, nous avons introduit les relations d'équivalence (section II-1.7), dont nous avons vu de nombreux exemples. Il existe un autre type de relation important : les relations d'ordre.



Pouvez-vous rappeler ce qu'est une « relation » ?

On peut voir une relation $R$ sur un ensemble $E$ comme une assertion $R(x, x')$ qui dépend de deux variables appartenant à $E$. Si elle est vraie pour $x$ et $x'$, on note $xRx'$. Par exemple, $\leq$ est une relation sur $\mathbb{R}$, et on peut noter $2 \leq 3$. C'est un exemple de relation d'ordre, dont la définition générale est la suivante :

**Définition 1.1.1** *Soit $E$ un ensemble et $\preceq$ une relation sur $E$. On dit que $\preceq$ est une* relation d'ordre *ssi :*

1. $\forall x \in E,\ x \preceq x$,
2. $\forall x, y \in E,\ (x \preceq y \text{ et } y \preceq x) \Rightarrow x = y$,
3. $\forall x, y, z \in E,\ (x \preceq y \text{ et } y \preceq z) \Rightarrow x \preceq z$.

Les propriétés 1, 2 et 3 s'appellent, dans l'ordre, *réflexivité*, *antisymétrie* et *transitivité*. Une relation d'ordre est donc une relation réflexive, antisymétrique et transitive. Nous connaissons déjà plusieurs relations d'ordre.

**Exemple 1.1.1** La relation $\leq$ sur $\mathbb{R}$ définie par $x \leq y$ ssi $y - x \in \mathbb{R}_+$ est une relation d'ordre, appelée *ordre naturel* sur $\mathbb{R}$.

**Exemple 1.1.2** La relation de divisibilité $|$ sur $\mathbb{N}$ est une relation d'ordre. En effet, tout nombre entier se divise lui-même. C'est donc une relation réflexive. Il est facile de voir que c'est aussi une relation antisymétrique, et nous savons bien (théorème I-3.1.2) qu'elle est transitive.

**Exemple 1.1.3** Soit $X$ un ensemble et $E = \mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties de $X$. Alors la relation d'inclusion $\subset$ est une relation d'ordre sur $E$.



La relation $\geq$ sur $\mathbb{R}$ n'est-elle pas aussi une relation d'ordre ?

Si, et d'ailleurs, si $\preceq$ est une relation d'ordre, il existe toujours une relation dite « opposée », définie par $x \succeq y$ ssi $y \preceq x$.
L'ordre naturel sur $\mathbb{R}$ possède une propriété très forte : il s'agit d'une relation d'ordre *totale*, ce qui signifie que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $x \leq y$ ou $y \leq x$. Une relation d'ordre qui n'est pas totale est dite *partielle*. La relation de divisibilité sur $\mathbb{N}$ est une relation d'ordre partielle. En effet, les entiers 2 et 3 ne sont pas comparables pour la relation $|$.

**Exercice 1.1.1** La relation $\subset$ sur $\mathcal{P}(X)$ (voir exemple 1.1.3) est-elle partielle ou totale ?

Les définitions suivantes sont très importantes, en particulier en analyse.

**Définition 1.1.2** *Soit $E$ un ensemble, $\preceq$ une relation d'ordre sur $E$, et $X$ un sous-ensemble de $E$.*

1. *On appelle* majorant *de $X$ tout élément $a \in E$ tel que $\forall x \in X$, $x \preceq a$.*
2. *On appelle* minorant *de $X$ tout élément $a \in E$ tel que $\forall x \in X$, $a \preceq x$.*
3. *Si $M \in X$ et si $M$ est un majorant de $X$, alors $M$ s'appelle le* maximum*, ou le plus grand élément de $X$, et se note* $\max(X)$.
4. *Si $m \in X$ et si $m$ est un minorant de $X$, alors $m$ s'appelle le* minimum*, ou le plus petit élément de $X$, et se note* $\min(X)$.
5. *Si l'ensemble des majorants de $X$ admet un plus petit élément, on l'appelle* la borne supérieure *de $X$, et on le note* $\sup(X)$.
6. *Si l'ensemble des minorants de $X$ admet un plus grand élément, on l'appelle* la borne inférieure *de $X$ et on le note* $\inf(X)$.

Il est bien justifié de dire « le » maximum ou « le » minimum, car ils sont uniques lorsqu'ils existent. Lorsque le max existe, le sup aussi et ils sont égaux. De même, si le min existe, l'inf aussi et ils sont égaux. Nous laissons le lecteur démontrer ces faits en exercice.

**Exercice 1.1.2** Démontrer ces faits.

Il ne faut pas confondre les différentes notions de la définition 1.1.2 : elles sont toutes distinctes. En effet, si $X = ]0;1[$, et $E = \mathbb{R}$ muni de l'ordre naturel $\leq$, on peut dire que :

1. le nombre $-2$ est un minorant, et 3 est un majorant de $X$, mais ils ne sont ni le max, ni le min, ni l'inf, ni le sup de $X$,
2. l'ensemble $X$ n'a d'ailleurs pas de max ni de min,
3. son inf est 0 et son sup est 1.

L'ordre naturel sur $\mathbb{N}$ et sur $\mathbb{R}$ possède des propriétés importantes, que nous admettrons car elles relèvent de la construction, que nous n'avons pas détaillée, de ces deux ensembles [1].

1. Nous avons déjà signalé la première au théorème I-3.4.3.

**Théorème 1.1.1** *Les assertions suivantes sont vraies pour l'ordre naturel* $\leq$.

1. *Toute partie non vide de* $\mathbb{N}$ *admet un minimum.*
2. *Toute partie non vide et majorée de* $\mathbb{R}$ *admet une borne supérieure.*
3. *Toute partie non vide et minorée de* $\mathbb{R}$ *admet une borne inférieure.*

Ces propriétés sont très particulières à la relation $\leq$ et aux ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$. Par exemple, la première devient fausse si l'on remplace l'ordre naturel par la relation $|$. En effet, le sous-ensemble $\{3;4\}$ n'admet pas de plus petit élément pour cette relation, les deux éléments de l'ensemble n'étant pas comparables. La deuxième propriété devient fausse si l'on conserve l'ordre naturel, mais qu'on remplace l'ensemble $\mathbb{R}$ par l'ensemble $\mathbb{Q}$ (voir l'exercice ci-dessous).

**Exercice 1.1.3** Soit $(u_n)$ une suite croissante de rationnels qui converge vers $\sqrt{2}$. Montrer que l'ensemble des termes de cette suite, considéré comme un sous-ensemble de $\mathbb{Q}$, n'admet pas de borne supérieure.

**Remarque 1.1.1** En analyse, il est utile d'ajouter à l'ensemble $\mathbb{R}$ deux symboles, $+\infty$ et $-\infty$, et d'étendre la relation d'ordre naturel de la façon suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, -\infty \leq x \leq +\infty \tag{1.1}$$

L'ensemble $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, qu'on note parfois $\bar{\mathbb{R}}$, et qu'on appelle *droite réelle achevée*, possède alors un plus petit et un plus grand élément. Si $X$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$, elle admet alors toujours un sup et un inf dans $\bar{\mathbb{R}}$, éventuellement égaux à $\pm\infty$.

**Exercice 1.1.4** Déterminer une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\{u_n | n \in \mathbb{N}\}$ n'ait ni minimum ni maximum dans $\mathbb{R}$.

**Exercice 1.1.5** Soit $\mathbb{N}$ muni de la relation d'ordre $|$ et soient $a, b \in \mathbb{N}$. Que valent $\sup\{a;b\}$ et $\inf\{a;b\}$ ? Ce sup et cet inf sont-ils (respectivement) un max et un min ?

Les notions de bornes inférieures, supérieures, de maximum et de minimum, ont aussi un sens pour les fonctions : elles se rapportent simplement à l'ensemble des images de la fonction.

**Définition 1.1.3** *Soit* $X$ *un ensemble et* $f : X \to \mathbb{R}$ *une application. Le sup de* $f$ *sur* $X$*, que l'on peut noter* $\sup_X f$ *ou* $\sup_{x\in X} f(x)$ *est défini de la manière suivante :*

$$\sup_{x\in X} f(x) \stackrel{déf}{=} \sup f(X) \tag{1.2}$$

*C'est un élément de* $\bar{\mathbb{R}}$*. Si* $f$ *est majorée, c'est un élément de* $\mathbb{R}$*. On définit de même* $\inf_{x\in X} f(x)$*, qui est un élément de* $\mathbb{R}$ *lorsque* $f$ *est minorée, ainsi que* $\max_{x\in X} f(x)$ *et* $\min_{x\in X} f(x)$*, lorsqu'ils existent.*

**Exercice 1.1.6** Trouver une fonction continue, majorée et minorée sur $X = ]0;1[$ et qui n'a ni max ni min. Trouver le sup et l'inf de la fonction.

Terminons ce paragraphe par un résultat bien utile en pratique.

**Théorème 1.1.2** *Soit $X$ une partie non vide de $\mathbb{R}$ et soient $a$ et $b$ deux éléments de $\bar{\mathbb{R}}$. On a les équivalences suivantes :*

1. *$a = \inf(X)$ ssi $a$ minore $X$ et il existe une suite $(x_n)$ d'éléments de $X$ qui tend vers $a$.*
2. *$b = \sup(X)$ ssi $b$ majore $X$ et il existe une suite $(x_n)$ d'éléments de $X$ qui tend vers $b$.*

**Démonstration :** Démontrons seulement la première équivalence, la seconde étant entièrement similaire. Il y a deux cas.

— Premier cas : $a \in \mathbb{R}$.
(⇒) Si $a = \inf(X)$ alors $a$ minore $X$ par définition. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a + \dfrac{1}{n}$ ne minore pas $X$, car $a$ est le plus grand des minorants de $X$. Il existe donc un élément $x_n$ de $X$ tel que $x_n \leq a + \dfrac{1}{n}$. Comme $x_n \in X$, on a $a \leq x_n$. On a donc définit une suite $(x_n)$ d'éléments de $X$ telle que $a \leq x_n \leq a + \dfrac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Par le théorème II-4.4.1 (théorème des gendarmes), $x_n \to a$.
(⇐) On suppose que $a$ minore $X$ et qu'il existe une suite $(x_n)$ telle que $x_n \in X$ pour tout entier $n$ et $x_n \to a$. Soit $m$ un réel tel que $m > a$. Comme $x_n \to a$, il existe un entier $N$ tel que $a \leq x_N < m$. Comme $x_N \in X$, on en déduit que $m$ ne minore pas $X$. Donc $a$ est le plus grand des minorants de $X$.

— Deuxième cas : $a = -\infty$.
(⇒) Si $\inf(X) = -\infty$, alors aucun réel ne minore $X$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $x_n \in X$ tel que $x_n \leq -n$. La suite $(x_n)$ tend vers $-\infty$ par majoration.
(⇐) S'il existe une suite $(x_n)$ d'éléments de $X$ qui tend vers $-\infty$, alors aucun réel ne minore $X$. Donc $\inf(X) = -\infty$. □

### 1.1.1 Corrigés des exercices de cours

**Corrigé de l'exercice 1.1.1** Cette relation est partielle dès que $X$ a deux éléments ou plus. En effet, si $X$ possède deux éléments distincts $a$ et $b$, les ensembles $\{a\}$ et $\{b\}$ ne sont pas comparables pour l'inclusion.

**Corrigé de l'exercice 1.1.2** Soient $M_1, M_2$ deux éléments de $X$ qui majorent $X$. Alors $M_1 \preceq M_2$ car $M_1 \in X$ et $M_2$ majore $X$. Symétriquement $M_2 \preceq M_1$. Par antisymétrie de $\preceq$, $M_1 = M_2$. La preuve que le minimum est unique est similaire. Montrons maintenant que $M_1$ est aussi le sup de $X$. Soit $M$ un majorant de $X$. Alors $M_1 \preceq M$ car $M_1 \in X$. Dons $M_1$ minore tous les majorants de $X$. Comme il est aussi un majorant, c'est le min de l'ensemble des majorants de $X$.

**Corrigé de l'exercice 1.1.3** Soit $a \in \mathbb{Q}$ un majorant des termes de la suite $(u_n)$. Alors $a > \sqrt{2}$. Pour un entier $n$ suffisamment grand, $a' := a - \dfrac{1}{n} > \sqrt{2}$. Ainsi, pour tout majorant $a \in \mathbb{Q}$ des termes de $(u_n)$, il existe un autre majorant $a' \in \mathbb{Q}$

tel que $a' < a$. Donc l'ensemble des majorants des termes de la suite $(u_n)$ n'a pas de plus petit élément dans $\mathbb{Q}$. (Mais il a un plus petit élément dans $\mathbb{R}$, à savoir $\sqrt{2}$.)

**Corrigé de l'exercice 1.1.4** On peut prendre $u_n = (-1)^n n$.

**Corrigé de l'exercice 1.1.5** Un majorant de $\{a; b\}$ pour $|$ est un entier $c$ tel que $a|c$ et $b|c$. C'est donc un multiple commun à $a$ et $b$. Le plus petit de ces majorants est le PPCM de $a$ et $b$. Notons qu'il est bien le plus petit au sens de $|$ et pas seulement de $\leq$. En effet, tout multiple commun à $a$ et $b$ est un multiple du PPCM. Donc $\sup\{a; b\} = \text{PPCM}(a; b)$. De façon similaire, on obtient $\inf\{a; b\} = \text{PGCD}(a; b)$.

**Corrigé de l'exercice 1.1.6** Il suffit de prendre la fonction $\text{Id}_X : x \mapsto x$. Son inf est 0 et son sup est 1.

## 1.2 Continuité

### 1.2.1 Rappels

Les fonctions continues ont été introduites dans le cours de première, section II-4.5. Rappelons qu'une fonction $f$ est continue au point [2] $a \in \mathbb{R}$ si, et seulement si,

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \tag{1.3}$$

De manière équivalente, on peut dire que $f$ est continue au point $a$ ssi pour tout suite $(x_n)$ à valeurs dans l'ensemble de définition de $f$, on a

$$\lim x_n = a \Rightarrow \lim f(x_n) = f(a) \tag{1.4}$$

Nous savons que les fonctions polynomiales, trigonométriques et les fonctions du type $x \mapsto x^q$, avec $q \in \mathbb{Q}^*$ sont continues sur leurs ensembles de définition respectifs. Nous avons également montré qu'une fonction dérivable au point $a$ est continue en ce point, mais que la réciproque de cette propriété est fausse, comme le montre la fonction valeur absolue qui est continue mais non dérivable en 0.
Enfin, nous savons que si $f$ et $g$ sont deux fonctions continues au point $a$, alors la somme $f + g$, le produit $fg$, et dans le cas où $g(a) \neq 0$, le quotient $\dfrac{f}{g}$, sont des fonctions continues en $a$. De plus, si $h$ est continue au point $f(a)$, alors la composée $h \circ f$ est continue au point $a$.

### 1.2.2 Théorème des valeurs intermédiaires et applications

Dans ce paragraphe, nous allons démontrer une propriété importante des fonctions continues sur un intervalle de $\mathbb{R}$. Il y a plusieurs versions, selon la nature de l'intervalle. Voici la plus simple :

**Théorème 1.2.1 (Théorème des valeurs intermédiaires)** *Soient $a < b$ des réels et $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit $t$ un réel compris au sens large entre $f(a)$ et $f(b)$. Alors il existe $c \in [a; b]$ tel que $f(c) = t$.*

Avant de démontrer ce théorème, remarquons que l'énoncé a une interprétation géométrique très simple, que l'on peut visualiser figure 1.1.



Oui ! Si la courbe de $f$ passe par un point situé au-dessous et par un point situé au-dessus de la droite d'équation $y = t$, alors elle doit couper la droite !

En effet, à condition que $f$ respecte les hypothèses du théorème. Nous verrons plus bas des contre-exemples dans le cas contraire.



Et à quoi sert cette propriété ?

2. On peut visualiser les nombres réels comme les points d'une droite. L'expression ≪ en un certain point ≫ signifie donc simplement ≪ en un certain réel ≫.

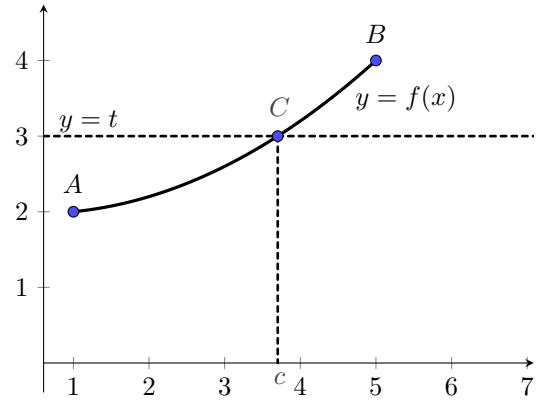



FIGURE 1.1 – Illustration du TVI. Ici $f(a) \leq t \leq f(b)$, donc le point $A \longleftrightarrow (a; f(a))$ est situé sous la droite d'équation $y = t$, et le point $B \longleftrightarrow (b; f(b))$ est situé au-dessus.

Elle sert en premier lieu à justifier l'existence d'une solution à certaines équations. Considérons par exemple l'équation

$$x^3 + x - 1 = 0 \tag{1.5}$$

Comme la fonction définie par $f(x) = x^3 + x - 1$ est continue sur l'intervalle $[0; 1]$, et que 0 est compris entre $f(0) = -1$ et $f(1) = 1$, le théorème des valeurs intermédiaires (TVI) nous assure l'existence d'un réel $c \in [0; 1]$ tel que $f(c) = 0$. Autrement dit, il existe une solution comprise entre 0 et 1 à l'équation (1.5).



On peut faire mieux : comme $f(\frac{1}{2}) = -\frac{3}{8}$, on peut dire que $c$ est compris entre $\frac{1}{2}$ et 1 !

En effet, et on peut encore couper en deux l'intervalle contenant $c$ en calculant $f(\frac{3}{4})$. Il s'avère que $f(\frac{3}{4})$ est positif. Ainsi $c \in [\frac{1}{2}; \frac{3}{4}]$.
En poursuivant ainsi, on trouve un intervalle toujours plus resserré autour de $c$. Cette méthode s'appelle *méthode de dichotomie*, du mot grec signifiant « division en deux parties égales ». Nous allons maintenant nous en inspirer pour démontrer le TVI.

**Démonstration :** Quitte à remplacer $f$ par $-f$, on peut supposer que $f(a) \leq t \leq f(b)$. Nous allons définir par récurrence deux suites $(a_n)$ et $(b_n)$ dont nous prouverons qu'elles sont adjacentes et convergent vers le réel $c$ recherché.
On pose $a_0 = a$ et $b_0 = b$. Si $f(a_0) = t$ ou $f(b_0) = t$, alors c'est terminé. Sinon, notons $Y = f(\frac{a_0 + b_0}{2})$. On a trois cas :

— Si $Y = t$, alors on pose $c = \frac{a_0 + b_0}{2}$ et c'est terminé.

— Si $Y > t$ alors on pose $a_1 = a_0$ et $b_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}$.

— Si $Y < t$ alors on pose $a_1 = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$ et $b_1 = b_0$.

On note que si $Y \neq t$, alors $a_0 \leq a_1, b_1 \leq b_0, b_1 - a_1 = \dfrac{b-a}{2}$ et $f(a_1) < t < f(b_1)$.
Supposons ainsi construits $a_0 \leq \ldots \leq a_n$ et $b_0 \leq \ldots \leq b_n$ tels que, pour tout $i \leq n$, on ait $b_i - a_i = \dfrac{b-a}{2^n}$ et $f(a_i) < t < f(b_i)$. Alors on pose $Y = f(\dfrac{a_n + b_n}{2})$ et on a trois cas :

— Si $Y = t$, alors on pose $c = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ et c'est terminé.

— Si $Y > t$ alors on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$.

— Si $Y < t$ alors on pose $a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$.

On note que si $Y \neq t$, alors $a_{n+1} \leq a_n$, $b_{n+1} \leq b_n$, $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{b_n - a_n}{2} = \dfrac{b-a}{2^{n+1}}$ et $f(a_{n+1}) < t < f(b_{n+1})$.
Si le procédé s'arrête, c'est qu'on a trouvé une solution en chemin. Sinon, on a construit une suite $(a_n)$ croissante et une suite $(b_n)$ décroissante telles que $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$ et $f(a_n) < t < f(b_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Les suites $(a_n)$ et $(b_n)$ étant adjacentes, elles convergent vers une limite commune $c$ (théorème II-4.3.13).
Par continuité de $f$, $f(a_n)$ et $f(b_n)$ convergent vers $f(c)$.
Or $f(a_n) < t < f(b_n)$ pour tout $n$, donc $f(c) \leq t \leq f(c)$ par passage à la limite dans les inégalités. Ainsi $f(c) = t$. □

**Exercice 1.2.1** Montrer l'existence d'un réel $x \in [0; \dfrac{\pi}{2}]$ tel que $\cos x = x$.

La version du TVI que nous venons de démontrer s'applique à un intervalle fermé et borné. C'est la plus simple, car les bornes de l'intervalle appartiennent à l'ensemble de définition de la fonction. Voyons-en une autre version, qui s'applique à $\mathbb{R}$ tout entier.

**Théorème 1.2.2 (TVI sur tout $\mathbb{R}$)** *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell'$ avec $\ell, \ell' \in \bar{\mathbb{R}}$. Soit $t$ un réel compris au sens* strict *entre $\ell$ et $\ell'$. Alors il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(c) = t$.*

**Démonstration :** Il y a plusieurs cas à considérer, mais ils sont tous similaires. Traitons par exemple celui où $\ell = -\infty$ et $\ell' \in \mathbb{R}$. On a alors $-\infty < t < \ell'$. Nous cherchons un intervalle fermé borné $[a; b]$ sur lequel appliquer la version déjà connue du TVI.
Pour trouver $a$, il suffit d'observer que comme $f(x) \to -\infty$ quand $x \to -\infty$, il existe un réel $a$ tel que $f(x) < t$ pour tout $x \leq a$. En particulier $f(a) < t$.
Pour trouver $b$, on applique de même la définition de $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell'$ : pour tout $\epsilon > 0$, il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \geq b \Rightarrow |f(x) - \ell'| < \epsilon$. En particulier $f(b) \geq \ell' - \epsilon$. Or $t < \ell'$, donc si on prend $\epsilon$ assez petit, on aura $t < \ell' - \epsilon$, et par suite $f(b) > t$.

Comme $f(a) < t$ et $f(b) > t$, le théorème 1.2.1 nous assure l'existence de $c$ tel que $f(c) = t$. □

La preuve précédente s'adapte aux cas des intervalles semi-infinis et/ou semi-ouverts. On peut ainsi énoncer de multiples variantes du TVI, où la valeur de la fonction $f$ en une extrémité de l'intervalle est remplacée par une limite lorsque cette extrémité n'est pas dans le domaine de définition. Nous donnons ci-dessous un exemple sans démonstration, et laissons les lecteurs deviner les autres.

**Théorème 1.2.3 (TVI sur un intervalle semi-ouvert borné)** *Soient $a < b$ des réels et $f : [a; b[ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\lim_{x \to b^-} f(x) = \ell'$, avec $\ell' \in \bar{\mathbb{R}}$. Soit $t$ un réel compris entre $f(a)$ et $\ell'$, au sens large du côté de $f(a)$ et strict du côté de $\ell'$. Alors il existe $c \in [a; b[$ tel que $f(c) = t$.*

**Exercice 1.2.2** Soit $t \in \mathbb{R}_+$. Montrer que l'équation $-x^3 + x^2 + t = 0$ admet une solution sur $\mathbb{R}_+$.



N'y a-t-il pas un moyen de réunir tous ces TVI en un seul ?

Si, en se souvenant que les intervalles sont les seuls sous-ensembles de $\mathbb{R}$ « sans trou ». Plus précisément, on a le résultat suivant :

**Théorème 1.2.4** *Soit $I$ un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$. Alors $I$ est un intervalle ssi $I$ vérifie la propriété suivante :*

$$\forall x_1, x_2 \in I, \forall y \in \mathbb{R}, x_1 \leq y \leq x_2 \Rightarrow y \in I \tag{1.6}$$

Nous ne démontrerons pas le théorème 1.2.4 car cela nécessite d'entrer dans les détails de la construction de l'ensemble $\mathbb{R}$ au sein de la théorie axiomatique des ensembles. Grâce à lui, on peut interpréter le TVI de la façon concise suivante :

**Théorème 1.2.5** *L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.*

**Démonstration :** Soit $I$ un intervalle et $f$ une fonction continue sur $I$. Montrons que $f(I)$ est un intervalle. Pour cela, considérons $y_1, y_2 \in f(I)$ et $z \in \mathbb{R}$ tels que $f(y_1) < z < f(y_2)$. Comme $y_1, y_2 \in f(I)$, il existe $x_1, x_2 \in I$ tels que $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$. Comme $I$ est un intervalle, $[x_1; x_2] \subset I$ par la propriété (1.6). D'après le TVI appliqué à $f$ sur l'intervalle $[x_1; x_2]$, il existe $c \in [x_1; x_2]$ tel que $f(c) = z$. Donc $z \in f(I)$. Ainsi $f(I)$ vérifie la propriété (1.6), donc c'est un intervalle. □

Il est facile de voir que, réciproquement, le théorème 1.2.5 implique toutes les versions du TVI. C'est donc la meilleure façon de les résumer !



Attention, l'image par une fonction continue d'un intervalle ouvert peut très bien être un intervalle fermé, comme le prouve l'exercice ci-dessous.

**Exercice 1.2.3** Quelle est l'image de l'intervalle $[-1; 1]$ par la fonction $f : x \mapsto x^3 - x$ ? Quelle est l'image de l'intervalle $]-1; 1[$ par cette même fonction ?



L'image d'un intervalle fermé borné par une fonction continue peut-elle être un intervalle ouvert ? Je ne trouve pas d'exemple...

C'est un cas à part : nous démontrerons au paragraphe 1.2.4 que l'image d'un intervalle fermé borné par une fonction continue est toujours un intervalle fermé borné.

### 1.2.3 Théorème de la bijection

Dans le paragraphe 1.2.2, nous avons vu que l'image d'un intervalle par une fonction continue est toujours un intervalle, mais pas forcément de même « nature ». Plus précisément, on distingue trois types d'intervalles :

- les intervalles fermés, du type $[a;b]$, avec $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$,
- les intervalles ouverts, du type $]a;b[$, avec $a, b \in \bar{\mathbb{R}}$, $a < b$,
- les intervalles semi-ouverts/semi-fermés, du type $]a;b]$, avec $a \in \bar{\mathbb{R}}$, $b \in \mathbb{R}$, et $a < b$, ou du type $[a;b[$, avec $a \in \mathbb{R}$, $b \in \bar{\mathbb{R}}$, et $a < b$.

On peut assurer que le type d'intervalle est conservé par une fonction continue à l'aide d'une hypothèse supplémentaire : la stricte monotonie.

**Théorème 1.2.6 (Théorème de la bijection)** *Soit $I$ un intervalle non vide et $f$ une fonction strictement monotone et continue sur $I$. Alors $f(I)$ est un intervalle du même type que $I$ et $f$ est une bijection de $I$ sur $f(I)$.*

**Démonstration :** On s'occupe seulement du cas où $f$ est strictement croissante, puisqu'il suffit de considérer $-f$ pour s'y ramener. Il est clair que $f$ est surjective de $I$ sur $f(I)$. De plus, la stricte monotonie implique l'injectivité : la bijectivité est donc immédiate. Démontrons l'affirmation sur la nature de $f(I)$.

- Cas d'un intervalle fermé. Posons $I = [a;b]$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $a \leq b$. Pour tout $x \in I$, $a \leq x \leq b$, et par croissance, $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$. Donc $f(I) \subset [f(a);f(b)]$. De plus $f(a), f(b) \in f(I)$ et $f(I)$ est un intervalle, donc $[f(a);f(b)] \subset f(I)$.
- Cas d'un intervalle ouvert. Posons $I = ]a;b[$ avec $a, b \in \bar{\mathbb{R}}$ et $a \leq b$. Posons $\alpha = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ et $\beta = \lim\limits_{x \to b} f(x)$. Pour tout $x \in I$, on a $a < x < b$ et de la stricte monotonie de $f$ on déduit $\alpha < f(x) < \beta$. Donc $f(I) \subset ]\alpha;\beta[$. Mais l'inclusion réciproque est également vraie : en effet, $f(I)$ est un intervalle et doit contenir $f(x_n)$ pour $(x_n)$ une suite qui tend vers $a$ et $f(x'_n)$ pour $(x'_n)$ une suite qui tend vers $b$. L'intervalle $f(I)$ doit donc contenir les termes d'une suite $f(x_n)$ qui tend vers $\alpha$ et d'une suite $f(x'_n)$ qui tend vers $\beta$. Il doit donc contenir l'intervalle $]\alpha;\beta[$.
- Cas d'un intervalle semi-ouvert/semi-fermé : la preuve est un mélange des deux précédentes et elle est laissée aux lecteurs. □



Le caractère borné d'un intervalle n'est pas forcément conservé, comme le montre l'exemple de la fonction tan, qui réalise une bijection continue de $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$ !

**Remarque 1.2.1** L'exercice 4.1.10 fournit une réciproque au théorème 1.2.6 : si $I$ et $J$ sont des intervalles du même type, alors il existe une bijection $f$ continue et de réciproque continue telle que $f(I) = J$.

### 1.2.4 Fonctions continues sur un segment (*)

Rappelons qu'un segment est un intervalle fermé borné. On est souvent amené à rechercher le maximum ou le minimum d'une fonction. Or nous connaissons des fonctions qui n'ont ni l'un ni l'autre (voir les exercices 1.1.6 et 4.1.16). Il est donc utile de disposer d'une condition suffisante qui assure l'existence de ces objets. C'est ce que fournit le théorème ci-dessous, qui est un résultat majeur de la théorie des fonctions d'une variable réelle.

**Théorème 1.2.7 (Théorème des bornes atteintes)** *Soit $f$ une fonction continue sur le segment $[a;b]$. Alors $f$ est bornée sur $[a;b]$ et atteint ses bornes.*

**Démonstration :** Démontrons d'abord que $f$ est majorée. Supposons que ce ne soit pas le cas. Alors $f$ ne peut pas être majorée sur les deux intervalles $[a;\frac{a+b}{2}]$ et $[\frac{a+b}{2};b]$. Si elle n'est pas majorée sur le premier, on pose $a_1 = a$ et $b_1 = \frac{a+b}{2}$. Si elle est majorée sur le premier mais pas sur le deuxième, on pose $a_1 = \frac{a+b}{2}$ et $b_1 = b$. Et on recommence ! On construit ainsi, exactement comme nous l'avons fait pour démontrer le TVI, deux suites adjacentes $(a_n)$ et $(b_n)$ telles que $f$ est non majorée sur $[a_n;b_n]$. Il existe donc un réel $c_n$ de cet intervalle tel que $f(c_n) \geq n$. Comme $(a_n)$ et $(b_n)$ sont adjacentes, elles convergent vers une limite commune $c$, qui est aussi la limite de $(c_n)$ par le théorème des gendarmes. Comme $f$ est continue, $c_n \to c \Rightarrow f(c_n) \to f(c)$. Or $f(c_n) \geq n$ donc $f(c_n) \to +\infty$. On arrive à une contradiction.

Donc $f$ est majorée, et comme $-f$ est continue, elle est aussi majorée sur $[a;b]$, ce qui montre que $f$ est minorée. La borne supérieure de $f$ est donc un nombre réel $M$. Supposons que $M$ n'ait pas d'antécédent par $f$. Alors $f(x) < M$ pour tout $x \in [a;b]$. On peut donc définir la fonction $g$ sur $[a;b]$ par $g(x) = \frac{1}{M-f(x)}$. Comme quotient de deux fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas, la fonction $g$ est continue sur $[a;b]$. Elle est donc majorée. Or, comme $M$ est le sup de $f$, il existe d'après le théorème 1.1.2 une suite $(x_n)$ telle que $f(x_n) \to M$. On en déduit que $g(x_n) \to +\infty$, ce qui contredit le caractère majoré de $g$. Il existe donc un réel $x \in [a;b]$ tel que $f(x) = M$. En remplaçant $f$ par $-f$ on montre aussi que la borne inférieure de $f$ est atteinte. □

Comme on sait par le TVI que l'image de l'intervalle $[a;b]$ par la fonction continue $f$ est un intervalle, le théorème des bornes atteintes nous montre qu'il s'agit d'un segment, à savoir le segment $[\min f; \max f]$. Le TVI sur un segment peut donc se réécrire de la façon suivante, parfois utile :

**Corollaire 1.2.8** *Soit $f$ une fonction continue sur le segment $[a;b]$ et soit $t$ un réel tel que $\min\limits_{x\in[a;b]} f(x) \leq t \leq \max\limits_{x\in[a;b]} f(x)$. Alors il existe $c \in [a;b]$ tel que $f(c) = t$.*

### 1.2.5 Discontinuités des fonctions monotones (*)

L'égalité (1.3) peut être violée de plusieurs façons, ce qui permet de distinguer différents types de discontinuités.

- La discontinuité la moins violente est dite *effaçable*. Dans ce cas, la limite $\lim_{x\to a} f(x)$ existe mais n'est pas égale à $f(a)$. Il suffit alors de changer la valeur de $f$ en $a$ pour la transformer en fonction continue [3].
- Vient ensuite la discontinuité de *première espèce*. Dans ce cas, $f$ n'a pas de limite en $a$, mais possède quand même une limite à droite et une limite à gauche en $a$, toutes deux de valeur finie. On peut dire que la fonction fait un « saut », et c'est l'image qui vient naturellement à l'esprit quand on parle de discontinuité. La fonction partie entière est un exemple de fonction ayant des discontinuités de première espèce en lesquelles elle fait un saut de hauteur 1.
- Dans tous les autres cas, on parle de discontinuité de *deuxième espèce*. On range donc dans cette dernière catégorie, la plus pathologique, les fonctions ayant une limite infinie à droite ou à gauche, et qui font donc un saut de hauteur infinie, ainsi que les fonctions qui n'ont même pas de limite à droite ou à gauche en $a$. Pour un exemple de ce dernier comportement, on peut penser à la fonction définie par $f(x) = \cos(\frac{1}{x})$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

**Exercice 1.2.4** Montrer que la fonction définie par $f(x) = \cos(\frac{1}{x})$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ possède une discontinuité de deuxième espèce en 0.

Le premier résultat que nous allons démontrer dans ce paragraphe restreint les pathologies des fonctions monotones aux discontinuités de première espèce.

**Théorème 1.2.9** *Soit $f$ une fonction monotone sur un intervalle $I$ et soit $a \in I$. Alors soit $f$ est continue en $a$, soit $f$ possède une discontinuité de première espèce en $a$.*

**Démonstration :** Commençons par le cas où $f$ est croissante. Soit $(x_n)$ une suite croissante d'éléments de $I$ qui converge vers $a^-$. Alors $(f(x_n))$ est une suite croissante et majorée par $f(a)$, donc elle converge vers une limite $\ell$. Nous allons montrer que $\ell$ est indépendante de la suite $(x_n)$ choisie.
Soit $(x'_n)$ une autre suite croissante à valeurs dans $I$ et qui converge vers $a^-$. Alors, toujours par croissance majorée, $f(x'_n)$ converge vers une limite $\ell'$. Supposons $\ell < \ell'$. Alors il existe un entier $n$ tel que $\ell < f(x'_n) \leq \ell'$. Comme $x'_n < a$ et que $x_n \to a$, on peut trouver un entier $p$ tel que $x'_n < x_p < a$. Par croissance de $f$, $f(x'_n) \leq f(x_p)$, donc $f(x_p) > \ell$. Ceci est absurde car la suite $(f(x_n))$ est croissante et tend vers $\ell$. On montre de façon symétrique que $\ell > \ell'$ conduit à l'absurde. Ainsi, pour toute suite croissante $(x_n)$ qui tend vers $a^-$, on a $f(x_n) \to \ell$. D'après la définition séquentielle de la limite d'une fonction (déf. II-4.4.3 et ex. II-5.4.38), on en déduit que $\lim_{x\to a^-} f(x) = \ell$.
Ainsi $f$ possède une limite finie à gauche en $a$. Montrer que $f$ en possède une en $a^+$ est très similaire. On considère une suite $(x_n)$ décroissante d'éléments de $I$

3. On rappelle que la notion de limite utilisée dans cet ouvrage est épointée, ce qui correspond à l'usage standard en mathématiques. Voir à ce sujet l'annexe II-A.

qui tend vers $a^+$. Alors $(f(x_n))$ est aussi décroissante car $f$ est croissante, et elle minorée par $f(a)$. Donc $(f(x_n))$ converge, et on montre comme ci-dessus que la limite est indépendante de la suite $(x_n)$ choisie.
En conclusion, $f$ possède une limite finie à droite et à gauche en $a$. Si elles ne coïncident pas, alors $f$ possède par définition une discontinuité de première espèce en $a$. De plus, par croissance, $\lim_{x\to a^-} f(x) \leq f(a) \leq \lim_{x\to a^+} f(x)$. Donc si les limites à droite et à gauche coïncident, elles sont égales à $f(a)$, et il s'en suit que la fonction $f$ est continue en $a$.
Si maintenant $f$ est décroissante sur $I$, on se ramène au cas précédent en considérant la fonction $-f$, qui est croissante. □

Observons maintenant que si une fonction monotone fait un saut, les valeurs « sautées » ne sont pas atteintes par la fonction, puisqu'elles ne peuvent pas l'être avant le saut, ni après, sans violer la monotonie (voir fig. 1.2). En prenant la contraposée de cette observation, on obtient le corollaire suivant.

**Corollaire 1.2.10** *Soient $I, J$ deux intervalles et $f : I \longrightarrow J$ une fonction monotone. Si $f$ est surjective alors $f$ est continue.*

**Démonstration :** Raisonnons par contraposée. Commençons par le cas où $f$ est croissante. Si $f$ n'est pas continue en $a \in I$, alors $f$ a une discontinuité de première espèce en $a$. On a donc $\lim_{x\to a^-} f(x) < f(a)$ ou $\lim_{x\to a^+} f(x) > f(a)$. Dans le premier cas, considérons $y$ tel que $\lim_{x\to a^-} f(x) < y < f(a)$. Alors, par croissance de $f$, $y$ ne peut pas avoir d'antécédent par $f$. Pourtant, si $x < a$ on a $f(x) < y < f(a)$, donc $y \in J$. On en conclut que $f$ n'est pas surjective. Le cas $\lim_{x\to a^+} f(x) > f(a)$ est similaire, et enfin le cas où $f$ est décroissante se ramène au précédent en considérant $-f$. □

### 1.2.6 Continuité de la réciproque (*)

Le corollaire 1.2.10 démontré au paragraphe précédent va nous permettre d'apporter une précision très importante au théorème de la bijection.

**Théorème 1.2.11** *Soit $I$ un intervalle, $f$ une fonction continue sur $I$ et $J = f(I)$.*

1. *Si $f$ est strictement monotone, alors $f$ est une bijection de $I$ sur $J$ et sa réciproque $f^{-1}$ est continue.*
2. *Si $f$ est une bijection de $I$ sur $J$, alors $f$ est strictement monotone et sa réciproque $f^{-1}$ est continue.*

**Démonstration :**

1. Si $f$ est strictement monotone alors $f$ est injective (théorème I-7.4.1). De plus, $f$ est par définition surjective de $I$ sur $J = f(I)$. La réciproque d'une bijection strictement monotone est aussi strictement monotone (théorème II-1.6.4). Comme $f^{-1}$ est monotone et surjective, elle est continue par le corollaire 1.2.10.
2. Supposons que $f$ soit bijective mais pas strictement monotone. Alors il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a < b < c$ et tels que $f(c) - f(b)$ et $f(b) - f(a)$

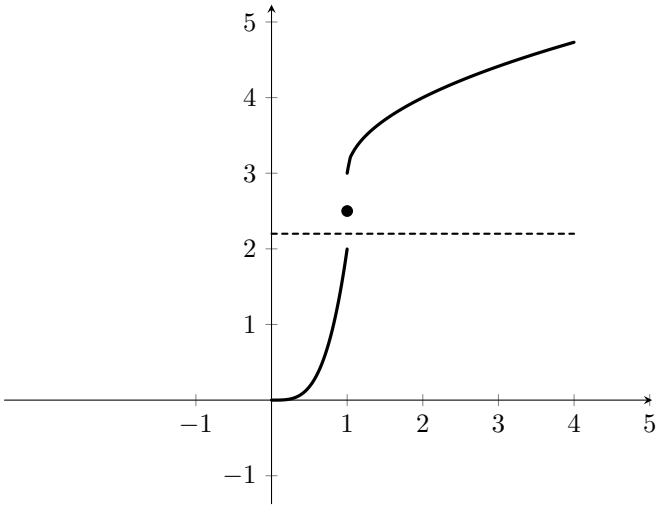



FIGURE 1.2 – Une fonction monotone qui n'est pas continue ne peut être surjective : les droites horizontales qui « passent dans le trou » n'intersectent pas la courbe. L'équation $y = f(x)$ n'a donc pas de solution pour certaines valeurs de $y$.

ne sont pas du même signe. On voit alors que $f(a) \in ]f(b); f(c)[$ ou $f(c) \in ]f(a); f(b)[$ (les intervalles sont ouverts car $f$ est injective). Dans le premier cas, on peut trouver à l'aide du TVI un $c' \in ]b; c[$ tel que $f(c') = f(a)$, ce qui contredit l'injectivité. Dans le second cas on procède de même et on trouve $c' \in ]a; b[$ tel que $f(c') = f(c)$. La continuité de $f^{-1}$ se démontre comme dans le premier point. □

Ce théorème nous permet de démontrer la continuité de certaines fonctions usuelles, continuité que nous avions admise dans le cours de première.

**Corollaire 1.2.12** *Soit $q \in \mathbb{N}^*$, $q \geq 2$.*

1. *Si $q$ est pair, alors la fonction $x \mapsto x^{\frac{1}{q}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.*
2. *Si $q$ est impair, alors la fonction $x \mapsto x^{\frac{1}{q}}$ est continue sur $\mathbb{R}$.*

**Démonstration :** 1. Si $q$ est pair, $x \mapsto x^q$ est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$. Sa réciproque $x \mapsto x^{\frac{1}{q}}$ est donc continue par le théorème 1.2.11.

2. Si $q$ est impair, $x \mapsto x^q$ est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Sa réciproque $x \mapsto x^{\frac{1}{q}}$ est donc continue par le théorème 1.2.11. □

### 1.2.7 Itération d'une fonction continue (*)

Prenez une calculette et entrez un réel positif de votre choix, puis appuyez sur la touche « racine carrée ». Appuyez à nouveau. Appuyez ainsi un grand nombre de

fois. À chaque fois la calculette retourne la racine carrée du résultat précédent. Vous devez remarquer quelque chose...



Oui, j'ai essayé avec plusieurs réels, et ça semble toujours converger vers 1 !



Sauf si on entre 0 au départ : là ça reste toujours nul.

En effet, et on peut observer que 0 et 1 sont les seuls réels qui sont leur propre racine carrée ! Nous allons expliquer ce phénomène en le faisant rentrer dans un cadre bien plus général.
Considérons une fonction $f$ définie sur un sous-ensemble $E$ de $\mathbb{R}$, et un élément $a$ de $E$. Supposons que $f(E) \subset E$. On dit que $E$ est un ensemble *stable* par $f$. On peut alors définir une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la façon suivante :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n), \\ u_0 = a \end{cases} \tag{1.7}$$

On dit que la suite $(u_n)$ est définie par *itération* de la fonction $f$, à partir du premier terme $u_0 = a$. En effet, on a $u_1 = f(a)$, $u_2 = f(f(a))$, etc. En notant $f^n$ la composée $f \circ \ldots \circ f$ ($n$ facteurs), on a $u_n = f^n(a)$. La stabilité de l'ensemble $E$ assure que les termes de la suite sont toujours définis : si $u_n$ est défini pour $n \geq 1$, alors $u_n = f(u_{n-1}) \in E$ donc $u_{n+1} = f(u_n)$ est aussi défini.

**Remarque 1.2.2** L'ensemble $E$ n'est pas toujours donné au départ. Nous verrons sur des exemples que la recherche d'ensembles stables par $f$ est une étape importante de l'étude de la suite $(u_n)$.

Notons que beaucoup de suites définies par récurrence sont de ce type : une suite arithmétique est définie par l'itération de la fonction $x \mapsto x + r$, où $r$ est la raison, et une suite géométrique est définie par itération de la fonction $x \mapsto qx$, où $q$ est la raison. Plus généralement, une suite arithmético-géométrique est une suite définie par itération d'une fonction affine $x \mapsto qx + r$ (voir exercice II-5.4.27).
On peut visualiser de façon très éclairante les termes d'une suite définie par itération d'une fonction. Prenons l'exemple de la suite définie par

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n}, \\ u_0 = 4 \end{cases} \tag{1.8}$$

On trace dans un même repère la droite d'équation $y = x$ et la courbe de la fonction $f$, définie ici par $f(x) = \sqrt{x}$ (voir figure 1.3). Les termes de la suite $(u_n)$ seront représentés par les points de coordonnées $(u_n; 0)$. Le premier point à construire, est donc le point $A$ de coordonnées $(4; 0)$. On « monte » ensuite sur la courbe via le segment pointillé $[AB]$. Le point $B$ a donc pour coordonnées $(u_0; f(u_0)) = (u_0; u_1)$, ici $(4; 2)$. Puis on se déplace horizontalement le long du segment $[BC]$ pour aller rejoindre la droite d'équation $y = x$. Le point $C$ a donc pour coordonnées $(u_1; u_1)$. On redescend ensuite sur l'axe des abscisses par le segment $[CF]$. Le point $F$ a pour coordonnées $(u_1; 0)$, ici $(2; 0)$ : c'est le point qui représente le deuxième terme de la suite. On itère ensuite le procédé : on remonte sur la courbe (point $E$ de

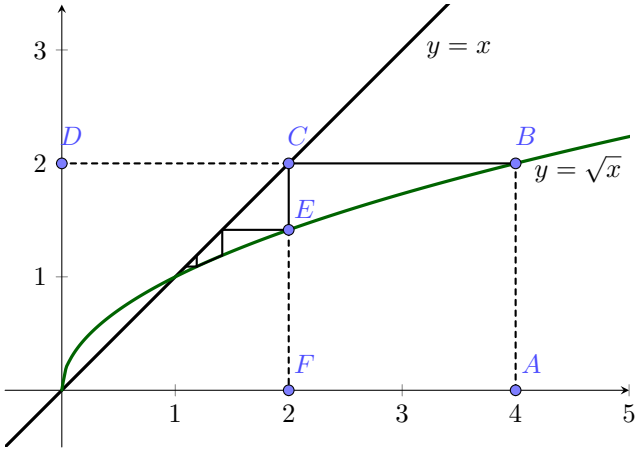



FIGURE 1.3 – Suite définie par itération d'une fonction : construction graphique.

coordonnées $(u_1; u_2)$), et ainsi de suite. En fin de compte, les points $A$ et $F$ ne sont pas si intéressants : c'est plutôt la « marche » $BCE$ qui doit retenir notre attention.



On voit apparaître une sorte d'escalier qui converge vers un point d'intersection de la courbe et de la droite !

En effet, c'est bien ce qui se produit, et la suite converge vers 1, ce que nous démontrerons plus bas.



Et c'est toujours comme ça ?

Non, si on remplaçait la fonction racine carrée par la fonction carrée, en partant toujours de $u_0 = 4$ on obtiendrait un escalier divergeant vers l'infini.
Mais revenons à la suite (1.8) : nous allons démontrer qu'elle converge bien vers 1 en utilisant deux théorèmes qui seront nos outils principaux pour étudier les suites définies par itération d'une fonction.

**Théorème 1.2.13** *1. Si $f$ est croissante sur $E$, alors $(u_n)$ est monotone.*

*2. Si $f$ est décroissante sur $E$, alors les suites $(u_{2n})$ et $(u_{2n+1})$ sont monotones, avec des sens de variation opposés.*

**Démonstration :** 1. Supposons $u_0 \leq u_1$. Si $u_n \leq u_{n+1}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$, alors $f(u_n) \leq f(u_{n+1})$ par croissance de $f$, d'où $u_{n+1} \leq u_{n+2}$. Par récurrence, $(u_n)$ est croissante.

Si $u_0 \geq u_1$, la même démonstration montre que $(u_n)$ est décroissante.

2. Comme $f$ est décroissante, $f \circ f$ est croissante. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$. Alors $v_{n+1} = f \circ f(v_n)$, et $w_{n+1} = f \circ f(w_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc par le point précédent, $(v_n)$ et $(w_n)$ sont monotones. De plus, $f(v_0) = w_0$ et $f(v_1) = w_1$. Comme $f$ est décroissante, il en résulte

que $v_0$ et $v_1$ d'une part, et $w_0$ et $w_1$ d'autre part sont classés dans l'ordre inverse. Les sens de variation de $(v_n)$ et $(w_n)$ sont donc opposés. □

**Théorème 1.2.14** *Si $(u_n)$ converge vers le réel $\ell$, et si $f$ est continue en $\ell$, alors $\ell$ est un point fixe de $f$, c'est-à-dire vérifie l'équation $f(\ell) = \ell$.*

**Démonstration :** On a $\lim u_n = \ell \Rightarrow \lim f(u_n) = f(\ell)$ car $f$ est continue en $\ell$. Or $\lim f(u_n) = \lim u_{n+1} = \ell$. Donc $\ell = f(\ell)$. □

Appliquons ces deux derniers résultats à la suite définie par (1.8). La fonction racine carrée est croissante, donc $(u_n)$ est monotone, par le théorème 1.2.13. Comme $u_0 = 4$ et $u_1 = 2$, on voit que $(u_n)$ est décroissante. Or $u_n$ est toujours $\geq 1$ car $u_0 \in [1; +\infty[$ qui est un ensemble stable par $f$. La suite $(u_n)$ est donc décroissante et minorée par 1, et il en résulte qu'elle converge vers une limite $\ell \geq 1$. D'après le théorème 1.2.14, $\ell$ est un point fixe de $f$. Or l'équation $\sqrt{\ell} = \ell$ n'admet que 2 solutions : 0 et 1. La limite étant $\geq 1$, la suite converge vers 1.
Les suites définies par itération d'une fonction continue appartiennent à un vaste domaine d'étude, appelé « systèmes dynamiques discrets ». Elles ont beaucoup d'application, à commencer par la recherche d'approximation des solutions d'une équation pouvant s'écrire sous la forme $f(x) = x$, où $f$ est une fonction continue. Les exercices 4.1.19 à 4.1.27 présentent d'autres applications et différentes techniques d'étude.

### 1.2.8 Corrigés des exercices de cours

**Corrigé de l'exercice 1.2.1** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(x) - x$. Alors $f(0) = 1 > 0$ et $f(\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2} < 0$. La fonction $f$ est continue, donc d'après le TVI il existe $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$ tel que $f(x) = 0$.

**Corrigé de l'exercice 1.2.2** On trouve facilement par étude de fonction que $f([-1; 1]) = [-\frac{2\sqrt{3}}{9}; \frac{2\sqrt{3}}{9}]$. L'image de $]-1; 1[$ est la même car $f(-1) = f(1) = f(0)$.

**Corrigé de l'exercice 1.2.3** Soit $f_t$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_t(x) = -x^3 + x^2 + t$. Alors $f_t$ est continue, $f_t(0) = t \geq 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_t(x) = -\infty$. Par le TVI il existe $x \in [0; +\infty[$ tel que $f_t(x) = 0$.

**Corrigé de l'exercice 1.2.4** La suite $x_n = \dfrac{1}{\pi n}$, définie pour $n \in \mathbb{N}^*$, tend vers $0^+$ quand $n \to \infty$, mais la suite $u_n = f(x_n) = (-1)^n$ n'a pas de limite. Donc $f$ n'a pas de limite en $0^+$.

## 1.3 Compléments sur la dérivation

### 1.3.1 Dérivée de la réciproque d'une bijection

Considérons une fonction $f$ dérivable en un réel $x_0$. On note $A$ le point d'abscisse $x_0$ de la courbe de $f$ dans un repère orthonormé (fig. 1.4). Si $f$ est bijective, la courbe de sa réciproque $f^{-1}$ est l'image de $\mathcal{C}_f$ par la symétrie $s$ d'axe $\Delta : y = x$. Nous allons voir qu'on peut déduire bien des choses de cette propriété géométrique ! Comme $f$ est dérivable en $x_0$, la courbe $\mathcal{C}_f$ possède une tangente non verticale au point $A$. La courbe $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ possède donc également une tangente au point d'abscisse $f(x_0)$, et celle-ci n'est pas verticale à condition que la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point $A$ ne soit pas horizontale. La fonction $f^{-1}$ est donc dérivable en $f(x_0)$ si $f'(x_0) \neq 0$. Et on peut même préciser la valeur de la dérivée ! En effet, la tangente à $\mathcal{C}_f$ en $A$ a pour coefficient directeur $f'(x_0)$. Le vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ f'(x_0) \end{pmatrix}$ dirige donc cette tangente. Or, la symétrie $s$ échange les abscisses et les ordonnées. Par conséquent, la tangente à $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ en $A' = s(A)$ est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}'$ de coordonnées $\begin{pmatrix} f'(x_0) \\ 1 \end{pmatrix}$. Son coefficient directeur est donc $\dfrac{1}{f'(x_0)}$.

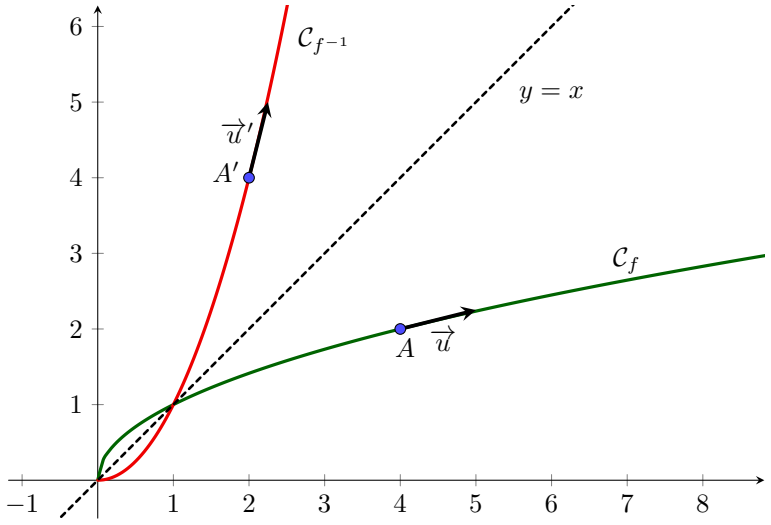



FIGURE 1.4 – La courbe de $f^{-1}$ est l'image de celle de $f$ par la symétrie $s$ d'axe $\Delta$ d'équation $y = x$. Le point $A \longleftrightarrow (x_0; f(x_0)) \in \mathcal{C}_f$ a pour image $A' = s(A) \longleftrightarrow (f(x_0); x_0)$, et le vecteur tangent $\vec{u}$ a pour image $\vec{u}'$.



On a démontré par la géométrie la formule $(f^{-1})'(f(x_0)) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$ !

Oui mais, comme souvent avec les démonstrations géométriques, nous avons passé

sous silence certains détails. Corrigeons cela avec un énoncé précis et une démonstration analytique.

**Théorème 1.3.1** *Soient $I, J$ deux intervalles et $f : I \to J$ une fonction bijective et continue. Si $f$ est dérivable en $x_0 \in I$ et si $f'(x_0) \neq 0$ alors $f^{-1}$ est dérivable en $f(x_0)$ et on a*

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)} \tag{1.9}$$

**Démonstration :** Posons $y_0 = f(x)$ et calculons le taux d'accroissement de $f^{-1}$ entre $y_0$ et $y$, avec $y \in J$. On a

$$\begin{aligned} \tau_{f^{-1}}(y_0, y) &= \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} \\ &= \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} \end{aligned} \tag{1.10}$$

où l'on a posé $x = f^{-1}(y)$ et $x_0 = f^{-1}(y_0)$. Or $f$ est continue et bijective sur un intervalle, donc sa réciproque $f^{-1}$ est continue (théorème 1.2.11). Par conséquent $x \to x_0$ lorsque $y \to y_0$. Ainsi, comme $f$ est dérivable en $x_0$ et de dérivée non nulle, le second membre de (1.10) tend vers $\dfrac{1}{f'(x_0)}$. □

**Remarque 1.3.1** En posant $y_0 = f(x_0)$ la formule (1.9) s'écrit également

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} \tag{1.11}$$



On peut facilement retrouver les formules (1.9) et (1.11) par la règle de la chaîne !

**Exercice 1.3.1** Faites-le, puis expliquer pourquoi on ne peut pas démontrer ces formules de cette manière.

**Corollaire 1.3.2** *Soit $q \in \mathbb{N}$ tel que $q \geq 2$ et soit $r_q$ la fonction « racine $q$-ième », définie par $x \mapsto x^{1/q}$ sur $D_q$, avec $D_q = \mathbb{R}$ si $q$ est impair et $D_q = \mathbb{R}_+$ si $q$ est pair. Alors $r_q$ est dérivable sur son $D_q \setminus \{0\}$, et pour tout $x \in D_q \setminus \{0\}$ on a*

$$r_q'(x) = \frac{1}{q} x^{\frac{1}{q}-1} \tag{1.12}$$

**Démonstration :** La fonction $r_q$ est la réciproque de la fonction $f_q$ définie par $f_q(x) = x^q$ pour $x \in D_q$. Comme $f_q$ est dérivable et bijective de $D_q$ dans $D_q$, et que sa dérivée $f_q'(x) = qx^{q-1}$ ne s'annule qu'en 0, on en déduit que $r_q$ est dérivable en tout $x \in D_q \setminus \{0\}$, et on a, d'après (1.11) :

$$r_q'(x) = ((f_q)^{-1})'(x) = \frac{1}{f_q'(r_q(x))} = \frac{1}{q(x^{1/q})^{q-1}} = \frac{1}{q} x^{\frac{1}{q}-1}$$ □

Nous verrons d'autres applications du théorème 1.3.1 dans la section 1.5.

### 1.3.2 Théorème des accroissements finis (*)

Dans ce paragraphe nous présentons des résultats qui, de nos jours, sont enseignés en première année du supérieur. Ils sont pourtant simples à comprendre, et permettent de démontrer plusieurs propriétés importantes que nous serions sans cela obligés d'admettre. La lecture de ce complément est donc fortement recommandée. Nous commençons avec un théorème intuitivement évident.

**Théorème 1.3.3 (Théorème de Rolle)** *Soit $f$ une fonction dérivable sur $]a;b[$, avec $a < b$, continue en $a$ et $b$ et telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in ]a;b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

**Démonstration :** Si $f$ est constante sur $[a;b]$, alors $f'(c) = 0$ pour tout $c \in ]a;b[$. Sinon, comme $f$ est continue sur $[a;b]$, elle admet un minimum $m$ et un maximum $M$ d'après le théorème des bornes atteintes. De plus, comme $f(a) = f(b)$, on peut affirmer que $m$ ou $M$ est atteint en un réel $c \in ]a;b[$. Alors $f'(c) = 0$ par le théorème II-4.6.10. □

Bien que le théorème de Rolle semble évident, il permet de démontrer en quelques lignes un résultat qui l'est beaucoup moins (fig. 1.5).

**Théorème 1.3.4 (Théorème des accroissements finis)** *Soit $f$ une fonction dérivable sur $]a;b[$, avec $a < b$, continue en $a$ et $b$. Alors il existe $c \in ]a;b[$ tel que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{1.13}$$

**Démonstration :** Soit $g$ la fonction définie sur $[a;b]$ par

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Alors $g$ est dérivable sur $]a;b[$, continue en $a$ et $b$, et $g(b) = g(a)$. On peut donc lui appliquer le théorème de Rolle. Le résultat suit. □

Notons que le théorème des accroissements finis (TAF pour les intimes) est une généralisation du théorème de Rolle, puisque l'on retrouve ce dernier dans le cas où $f(a) = f(b)$. Graphiquement, le TAF nous dit qu'il existe un point $C$ de la courbe de $f$, situé entre le point $A$ d'abscisse $a$ et le point $B$ d'abscisse $b$, tel que la tangente en $C$ est parallèle à la sécante $(AB)$.
Comme première application importante du TAF, nous allons maintenant prouver que le signe de la dérivée permet de déduire le sens de variation d'une fonction dérivable.


On le sait déjà ça, on l'a vu en première !


Oui, mais on l'avait admis !

En effet, nous avions démontré seulement la réciproque : le sens de variation permet de déduire le signe de la dérivée.

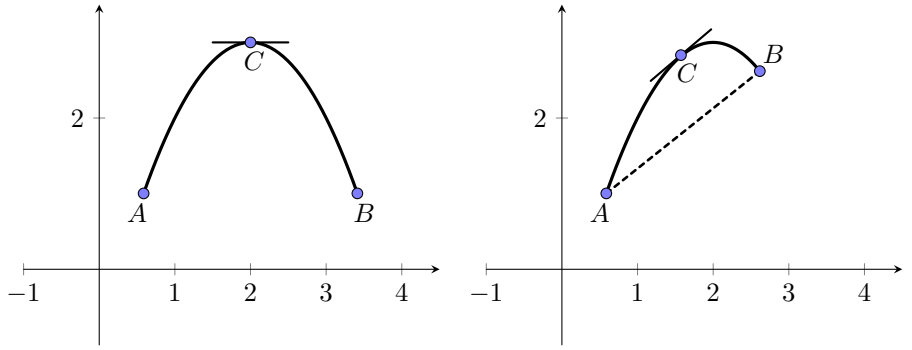



FIGURE 1.5 – Le théorème de Rolle, illustré à gauche, assure l'existence d'une tangente horizontale à la courbe d'une fonction dérivable passant deux fois par la même valeur. Le théorème des accroissements finis (à droite) assure l'existence d'une tangente parallèle à une sécante.

**Théorème 1.3.5** *Soit $f$ une fonction dérivable sur $]a;b[$, avec $a < b$, continue en $a$ et $b$.*

1. *Si $f'$ est positive (resp. strictement positive) sur $]a;b[$, alors $f$ est croissante (resp. strictement croissante) sur $[a;b]$.*
2. *Si $f'$ est négative (resp. strictement négative) sur $]a;b[$, alors $f$ est décroissante (resp. strictement décroissante) sur $[a;b]$.*

**Démonstration :** Démontrons un seul cas, les autres étant complètement similaires. Supposons donc que $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a;b]$. Soient $x_1, x_2$ deux éléments de $[a;b]$, avec $x_1 < x_2$. Comme $f$ est dérivable sur $]x_1;x_2[$ et continue sur $[x_1;x_2]$, il existe d'après le TAF un réel $c \in ]x_1;x_2[$ tel que $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$. Comme $f'(c) \geq 0$ et $x_2 - x_1 > 0$, on a $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$. Ceci étant vrai pour tous réels $x_1, x_2$ de $[a;b]$ tels que $x_1 < x_2$, on en déduit que $f$ est croissante. □

Le TAF possède également un corollaire très utile, que nous citons ici comme un théorème à part entière. La démonstration, immédiate, est laissée aux lecteurs.

**Théorème 1.3.6 (Inégalité des accroissements finis)** *Soit $f$ une fonction dérivable sur $]a;b[$, avec $a < b$, continue en $a$ et $b$. Soit $M$ un réel positif ou nul. Si $|f'(x)| \leq M$ pour tout $x \in ]a;b[$, alors*

$$|f(b) - f(a)| \leq M|b - a| \tag{1.14}$$



C'est intuitif : si on roule avec une vitesse instantanée de moins de 100 km/h pendant 1 heure, on fait moins de 100 km en une heure !



On ne pourrait pas avoir une inégalité dans l'autre sens en supposant $|f'(x)| \geq M$ ?