Tercera edición

Álgebra lineal y programación lineal

Con aplicaciones a ciencias Administrativas, contables y financieras



Francisco Soler Fajardo
Fabio Molina Focazzio
Lucio Rojas Cortés

ECOE EDICIONES

ÁLGEBRA LINEAL Y PROGRAMACIÓN LINEAL

Con aplicaciones a ciencias administrativas, contables y financieras

Con uso de Derive, Q.S.B y Excel

Francisco Soler Fajardo
Fabio Molina Focazzio
Lucio Rojas Cortés

Tercera edición

Catalogación en la publicación - Biblioteca Nacional de Colombia

Soler Fajardo, Francisco
Álgebra lineal y programación lineal : con aplicaciones a ciencias administrativas, contables y financieras / Francisco Soler Fajardo,

Fabio Molina Focazzio, Lucio Rojas Cortés. -- 3a. ed. -- Bogotá : Ecoe Ediciones, 2016.
674 p. – (Ciencias básicas. Matemáticas) Incluye datos biográficos de los autores en la pasta. -- Incluye complemento virtual SIL (Sistema de Información en Línea) www.ecoeediciones.com.

ISBN 978-958-771-320-6

1. Algebras lineales 2. Algebra vectorial 3. Programación lineal I. Molina Focazzio, Fabio Germán II. Rojas Cortés, Lucio III. Título IV. Serie

CDD: 512.5 ed. 21 CO-BoBN– a977196

Colección: *Ciencias básicas*
Área: *Matemáticas*

ECOE
EDICIONES

© Francisco Soler Fajardo
Fabio Molina Focazzio
Lucio Rojas Cortés

© Ecoe Ediciones Ltda.
e-mail: info@ecoeediciones.com
www.ecoeediciones.com
Carrera 19 N.° 63 C 32, Tel.: 248 14 49
Bogotá, Colombia

Primera edición: Bogotá, agosto de 2003
Segunda edición: Bogotá, 2005
Tercera edición: Bogotá, marzo de 2016
Reimpresión: Bogotá, junio de 2016
Reimpresión: Bogotá, diciembre de 2016
Reimpresión: Bogotá, enero de 2018

ISBN: 978-958-771-320-6

Dirección editorial: Andrés Delgado
Coordinación editorial: Angélica García Reyes
Diagramación: Magda Rocío Barrero
Carátula: Wilson Marulanda
Impresión: Digiprint Editores
Calle 63 Bis N.° 70 - 49

Prohibida la reproducción total o parcial por cualquier medio
sin la autorización escrita del titular de los derechos patrimoniales.

Impreso y hecho en Colombia - Todos los derechos reservados

ÁLGEBRA LINEAL Y PROGRAMACIÓN LINEAL

Francisco Soler Fajardo
Docente de Matemática
Pontificia Universidad Javeriana
Universidad Sergio Arboleda
Bogotá, Colombia

Fabio Molina Focazzio
Docente de Matemática
Pontificia Universidad Javeriana
Universidad Sergio Arboleda
Bogotá, Colombia

Lucio Rojas Cortés
Docente de Matemática
Universidad Central
Universidad Militar Nueva Granada
Bogotá, Colombia

Revisión Técnica
Nestor Pedraza Colmenares
Docente de Matemáticas
Pontificia Universidad Javeriana
Universidad Jorge Tadeo Lozano
Bogotá, Colombia

Harold Noriega Usta
Docente de Matemática
Pontificia Universidad Javeriana
Bogotá, Colombia

Homenaje especial al Dr. Francisco Soler Fajardo
(Q.E.P.D), por el gran legado en sus publicaciones
y con especial aprecio y cariño a nuestras familias,
por su comprensión, estímulo y sacrificio.

Reconocimientos

Hacemos llegar un reconocimiento especial al Brigadier General Hugo Rodríguez Durán, Rector de la Universidad Militar Nueva Granada; a los doctores Rodrigo Noguera Laborde, Rector de la Universidad Sergio Arboleda de Bogotá y al doctor Germán Quintero Andrade Vicerrector Académico de la misma universidad por su permanente estímulo.

Al doctor Rodrigo Noguera Calderón, Rector Adjunto de la Universidad Sergio Arboleda de Bogotá, por su invaluable apoyo en la edición de esta obra.

Al doctor Fernando Novoa, Director del Departamento de Matemática y Estadística de la Pontificia Universidad Javeriana de Bogotá, por su respaldo al éxito de esta obra.

Al doctor Reinaldo Núñez, Director de la Escuela de Matemáticas de la Universidad Sergio Arboleda de Bogotá por sus valiosas sugerencias y comentarios sobre los diversos temas de qué trata esta obra.

A la doctora Edel Serrano Iglesias, Directora del Departamento de Matemáticas de la Universidad Central de Bogotá.

Al doctor Mauricio Retrepo López, Director del Departamento de Matemáticas de la Universidad Militar Nueva Granada.

A los profesores Nestor Pedraza Colmenares, Pontificia Universidad Javeriana, Universidad de Bogotá Jorge Tadeo Lozano y Harold Noriega Usta, profesor de la Pontificia Universidad Javeriana de Bogotá, por la revisión técnica que hicieron a los manuscritos de esta edición.

Así mismo a los profesores Wilson Orlando Urrego Garzón (Q.E.P.D), Universidad Nacional a Distancia UNAD; Numael Ramírez, Fabio Castellanos, Ricardo Bernal, Ricardo de Armas, Davis Macías y Carlos Julio Novoa Martínez de la Universidad

Central de Bogotá; Adrián Ricardo Gómez Plata, Lucia Gutiérrez, Amed Alfonso Alfonso, Arturo Ramírez Baracaldo, Carlos Mora y Jorge Orlando Cuervo de la Universidad Militar Nueva Granada; Luis Enrique Rojas Cárdenas, Pontificia Universidad Javeriana, por la adición de problemas que aportaron a esta edición.

Queremos expresar nuestro agradecimiento a los siguientes profesores que nos han prestado su ayuda a lo largo de las diversas etapas de elaboración de la presente obra; sus muestras de apoyo, sus críticas y sugerencias han tenido para nosotros un valor inestimable:

- Norma Constanza Sarmiento, Pontificia Universidad Javeriana
- Gloria E. Rodríguez de Granados, Fundación Universidad Agraria de Colombia, Universidad Santo Tomás.
- Ricardo Bernal Bueno, Universidad Central de Bogotá, Universidad Jorge Tadeo Lozano de Bogotá.

Con gratitud a nuestros alumnos de la Universidad Sergio Arboleda, la Pontificia Universidad Javeriana y la Universidad Central de Bogotá, por sus sugerencias en el desarrollo y correcciones de los manuscritos de esta obra.

Contenido

Introducción ..... **XIX**

1. Matrices 1
Introducción 2
Objetivos 2
1.1 Matrices 3
Matriz cuadrada 4
Igualdad de matrices 5
Matriz nula 6
Ejercicio 1.1 6
1.2 Operaciones entre matrices 7
Suma algebraica de matrices 7
Multiplicación de una matriz por un escalar 8
Inverso aditivo de una matriz 8
Símbolo de sumatoria o notación sigma 11
Propiedades de la sumatoria 12
Expresión abreviada de productos matriciales 14
Producto de matrices 15
Ejercicio 1.2 17
1.3 Propiedades de las operaciones entre matrices 28
Ejercicio 1.3 30

1.4 Tipos especiales de matrices 31
Diagonal principal 31
Matriz triangular superior 31
Matriz triangular inferior 31
Matriz triangular 31
Matriz diagonal 32
Matriz escalar 32
Matriz identidad 32
Matrices que conmutan 33
Matriz idempotente 33
Matriz nilpotente 33
Ejercicio 1.4 34
1.5 Matriz traspuesta y propiedades de la traspuesta 35
Matriz simétrica y antisimétrica 36
Ejercicio 1.5 38
Ejercicios Complementarios 39
Cuestionario 41
1.6 Taller de Informática con uso de DERIVE 43
Creación de una matriz 43
Operaciones entre matrices 45
Multiplicación de una matriz por un escalar 46
Multiplicación de matrices 47
Definición de una matriz mediante fórmula 49
Utilización de la sumatoria 50
Traza de una matriz 52
Matriz identidad de orden $n \times n$ 53
Matriz traspuesta 54
1.7 Taller de informática con uso de Excel 56
Creación de una matriz 56
Operaciones entre matrices 57
Multiplicación de una matriz por un escalar 59
Multiplicación de matrices 61
Resumen 66
Glosario 69

2. Sistemas de ecuaciones lineales 71
Introducción 73
Objetivos 73
2.1 Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos variables 74
Ejercicio 2.1 79
2.2 Sistemas de m ecuaciones lineales con n variables 80
Solución de un sistema de m ecuaciones con n variables 81

Sistemas consistentes e inconsistentes 82
Expresiones matriciales de un sistema de ecuaciones lineales 82
Sistemas equivalentes 84
Ejercicio 2.2 84
Método de eliminación de Gauss y Gauss-Jordan 85
Operaciones elementales entre filas 85
Matriz aumentada 90
Matriz escalonada 91
Matriz escalonada reducida 92
Método de Gauss 92
Método de Gauss-Jordan 100
Múltiples soluciones 109
Rango de una matriz 111
Estudio del tipo de solución de un sistema no homogéneo 112
Determinación del tipo de solución de un sistema de ecuaciones lineales 112
Ejercicio 2.3 116
2.4 Sistemas lineales homogéneos 123
Estudio del tipo de solución de un sistema homogéneo 123
Ejercicio 2.4 125
2.5 Matriz inversa 125
Procedimiento para hallar la inversa de una matriz A, aplicando el método de Gauss-Jordan 127
Inversa de una matriz 2 x 2 130
Solución de un sistema de ecuaciones utilizando la inversa de la inversa de la matriz de coeficientes 133
Propiedades de la matriz inversa 135
Relación entre inversas y sistemas de ecuaciones 138
Ejercicio 2.5 140
Ejercicios complementarios 142
Cuestionario 143
2.6 Taller de informática con uso de "DERIVE" 145
Operaciones elementales entre filas 145
Multiplicar una fila de una matriz por un escalar 146
Restar a la fila **i** de la matriz A, ***c*** veces la fila ***j*** de A 147
Rango de una matriz 154
Inversa de una matriz 156
2.7 Taller de informática con uso de "Excel" 157
Inversa de una matriz 157
Solución de un sistema de ***m*** ecuaciones lineales con ***m*** variables 158
Resumen 162
Glosario 164

3. Determinantes 165
Introducción 166
Objetivos 166
Determinantes de orden 2x2 y 3x3 167
3.1 Determinantes de orden 3x3 169
Regla de Sarrus para calcular un determinante de orden 3 x 3 170
Ejercicio 3.1 171
3.2 Determinantes de orden ***n x n*** 172
Menor ***i,j*** 172
Cofactor ***i,j*** 173
Matriz de cofactores 173
Signos de los cofactores 175
Determinantes de orden ***n x n*** 176
Ejercicio 3.2 180
3.3 Propiedades de los determinantes 182
Ejercicio 3.3 189
3.4 Matriz Adjunta y matriz inversa 190
Propiedad de la matriz adjunta 191
Cálculo de la matriz inversa utilizando la adjunta 191
Matriz insumo producto de Leontief 192
Ejercicio 3.4 197
3.5 Regla de Cramer 201
Regla de Cramer para sistemas 2 x 2 201
Regla de Cramer para sistemas 3 x 3 202
Ejercicio 3.5 206
Ejercicios Complementarios 209
Cuestionario 212
3.6 Taller de Informática con uso de DERIVE 214
Cálculo de un determinante 214
Menor ***i*** , ***j*** de una matriz ***Mij*** 214
Cofactor ***i*** , ***j*** de una matriz. ***Cij*** 215
Matriz Adjunta. (adj (A)) 216
3.7 Taller de informática con uso de Excel 220
Cálculo del determinante de una matriz cuadrada 220
Verificación de algunas propiedades de los determinantes 221
Solución de un sistema de ***m*** ecuaciones lineales con ***m*** variables utilizando la regla de Cramer 223
Resumen 226
Glosario 228

4. Introducción a la Programación Lineal 229
Introducción 232
Objetivos 232

4.1 Desigualdades lineales 233
Gráfica de una desigualdad lineal en dos variables 233
Recta vertical 233
Recta horizontal 235
Recta oblicua 237
Semiplano abierto 240
Semiplano cerrado 240
Desigualdades lineales simultáneas con dos variables 242
Propiedad de las desigualdades 245
Ejercicio 4.1 253
4.2 Problema estándar de Programación Lineal (PL) y Método Gráfico 258
Modelo de Programación Lineal en forma general 258
Método gráfico 261
Región Factible 261
Punto de Esquina o Vértice de la Región Factible 261
Pasos para resolver un problema con Método Gráfico 261
Determinación de la Solución Óptima algebraicamente 268
Teorema de Programación Lineal 270
Otro método de solución 270
Problema de Mínimo con el Método Gráfico 272
Ejercicio 4.2 276
4.3 Problemas con Múltiples Soluciones No Acotados y Degenerados 282
CASO I. Soluciones óptimas-múltiples 283
CASO II. No Factibilidad 283
CASO III. No Acotamiento 284
Ejercicio 4.3 285
4.4 Taller de informática con uso de Excel 289
Problema de maximización 289
4.5 Taller de informática con uso de QSB 296
Problema de maximización 296
Problema de minimización 301
Resumen 304
Glosario 306

5. PLANTEAMIENTO DE MODELOS DE PROGRAMACIÓN LINEAL 309
Modelos de programación lineal 310
Introducción 311
Objetivos 311
5.1 Problema de la dieta 312
5.2 Problema del transporte 313
5.3 Problema de asignación 316
5.4 Problema del excursionista 317

5.5 Problema financiero 318
5.6 Planificación de personal 320
5.7 Problema de mercadotecnia 323
5.8 Problema de producción 326
5.9 Problema de mezclas 330
5.10 Proyecto de finanzas 331
5.11 Aplicaciones contables 334
Problemas propuestos 337
5.12 Taller de Informática con QSB 350
5.13 Taller de informática con uso de EXCEL 362

6. MÉTODO SIMPLEX 371
Introducción 372
Objetivos 372
6.1 Conceptos básicos del Método Simplex 373
Variable de holgura 374
Problema original sin variables de holgura 375
Problema de programación lineal con variables de holgura 375
Variables básicas y solución básica 375
Solución básica factible 377
6.2 Tabla simplex inicial 378
Columna pivote y fila pivote 384
Elemento pivote 384
Operaciones elementales entre filas 385
Finalización de las iteraciones en el método simplex 388
Interpretación de los resultados 390
6.3 Comparación del método simplex con el método gráfico 390
6.4 Restricciones con desigualdades del tipo mayor o igual 393
6.5 Solución de problemas de minimización con el método simplex 401
Planteamiento del modelo 401
6.6 Casos especiales 403
Múltiples soluciones 403
Modelo de no factibilidad 408
No acotamiento 411
Ejercicios 413
6.7 Taller de Infomática con uso de QSB 425
Resumen 428
Glosario 429

7. ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD Y DUALIDAD 431
Introducción 432
Objetivos 432

7.1 Análisis de sensibilidad con método gráfico 433
Cambios en un coeficiente de la función objetivo 433
Intervalo de optimalidad 433
Cambios en los términos independientes de una restricción (Lados derechos) 437
Precio sombra 438
Análisis de sensibilidad con el método simplex 438
Intervalo de optimalidad para variables básicas 438
Intervalo de optimalidad para variables no básicas 442
Cambios en el lado derecho de una restricción 443
Precio sombra 443
Método para calcular los intervalos de factibilidad 446
Método para restricciones menor o igual 446
Método para restricciones mayor o igual 446
El problema dual 449
Relación entre el primal y el dual 450
Forma general del problema dual 450
Forma estándar 454
Interpretación económica de las variables duales 457
Dual para el primal con cualquier tipo de restricción 460
Ejercicios 462
7.2 Taller de Informática con uso de QSB 470
Resumen 476
Glosario 477

8. TRANSPORTE, ASIGNACIÓN, TRANSBORDO Y PERT/CPM 479
Origen de la programación lineal 479
Introducción 482
Objetivos 482
8.1 Modelo de transporte 483
8.2 Modelo generalizado de transporte 483
Planteamiento de la función objetivo 488
Restricciones de oferta 488
Restricciones de demanda 489
Planteamiento del modelo de transporte 489
Método del cruce del arroyo 489
FASE 1 490
Índice de mejoramiento 493
Resumen 495
Mejoramiento de la solución pendiente 498
Resumen del problema 502
8.3 Modelo de transporte no equilibrado 502

8.4 Problema de asignación 510
Red de modelo de asignación del problema de proyectos de monografías 512
Planteamiento de la función objetivo 513
8.5 Modelo general de programación lineal para el problema de asignación 515
8.6 Método Húngaro 515
Pasos de método Húngaro 516
PASO I. Reducción de filas 516
PASO II. Reducción de columnas 517
Prueba de optimalidad 518
PASO III. Determinar si el problema es óptimo 518
PASO IV. Reducciones posteriores 518
PASO V. Solución óptima 519
Resumen del método Húngaro en un diagrama de flujo 521
8.7 Problema de transbordo 522
8.8 PERT/CPM 527
Tiempos próximos 529
Tiempo próximo de iniciación 532
Tiempos lejanos 533
Tiempo lejano de terminación 536
Holgura de una actividad 537
Ruta crítica 537
Cálculo de la ruta crítica 539
Ejercicios 542
8.9 Taller de informática con uso de "QSB" 552
Problema de transporte 552
Problema de asignación 559
Problema de PERT/CPM 565
Resumen 571
Glosario 572

RESPUESTAS A ALGUNOS EJERCICIOS Y PROBLEMAS 573

En el Complemento Virtual del SIL (***Sistema de Información en Línea***) podrá encontrar los archivos como apéndices y resúmenes de fórmulas que se utilizan a lo largo del libro, en los cuales, además del ejemplo resuelto, se incluyen ejercicios complementarios de la situación que se está estudiando.



Introducción

En la actualidad las compañías manejan proyectos de gran envergadura, donde intervienen una cantidad considerable de variables, las cuales en muchos casos están relacionadas entre sí por ecuaciones o inecuaciones lineales.

En el desarrollo de un proyecto empresarial es necesario efectuar diferentes procesos, los cuales generan gran cantidad de datos numéricos, que únicamente pueden ser procesados en forma computacional, mediante el uso de matrices y sistemas de ecuaciones e inecuaciones lineales.

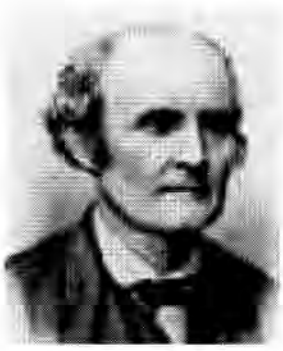
Por las razones anteriormente expuestas nos propusimos la tarea de escribir el libro de Algebra Lineal con una introducción a la Programación lineal, desarrollado para estudiantes de Ciencias administrativas, Contables y Financieras con el objeto de proporcionar al alumno técnicas para resolver problemas operativos y darle alternativas y soluciones en el entorno empresarial, asesorando a diversas entidades sobre la forma de manejar mejor sus recursos y hacer planes de inversión.

La utilización de la tecnología es fundamental en el desarrollo del curso de Álgebra Lineal, ya que el estudiante afianza sus conocimientos resolviendo problemas en forma computacional, abandonando en parte los cálculos manuales, largos y tediosos y dedicándose más al aprendizaje de los conceptos.

En las secciones de tecnología al final de cada capítulo se utiliza DERIVE, Q.S.B o EXCEL, programas bajo ambiente Windows, reconocidos a nivel mundial y de fácil manejo y acceso para estudiantes y profesores.

1 Matrices

Arthur Cayley. Nació en Richmond, Surres, Inglaterra el 16 de agosto de 1821, y murió en Cambridge, Inglaterra el 26 de enero de 1895. Estudió en el King´s College y en el Trinity College. En 1842, se graduó con todos los honores. Mas tarde fue a la escuela de leyes, y en 1849 se graduó como abogado. A comienzos de su carrera, mientras se dedicaba al estudio y a la práctica del derecho, realizó algunos de sus descubrimientos matemáticos más brillantes.



Cayley

Su profesión de abogado le permitió vivir confortablemente, profesión que practicó durante 14 años, y escribió aproximadamente 300 textos de matemática.

En 1857 desarrolló el **Álgebra de Matrices**. Es considerado como el tercer escritor más prolífico de matemáticas, siendo sólo superado por Euler y Cauchy. Hizo importantes contribuciones en la Teoría de curvas y superficies, y en geometría analítica. En 1863 fue profesor de matemáticas puras en Cambridge. Sus trabajos en geometría cuatridimensional, proporcionaron a los físicos del siglo XX, especialmente Albert Einstein, la estructura para desarrollar la Teoría de la Relatividad.

Cayley trabajó en matemática, dinámica teórica y en astronomía matemática. En 1876, publicó su único libro, **Tratado sobre Funciones Elípticas. Escribió 966 textos; hay 13 volúmenes coleccionados de esos textos.**

Junto con J.J. Sylvester, su amigo de toda la vida, es considerado el fundador de la **Teoría de los Invariantes Algebraicos** y sus memorias están recogidas en los trece volúmenes publicados en Cambridge después de su muerte, con el título de **"The collected mathematical Papers"**. Hizo aportes a la **Teoría de los Determinantes**. Probó muchos teoremas importantes de la **Teoría de Matrices de Cayley-Hamilton**.

Introducción

En este capítulo hacemos una introducción al estudio de las matrices clasificándolas según sus características, definiendo las operaciones entre ellas y aplicando sus propiedades.

Se introduce una serie de aplicaciones de matrices mediante problemas de valoración de inventarios, producción, costo de transporte, costo de materias primas etc.

Se define la sumatoria y sus propiedades como concepto de apoyo para el lector en la multiplicación de matrices.

Por último se involucró un taller de informática con los paquetes computacionales *Excel y Derive versión 5.0*, haciendo énfasis en las operaciones entre matrices, y cómo calcular sumatorias con *Derive*.

Objetivos

- Reconocer el concepto de matriz e identificar sus elementos
- Identificar algunos tipos especiales de matrices y sus propiedades.
- Manejar operaciones algebraicas definidas en las matrices y sus propiedades
- Mostrar algunas aplicaciones de las matrices
- Aplicar los programas computacionales Derive y Excel en el manejo de operaciones entre matrices.

1.1 MATRICES

Matriz: una matriz es un arreglo rectangular de elementos de un conjunto determinado dispuestos en filas y columnas. Si el conjunto al que pertenecen los elementos son los números reales, entonces tenemos una matriz de números reales.

Si la matriz A tiene m filas y n columnas,se dice que es de orden m x n y se denota de las siguientes formas:

$$A = [a_{ij}]_{m\,x\,n}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\,x\,n}$$

a_{ij} representa el elemento en la fila i y la columna j.

Ejemplo 1.

$$\text{Sea } A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 20 & 8 \\ 4 & -1 & 7 & 0 \\ 9 & 30 & 18 & 19 \end{bmatrix}$$

- El elemento $a_{11} = 3$ está ubicado en la fila 1 columna 1.
- $a_{34} = 19$ es el elemento de la fila 3 y la columna 4.
- La *matriz A* es de orden 3 x 4 porque tiene 3 filas, 4 columnas.

Matriz
Es un arreglo rectangular de números reales dispuestos en filas y columnas

Ejemplo 2.

Los siguientes arreglos son matrices:

$A = [1 \;\; 3 \;\; -5 \;\; 0]$ *A* es una matriz de orden 1x4.Usualmente a las matrices que tienen solamente una fila, se les llama *matriz fila o vector fila.*

$B = \begin{bmatrix} 2 \\ \sqrt{2} \\ 8 \end{bmatrix}$ *B* es de orden 3x1 Las matrices que tienen una sóla columna, se les llama *matriz columna o vector columna*

$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ *C* es una matriz de orden 3 x 3.

$D = [7]$ *D* es una matriz de orden 1 x 1.

Ejemplo 3. Halle los elementos de la matriz $A = [a_{ij}]$ de orden 2 x 3, donde $a_{ij} = i^2 - j$

Solución. Escribamos la matriz A de la forma:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}, \text{ con } a_{ij} = i^2 - j, \text{ por lo tanto:}$$

para a_{11} tenemos que $i = 1$ y $j = 1$, $a_{11} = 1^2 - 1 = 1 - 1 = 0$;
para a_{12} tenemos que $i = 1$ y $j = 2$, $a_{12} = 1^2 - 2 = 1 - 2 = -1$;

Diagonal principal
Está formada por los elementos: a_{11}, a_{22}, a_{33}, ..., a_{nn} de una matriz cuadrada

continuando así:
$$a_{13} = 1^2 - 3 = 1 - 3 = -2$$
$$a_{21} = 2^2 - 1 = 4 - 1 = 3$$
$$a_{22} = 2^2 - 2 = 4 - 2 = 2$$
$$a_{23} = 2^2 - 3 = 4 - 3 = 1$$

reemplazando estos valores en la matriz A, tenemos

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz cuadrada. Cuando el número de filas de una matriz *A* es igual al número de columnas ($m = n$) se dice que *A* es una matriz cuadrada de orden *n*.

La *diagonal principal* de una matriz cuadrada está formada por los elementos a_{11}, a_{22}, a_{33}, ..., a_{nn}; la suma de estos elementos se llama *Traza de la matriz* y se nota *tr (A)*.

Ejemplo 4. Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$

A es una matriz de orden 2 x 2 y tiene el mismo número de filas y de columnas

Los elementos $a_{11} = 2$ y $a_{22} = 7$ conforman la diagonal principal. Luego la *Traza de A* es:

$$tr\,(A) = a_{11} + a_{22} = 2 + 7 = 9$$

Traza de una matriz
Se define como la suma de los elementos de la diagonal principal.

Igualdad de matrices

Sean $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ y $B\ [b_{ij}]_{m\times n}$. A = B si y solo si $a_{ij} = b_{ij}$, *para* $i = 1, 2, 3, ..., m$ y $j = 1, 2, 3, ..., n$.

Ejemplo 5. Sean $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$

Matriz cuadrada
Si el número de filas y columnas de una matriz A son iguales

Las matrices A y B tienen orden 2 × 2, y además $A = B$ si se cumple:

$$x = 2 \qquad y = 4$$
$$z = 6 \qquad w = -1$$

Ejemplo 6. Determine los valores de m, n, r y t, tal que C = D.

$$C = \begin{bmatrix} 2m+n & 3r \\ 4t+1 & m-n \end{bmatrix} \quad ; \quad D = \begin{bmatrix} m-1 & r+2 \\ t-3 & n+4 \end{bmatrix}$$

Solución. Para que se cumpla la igualdad C = D, se debe dar:

1o. $2m + n = m - 1$; **2o.** $3r = r + 2$

3o. $4t + 1 = t - 3$ **4o.** $m - n = n + 4$

Simplificando las ecuaciones tenemos:

(1) $2m + n - m = -1$; $m + n = -1$

(2) $3r - r = 2$; $2r = 2$; $r = 1$

(3) $4t - t = -3 - 1$; $3t = -4$; $t = -\frac{4}{3}$

(4) $m - n - n = 4$; $m - 2n = 4$

Matrices iguales
Tienen el mismo orden y los elementos correspondientes son iguales entre sí

De la ecuaciones (2) y (3) encontramos que $r = 1$ y $t = -\frac{4}{3}$.

Para hallar m y n, consideramos el sistema de ecuaciones lineales dado por las ecuaciones (1) y (4):

(1) $m + n = -1$. Multiplicando la ecuación (4) por (−1), y sumando miembro a

(4) $m - 2n = 4$. Miembro las dos ecuaciones, obtenemos:

$m + n = -1$
$(-1)(m - 2n) = (-1)(4)$

$$\begin{array}{rl} m + n & = -1 \\ -m + 2n & = -4 \\ \hline 3n & = -5 \\ n & = -\frac{5}{3} \end{array}$$

Reemplazando n por $(-\frac{5}{3})$ en la ecuación (1), obtenemos:

$$\begin{aligned} m + (-\tfrac{5}{3}) &= -1 \\ m &= -1 + \tfrac{5}{3} \\ m &= \frac{-3+5}{3} \\ m &= \tfrac{2}{3} \end{aligned}$$

Los valores obtenidos son: $m = \frac{2}{3}$, $n = -\frac{5}{3}$, $r = 1$ y $t = -\frac{4}{3}$; con lo cual reemplazando en la matriz D, tenemos:

$$C = D = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} - 1 & 1 + 2 \\ -\frac{4}{3} - 3 & -\frac{5}{3} + 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 3 \\ -\frac{13}{3} & \frac{7}{3} \end{bmatrix}$$

Matriz nula. Es la que tiene todos sus elementos iguales a cero y la representamos como: $0_{m \times n}$

Ejemplo 7. La matriz nula de orden 2 x 5 es

$$0_{2\times 5} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 5}$$

Ejercicio 1.1

Matriz nula
Todos los elementos de la matriz son iguales a cero.

1. Sea A una matriz, la traza de A, denotada por tr (A) se define como la suma de los elementos de su diagonal principal.

   a) Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & 3 & -6 \\ 2 & 9 & -4 \end{bmatrix}$, calcule tr (A)

   b) Si $B = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$, calcule tr (B)

2. Halle los elementos de las matrices $A = [a_{ij}]_{2x3}$, $B = [b_{ij}]_{3x2}$, donde: $a_{ij} = i^2 + j$, $b_{ij} = 2i - j$

3. Determine los valores de x, y, z y w ,tal que A = B, donde:

$$A=\begin{bmatrix} x+2y & -w+2z \\ 3+w & 5x-y \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2w+z & 3y-1 \end{bmatrix}$$

4. Escriba completamente los elementos de la matriz: $A = [a_{ij}]_{2x3}$, con

$$a_{ij} = (-1)^{i+j}\left[\frac{1}{i+j}\right]$$

5. Construya una matriz $A = [a_{ij}]$ si A es 3 x 4, y $a_{ij} = 2i + 3j$

6. Si $A = [a_{ij}]$, tiene orden 3 x 4 , y $a_{ij} = i + j$, encuentre A.

7. Encuentre los componentes de la matriz $A = [a_{ij}]$ si A es 2 x 2 y $a_{ij} = i + j$

8. Obtenga los componentes de la matriz $A = [a_{ij}]$, si A es 2 x 3 y $a_{ij} = (-1)^{(i+j)}$

Suma de matrices
Sean A y B dos matrices de orden m x n, se define $A + B = C$ de m x n, donde $a_{ij} + b_{ij} = c_{ij}$

1.2 OPERACIONES ENTRE MATRICES

Suma algebraica de matrices

Sean $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ y $B = [b_{ij}]_{m \times n}$, se define $A + B = [c_{ij}]_{m \times n}$, donde $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, lo cual significa que el elemento en la fila i columna j de A + B, se obtiene sumando el elemento en la fila i columna j de A con el elemento en la fila i columna j de B.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ y } B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\text{entonces: } A+B=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 1. Sean $A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 4\\ 1 & 3 & 2\\ 6 & 2 & 5\end{bmatrix}$ y $B\begin{bmatrix}1 & 3 & -1\\ 1 & 5 & 4\\ -1 & 3 & 4\end{bmatrix}$, calcular A+B

Solución. $A+B=\begin{bmatrix}2+1 & -1+3 & 4-1\\ 1+1 & 3+5 & 2+4\\ 6-1 & 2+3 & 5+4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 2 & 3\\ 2 & 8 & 6\\ 5 & 5 & 9\end{bmatrix}$

Multiplicación de una matriz por un escalar

Sea $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ y k un *escalar*, entonces el producto del escalar k por la matriz A es otra matriz $kA=[c_{ij}]_{m\times n}$, donde $c_{ij}=ka_{ij}$, es decir que cada elemento de kA es igual al producto del escalar k por el correspondiente elemento de la matriz A .

Escalar
Es un número real

Si A: $\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}$ y k es un escalar

$$k\cdot A=\begin{bmatrix}ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n}\\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn}\end{bmatrix}$$

Producto de una matriz por un escalar
Sea A una matriz de orden $m \times n$ y k un escalar, el producto de una matriz por un escalar se define $kA=[c_{ij}]_{m\times n}$ donde $c_{ij}=ka_{ij}$.

Ejemplo 2. Si $A=\begin{bmatrix}3 & -1 & 4\\ 5 & 2 & 1\end{bmatrix}$ y $k=-5$ calcular: $-5A$

Solución: $-5A=\begin{bmatrix}(-5)(3) & (-5)(-1) & (-5)(4)\\ (-5)(5) & (-5)(2) & (-5)(1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-15 & 5 & -20\\ -25 & -10 & -5\end{bmatrix}$

Inverso aditivo de una matriz

Sea A una matriz de orden $m \times n$. El inverso aditivo u opuesto de A es la matriz $-A=(-1)A$

Ejemplo 3.

Sean $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & -3\\ 5 & -1\end{bmatrix}$ y $B=\begin{bmatrix}3 & 3\\ 1 & 4\\ 5 & -2\end{bmatrix}$ calcular:

a) $A+B$
b) $A+(-1)B$
c) $2A+3B$
d) $A+(-1)A$

Solución:

a) $A+B=\begin{bmatrix}1+3 & 2+3\\ 1+1 & -3+4\\ 5+5 & -1-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 5\\ 2 & 1\\ 10 & -3\end{bmatrix}$

b) $(-1)B=(-1)\begin{bmatrix}3 & 3\\ 1 & 4\\ 5 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & -3\\ -1 & -4\\ -5 & 2\end{bmatrix}$,

así que: $A+(-1)B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & -3\\ 5 & -1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-3 & -3\\ -1 & -4\\ -5 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & -1\\ 0 & -7\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

Opuesto de una matriz
Es la matriz:
$-A=(-1)A$

c) $2A+3B=2\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & -3\\ 5 & -1\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}3 & 3\\ 1 & 4\\ 5 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 2 & -6\\ 10 & -2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}9 & 9\\ 3 & 12\\ 15 & -6\end{bmatrix}$

por lo tanto: $2A+3B=\begin{bmatrix}11 & 13\\ 5 & 6\\ 25 & -8\end{bmatrix}$

d) $A+(-1)A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & -3\\ 5 & -1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1 & -2\\ -1 & 3\\ -5 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

Ejemplo 4. Encuentre los valores de x, y, z y w, tales que:

$$\begin{bmatrix}2x & y\\ -z & z+w\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}3 & x+2\\ z & w-1\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}4 & 2\\ y-5 & w\end{bmatrix}$$

Solución. Efectuando las operaciones indicadas tenemos:

$$\begin{bmatrix}2x & y\\ -z & z+w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 2x+4\\ 2z & 2w-2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}12 & 6\\ 3y-15 & 3w\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2x & y \\ -z & z+w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 2x+10 \\ 2z+3y-15 & 5w-2 \end{bmatrix}$$

Las matrices anteriores son iguales siempre y cuando los elementos correspondientes sean iguales, luego:

(1) $2x = 18$ **(2)** $y = 2x + 10$ **(3)** $-z = 2z + 3y - 15$ **(4)** $z + w = 5w - 2$

simplificando las ecuaciones tenemos:

(1) $2x = 18$ **(2)** $y = 2x + 10$ **(3)** $-z - 2z = 3y - 15$ **(4)** $w - 5w = -z - 2$

$x = 9$

$-3z = 3y - 15$ $\quad -4w = -z - 2$

$3z = -3y + 15$ $\quad 4w = z + 2$

$z = \dfrac{-3y + 15}{3}$ $\quad w = \dfrac{z + 2}{4}$

$z = -y + 5$

De la ecuación **(1)** tenemos: $x = 9$

Reemplazando este valor en la ecuación **(2)**: obtenemos $y = 2(9) + 10 = 18 + 10 = 28$
Sustituyendo y por 28 en la ecuación **(3)** tenemos: $z = -(28) + 5 = -23$

Sustituyendo z por -23 en la ecuación **(4)** tenemos: $w = \dfrac{-23 + 2}{4} = \dfrac{-21}{4}$

Los valores obtenidos son: $x = 9$, $y = 28$, $z = -23$, $w = -\dfrac{21}{4}$

Ejemplo 5. Una empresa que fabrica computadores produce tres modelos con diferentes capacidades en memoria RAM. La producción (en miles) se realiza en dos plantas A y B.

La capacidad de producción de computadores (miles de unidades) en cada planta por modelo y capacidad de memoria se muestra en las siguientes tablas.

PLANTA A	Modelo I	Modelo II	Modelo III
64 RAM	4	9	7
32 RAM	6	20	1
128 RAM	7	2	3

PLANTA B	Modelo I	Modelo II	Modelo III
64 RAM	7	4	6
32 RAM	2	9	12
128 RAM	8	2	4

a) ¿Cual es la capacidad total de producción de las 2 plantas, por capacidad de memoria y por modelo?
b) Si la empresa desea incrementar la producción en la planta B en un 10%. ¿Cuál será la nueva producción?

Solución.

a) La producción total (en miles) de las dos plantas A y B se obtiene mediante la suma de las matrices.

$$A+B=\begin{bmatrix}4 & 9 & 7\\ 6 & 20 & 1\\ 7 & 2 & 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}7 & 4 & 6\\ 2 & 9 & 12\\ 8 & 2 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11 & 13 & 13\\ 8 & 29 & 13\\ 15 & 4 & 7\end{bmatrix}$$

Los elementos de la matriz A+B se pueden interpretar de la siguiente forma:

Por ejemplo el elemento de c_{11} de A+B indica que la capacidad total de las dos plantas es de 11.000 computadores con memoria 64 RAM y del Modelo I.

b) Si la planta B desea incrementar la producción (en miles) en un 10% la nueva producción está dada por la matriz.

$$1.1\,B=1.1\begin{bmatrix}7 & 4 & 6\\ 2 & 9 & 12\\ 8 & 2 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7.7 & 4.4 & 6.6\\ 2.2 & 9.9 & 13.2\\ 8.8 & 2.2 & 4.4\end{bmatrix}$$

Sigma
Es el símbolo denotado por Σ, que significa sumar en forma abreviada

Esto significa por ejemplo que hay c_{23} = 13.200 computadores Modelo III y con una capacidad de 32 RAM de memoria

Símbolo de sumatoria o notación sigma.

El símbolo de sumatoria o notación *sigma* Σ, se utiliza para representar sumas en forma abreviada.

Se lee: la sumatoria de *a* sub *i*, con *i* tomando valores de 1 hasta *n*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \underbrace{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}_{n \text{ - términos}}$$

i : índice de la sumatoria
1 : límite inferior
n : límite superior

Ejemplo 6. $\sum_{i=1}^{5} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$

Ejemplo 7. $\sum_{j=1}^{n} a_j b_j = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n$

Ejemplo 8. $\sum_{j=1}^{n}(2_j-1)=1+3+5+\ldots+(2n-1)$

Ejemplo 9. $\sum_{t=0}^{3} g(t)=g(0)+g(1)+g(2)+g(3)$

Ejemplo 10. $\sum_{i=1}^{3} 2^i = 2^1+2^2+2^3 = 2+4+8=14$

Ejemplo 11. $\sum_{i=0}^{4} \frac{(-1)^i}{i+1} = \frac{(-1)^0}{0+1}+\frac{(-1)^1}{1+1}+\frac{(-1)^2}{2+1}+\frac{(-1)^3}{3+1}+\frac{(-1)^4}{4+1}$

$$=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5} = \frac{60-30+20-15+12}{60} = \frac{47}{60}$$

Propiedades de la sumatoria

1. *Asociativa:* una sumatoria $\sum_{i=1}^{N} a_i$ se puede descomponer en dos o más sumatorias parciales, sin que se altere la suma total. Así: si $n_1 < n_2 < n_k$, se tiene:

$$\sum_{i=1}^{N} a_i = \sum_{i=1}^{n_1} a_i + \sum_{i=n_1+1}^{n_2} a_i + \sum_{i=n_2+1}^{n_3} a_i + \ldots + \sum_{i=n_k+1}^{N} a_i$$

2. *Aditiva:* $\sum_{j=1}^{n}(a_j+b_j) = \sum_{j=1}^{n} a_j + \sum_{j=1}^{n} b_j$

3. *Homogénea.* Los factores constantes se pueden extraer del símbolo de la suma así: $\sum_{t=0}^{n} c.h_t = c\sum_{t=0}^{n} h_t$

4. *Suma de una constante:* $\sum_{i=1}^{n} c = \underbrace{c+c+\ldots+c}_{n\text{ -términos}} = nc$

Propiedades de la sumatoria
- Asociativa
- Aditiva
- Homogénea

Ejemplo 12. Si $n_1 = 5$, $n_2 = 14$ y $N = 20$,

entonces: $\sum_{i=1}^{20} a_i = \sum_{i=1}^{5} a_i + \sum_{i=6}^{14} a_i + \sum_{i=15}^{20} a_i$

Ejemplo 13. Si $\sum_{i=1}^{4} a_i = 10, \sum_{i=1}^{4} b_i = 4$

Encontrar: **a)** $\sum_{i=1}^{4} (a_i + b_i)$, **b)** $\sum_{i=1}^{4} 3a_i$, **c)** $\sum_{i=1}^{4} (2a_i - 3b_i)$,

Solución. Aplicando las propiedades de la sumatoria tenemos:

a) $\sum_{i=1}^{4} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{4} a_i + \sum_{i=1}^{4} b_i = 10 + 4 = 14$

b) $\sum_{i=1}^{4} 3a_i = 3 \sum_{i=1}^{4} a_i = 3(10) = 30$

c) $\sum_{i=1}^{4} (2a_i - 3b_i) = \sum_{i=1}^{4} 2a_i + \sum_{i=1}^{4} (-3b_i) = 2 \sum_{i=1}^{4} a_i - 3 \sum_{i=1}^{4} b_i$

$= 2(10) - 3(4) = 20 - 12 = 8$

Ejemplo 14. Si $\sum_{j=1}^{10} a_i = 4$, $\sum_{j=11}^{20} a_i = -2$ Encontrar: **a)** $\sum_{j=1}^{20} a_i$ **b)** $\sum_{j=1}^{20} (5a_i + 4)$

Solución. Aplicando propiedades

a) $\sum_{j=1}^{20} a_i = \sum_{j=1}^{10} a_i + \sum_{j=11}^{20} a_i = 4 + (-2) = 2$

b) $\sum_{j=1}^{20} (5a_i + 4) = \sum_{j=1}^{20} 5a_i + \sum_{j=1}^{20} 4 = 5 \sum_{j=1}^{20} a_i + \sum_{j=1}^{20} 4$

Teniendo en cuenta que por el resultado obtenido en **a)** $\sum_{j=1}^{20} a_i = 2$ y por la propiedad de la suma de una constante $\sum_{i=1}^{n} c = nc$ tenemos $\sum_{j=1}^{20} (5a_i + 4) = 5(2) + 4(20) = 10 + 80 = 90$

Ejemplo 15. Utilizando la propiedad: $\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} \right) = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \right)$

Verifique que: $\sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{3} a_{ij} = \sum_{j=1}^{3} \sum_{i=1}^{2} a_{ij}$

Solución. Desarrollando el miembro izquierdo de la igualdad:

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} a_{ij} = \sum_{i=1}^{2}(a_{i1}+a_{i2}+a_{i3}) = (a_{11}+a_{12}+a_{13}) + (a_{21}+a_{22}+a_{23})$$

asociando y conmutando tenemos:

$$= (a_{11}+a_{21}) + (a_{12}+a_{22}) + (a_{13}+a_{23})$$

desarrollando el miembro derecho de la igualdad:

$$\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{2} a_{ij} = \sum_{j=1}^{3}(a_{1j}+a_{2j}) = (a_{11}+a_{21})+(a_{12}+a_{22})+(a_{13}+a_{23})$$

Al desarrollar los dos miembros de la igualdad obtenemos el mismo resultado, por lo tanto: $\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} a_{ij} = \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{2} a_{ij}$

Expresión abreviada de productos matriciales.

El producto de una matriz fila de orden 1 x n y una matriz columna de orden n x 1 se define como:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \ldots a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n$$

Como el producto es una matriz de orden 1x1 omitiremos el paréntesis en el resultado. Este producto se simboliza así:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \ldots a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_ib_i$$

Ejemplo 16. Si $A = [3\ 2\ 4\ 6]$ y $B = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ determine *AB*

Solución: $AB = [3\ 2\ 4\ 6] \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = (3 \times 7) + (2 \times 2) + (4 \times 4) + (6 \times 1) = 47$

Para matrices de orden 1 x 1 omitiremos el paréntesis.

Producto de matrices realizable o conforme Cuando el número de columnas de A es igual al número de filas de B.

Ejemplo 17. Una empresa que fabrica escritorios emplea tres insumos: madera, aluminio, y hierro.

Sea A la matriz fila con el número de unidades respectivas de cada insumo necesarias para producir un escritorio:

	madera	aluminio	hierro		
A = [	3	2	1	]	unidades

Y sea la matriz columna B de costo por unidad de cada insumo respectivamente (unidades en miles de pesos)

Costo por unidad

$$B = \begin{bmatrix} 7 \\ 20 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{Madera} \\ \text{Aluminio} \\ \text{Hierro} \end{matrix}$$

Se quiere saber cual es el costo total de producir un 1 escritorio.

Solución. $AB = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 20 \\ 4 \end{bmatrix} = 21 + 40 + 4 = 65$

Significa que el costo para producir un escritorio es de $65.000

Producto de matrices

Sean $A = [a_{ij}]$ una matriz de orden $m \times p$ y $B = [b_{ij}]$ una matriz de orden $p \times n$. El producto AB se define como la matriz $C = [c_{ij}]$ de orden $m \times n$, donde el elemento i, j-ésimo c_{ij} viene dado por:

$$c_{ij} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix}}_{\text{fila } i \text{ de } A} \underbrace{\begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix}}_{\text{columna } j \text{ de } B} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

Nota: decimos que A es conforme con B para la multiplicación A • B, cuando el número de *columnas de A es igual a número de filas de B.*

Ejemplo 18. Considere las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 5 \\ 7 & 8 & 9 & 9 \\ 7 & 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

4 columnas

$$B = \begin{bmatrix} 7 & 7 & 8 & 6 & 9 & 7 & 1 \\ 2 & 4 & 9 & 7 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 6 & 10 & 2 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 1 & 4 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{matrix}$$

4 filas

La multiplicación AB se puede realizar puesto que la matriz A tiene 4 columnas y B tiene 4 filas. Mientras que el producto B • A no está definido porque el número de columnas de B no es igual al número de filas de A. (B tiene 7 columnas y A tiene 3 filas)

Ejemplo 19. Calcular A • B y B • A, si existen:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

Solución. La matriz A es de orden 2 x 2 y B de orden 2 x 3 luego la matriz C = A • B está definida y es de orden 2 x 3, puesto que el número de columnas de A es igual al número de filas de B.

$$\text{Sea} \quad C = A \cdot B \text{ donde } C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix}$$

Para determinar el elemento c_{ij} de la matriz C se multiplica la i-ésima fila de A, por la j-ésima columna de B.

Por ejemplo para calcular c_{21} se suman los productos entre los elementos la fila 2 de A y los elementos correspondientes de la primera columna de B así:

$$c_{21} = \begin{bmatrix} 7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = 28 + 2 = 30$$

Al realizar la multiplicación con todo detalle tenemos :

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \begin{bmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4(4)+6(2) & 4(6)+6(1) & 4(0)+6(3) \\ 7(4)+1(2) & 7(6)+1(1) & 7(0)+1(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 & 30 & 18 \\ 30 & 43 & 3 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

El producto BA no está definido porque el número de columnas de B no es igual al número de filas de A. (B tiene 3 columnas y A tiene 2 filas)

Ejemplo 20. La oficina de estadística ha indagado los precios por libra de tres leguminosas: lenteja, fríjol y garbanzo en tres tiendas: A, B, C. Los precios en este orden de los productos son: para la tienda A: \$1.500, \$2.300, \$2.000; para la tienda B: \$1.200, \$3.000, \$2.000; para la tienda C: \$1.300, \$2.000, \$1.800. La oficina quiere saber el costo total que una persona tiene que pagar en cada tienda por la compra de 5 libras de lenteja, 3 libras de fríjol y 4 libras de garbanzo.

Solución. Representamos por A la matriz de precios por tienda y por producto y por B la matriz correspondiente al número de libras requeridas de cada producto.

$$\begin{array}{r} \\ \text{tienda A} \\ \text{tienda B} \\ \text{tienda C} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{lenteja} & \text{fríjol} & \text{garbanzo} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1500 & 2300 & 2000 \\ 1200 & 3000 & 2000 \\ 1300 & 2000 & 1800 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{r} \\ \text{lenteja} \\ \text{fríjol} \\ \text{garbanzo} \end{array} \begin{array}{c} \text{N° de libras} \\ \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \end{array}$$

Luego el producto AB representa la matriz de costo por tienda.

$$\begin{bmatrix} 1500 & 2300 & 2000 \\ 1200 & 3000 & 2000 \\ 1300 & 2000 & 1800 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1500(5) + 2300(3) + 2000(4) \\ 1200(5) + 3000(3) + 2000(4) \\ 1300(5) + 2000(3) + 1800(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22400 \\ 23000 \\ 19700 \end{bmatrix}$$

Por la compra de 5 libras de lenteja, 3 libras de fríjol y 4 libras de garbanzo, se deben pagar \$22.400 en la tienda A, \$23.000 en la tienda B y \$19.700 en la tienda C.

EJERCICIO 1.2

1. Sean las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -3 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 \\ -2 & 1 & -4 \end{bmatrix}$

   Halle: **a)** A + (B+C) **b)** (A+B) + C **c)** −A + 2C **d)** A + 2B − 3C

2. Verifique que:

   a) $\sum_{k=1}^{2} a_{ik}\,(b_{kj} + c_{kj}) = \sum_{k=1}^{2} a_{ik}\,b_{kj} + \sum_{k=1}^{2} a_{ik}\,c_{kj}$

   b) $\sum_{k=1}^{2} a_{ik}\,(\sum_{h=1}^{3} b_{kh}\,c_{hj}) = \sum_{h=1}^{3} (\sum_{k=1}^{2} a_{ik}\,b_{kh})\,c_{hj}$

c) Compruebe que no es cierta la siguiente igualdad:

$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = (\sum_{k=1}^{n} a_k)(\sum_{k=1}^{n} b_k)$ Nota: tómese $n=3, a_k = \frac{1}{k}, b_k = k$

3. Halle AB, siendo:

a) $A=\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&2\\0&1&3&3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\3&1&2\end{bmatrix}$

b) $A=\begin{bmatrix}1&1&0&0&0&0\\2&1&0&0&0&0\\0&0&3&1&2&0\\0&0&1&2&1&0\\0&0&0&1&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&3&4&5&6&7\\3&4&5&6&7&8\\4&5&6&7&8&9\\9&8&7&6&5&4\\8&7&6&5&4&1\end{bmatrix}$ **c)** $A=\begin{bmatrix}1&0&3\\0&1&2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\-1&2\end{bmatrix}$

4. Halle x, y, z y w tales que $3\begin{bmatrix}x&y\\z&w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x&6\\-1&2w\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4&x+y\\z+w&3\end{bmatrix}$

5. Sean, $A=\begin{bmatrix}7&2\\1&3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}3&1\\1&5\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}-2&4\\-5&3\end{bmatrix}$, calcule:

a) A(BC) **b)** (AB)C **c)** AB + B **d)** $AA = A^2$ **e)** –3C + AC **f)** $(A+B)^2$

6. Calcule los siguientes productos a) $\begin{bmatrix}2&3&4\\-5&1&2\\4&-7&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix}2&1&5&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\1\\-3\\-5\end{bmatrix}$

7. Utilice la definición $A^n = \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n \text{ veces}}$ para calcular A^3, si: $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$

recuerde que $A^3 = A\,A^2 = AAA$

8. Sea $A=\begin{bmatrix}1&-1\\3&2\end{bmatrix}$, Halle una matriz cuadrada X de orden 2 tal que: AX = I

9. Verifique que $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{bmatrix}$ y $B=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 4 & -1\end{bmatrix}$

   Satisfacen la igualdad $(A+B)^2 = A^2 + B^2$

10. Resuelva las siguientes ecuaciones matriciales lineales, donde I_n, es la matriz. Identidad de orden n x n

$$\textbf{a)}\ 6A+3I_2=\begin{bmatrix}6 & 5\\ -2 & 4\end{bmatrix} \qquad \textbf{b)}\ 4A+6I_3=\begin{bmatrix}5 & 1 & 0\\ 3 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

11. En los siguientes problemas escriba explícitamente el significado de cada suma:

a) $\sum_{j=1}^{n} \lambda(a_j+b_j)$ **b)** $\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}\,b_j+c_j+2)$ **c)** $\sum_{j=1}^{n}(-1)^j\ a_j$

d) $\sum_{k=2}^{7}(y_k+k)$ **e)** $\sum_{k=1}^{7}(-1)^{2k}a_{2k-1}$ **f)** $\sum_{i=4}^{10}(-1)2^{2i+1}(a_{2i}+b_{i+2})$

12. Sean: $A=\begin{bmatrix}1 & 3 & -2\\ 4 & 1 & 7\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}0 & -1 & 3\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix}$ $C=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 2\end{bmatrix}$

    Encuentre una matriz D tal que $A + 2B - C + D = 0_{2x3}$

13. Sea A una matriz de 3 x 2, B una matriz 3 x 4, C una matriz 4 x 2, y D una matriz 2 x 3. Determine cuáles de las siguientes matrices están definidas. Si la matriz está definida, proporcione su orden.

    a) AB b) AC c) AD d) DA
    e) DB f) DC g) (AD)B h) D(BA)

Costos fijos
Son gastos en los que incurre la compañía, independientemente de la producción

14. Sea: $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$
    a) Encuentre A^2 y A^3.
    b) Obtenga una matriz A tal que:
    $A \neq 0$, $A^2 \neq 0$, $A^3 \neq 0$, pero $A^4 = 0$

15. Dadas las matrices: $A=\begin{bmatrix}1 & -3\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}$ $C=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ -1 & -1\end{bmatrix}$

    Encuentre una matriz D_{2x2}, tal que: $A^2 + 2BC - AD = I_2$

16. Una compañía tiene plantas en tres localidades, X, Y y Z, y cuatro bodegas en los lugares A,B,C, y D. El costo en dólares de transportar cada unidad de su producto de una planta a una bodega está dado por la matriz siguiente:

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} X & Y & Z \end{array} \\ \begin{bmatrix} 10 & 12 & 15 \\ 13 & 10 & 12 \\ 8 & 15 & 6 \\ 16 & 9 & 10 \end{bmatrix} \end{array}$$

Costo total Es la suma de los costos fijos más los costos variables

Si por razones arancelarias el costo de transporte sube en un 20%, ¿Cuál será la nueva matriz de costo?

17. Un contratista calcula que los costos en dólares para adquirir y transportar unidades determinadas de concreto, madera y acero desde tres diferentes localidades están dados por las matrices siguientes, (una matriz por cada localidad).

Costos variables Son gastos que varían de acuerdo al número de unidades o artículos producidos.

$$A = \begin{bmatrix} 20 & 35 & 25 \\ 8 & 10 & 6 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{Costos de material} \\ \text{Costos de transporte} \end{array}$$

$$B = \begin{bmatrix} 22 & 36 & 24 \\ 9 & 9 & 8 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{Costos de material} \\ \text{Costos de transporte} \end{array}$$

$$C = \begin{bmatrix} 18 & 32 & 26 \\ 11 & 8 & 5 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{Costos de material} \\ \text{Costos de transporte} \end{array}$$

Escriba la matriz que representa los costos totales de material y de transporte por unidades de concreto, madera y acero.

18. Un fabricante de zapatos los produce en color negro, gris y blanco para niños, mujeres y hombres. La capacidad de producción en miles de pares en la planta A está dada por la matriz siguiente:

$$\begin{array}{c} \\ \text{Negro} \\ \text{Gris} \\ \text{Blanco} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} H & M & N \end{array} \\ \begin{bmatrix} 30 & 34 & 20 \\ 45 & 20 & 16 \\ 14 & 26 & 25 \end{bmatrix} \end{array}$$

La producción en la planta B está dada por:

$$\begin{array}{c} \\ \text{Negro} \\ \text{Gris} \\ \text{Blanco} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} H & M & N \end{array} \\ \begin{bmatrix} 35 & 30 & 26 \\ 52 & 25 & 18 \\ 23 & 24 & 32 \end{bmatrix} \end{array}$$

a) Determine la representación matricial de la producción total de cada tipo de zapato en ambas plantas.
b) Si la producción en la planta A se incrementa en un 50% y la planta B en un 25%, encuentre la matriz que representa la nueva producción total de cada tipo de calzado.

19. *Valoración de inventarios.* En un almacén de venta de bicicletas, se venden ciclas de diferente tamaño según el número del marco; los marcos se clasifican en número 18, 24, 28, 32, cada marco número 18 tiene un valor de US $300, cada marco número 24 tiene un precio de US $400, cada marco número 28, tiene un valor de US $600, cada marco número 32 tiene un valor de US $800.

    Si se tienen 20 marcos número 18, 30 marcos número 24, 40 marcos número 28, 50 marcos número 32. Exprese el precio de venta total de su existencia de marcos para bicicleta como el producto entre dos matrices.

Inventarios Son las cantidades de artículos o materiales almacenados, en espera de ser utilizados.

20. *Costos de suministros.* Un transportador de lácteos calcula que el costo (en dólares) de transportar y distribuir leche, yogurt y queso desde la fábrica a tres barrios de la ciudad, puede mostrarse mediante un arreglo matricial, tomando una matriz para cada localidad.

	Leche	Yogurt	Queso
$A =$	12	15	32
	8	21	36
$B =$	15	12	20
	20	30	10
$C =$	40	50	60
	10	20	30

    Donde la primera fila de cada matriz se asocia con el costo de transporte y la segunda fila con el costo de distribución.

    Escriba la matriz que represente los costos totales de material y de transporte por unidades de leche, yogurt y queso desde cada una de las localidades.

21. *Comercialización internacional.* En el año de 1999 el comercio entre los países de Japón, México, Colombia y Honduras (en millones de dólares), está dado por la matriz:

$A = [c_{ij}]_{4\times4}$, en donde c_{ij}, representa las exportaciones del país i al país j.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 12 & 3 & 6 \\ 5 & 6 & 20 & 10 \\ 12 & 15 & 45 & 12 \\ 18 & 14 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

El comercio en estos cuatro países durante el año 2000 (en millones de dólares) está dado por la matriz B.

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 12 & 23 & 20 \\ 15 & 15 & 16 & 13 \\ 18 & 19 & 14 & 15 \\ 12 & 17 & 15 & 16 \end{bmatrix}$$

a. Escriba una matriz que represente el comercio total entre los cuatro países en el período de un año.
b. Si en los años 1999 y 2000 un peso colombiano valía 0.0005 dólares, escriba la matriz que representa el comercio total en Colombia en esos años.

22. *Matrices de producción.* Una empresa produce tres tipos de teclados en tres calidades diferentes. La producción (en miles) en su planta de Bogotá, está dada por la matriz siguiente:

$$\begin{bmatrix} 20 & 30 & 10 \\ 10 & 50 & 40 \\ 60 & 20 & 10 \end{bmatrix}$$

Producción
Es la transformación de los recursos de una organización, en productos.

Donde las filas indican calidad y las columnas indican tipo de teclado. (Primera columna tipo 1 etc).

La producción en miles de la planta de la ciudad de Cali está dada por la matriz siguente:

$$\begin{bmatrix} 12 & 20 & 60 \\ 50 & 15 & 50 \\ 30 & 20 & 10 \end{bmatrix}$$

a. Escriba una matriz que represente la producción total de teclados en ambas plantas.
b. Si se instalara una planta en la ciudad de Medellín ésta tendría el 50% más de producción con respecto a las plantas de Bogotá y Cali juntas. Escriba la matriz que represente la producción en la ciudad de Medellín.

23. *Matrices de producción.* Un fabricante de camas produce tres estilos; Luis XV, español y francés antiguo, en tres tamaños dife-

rentes, 1.90m x 1.20m, 1.90 x 1.30m, 1.90 x 1.40m. La capacidad de producción en la planta ubicada en la ciudad de Bogotá, está dada por la matriz siguiente, donde las filas significan los estilos de cama y las columnas los diferentes tamaños:

$$\begin{bmatrix} 20 & 30 & 50 \\ 10 & 40 & 50 \\ 70 & 60 & 30 \end{bmatrix}$$

La producción en la planta de Medellín está dada por:

$$\begin{bmatrix} 25 & 35 & 25 \\ 10 & 60 & 54 \\ 15 & 25 & 35 \end{bmatrix}$$

a. Determine la representación matricial de la producción total de cada tipo de cama en ambas plantas.
b. Si la producción en Bogotá aumenta en un 20% y en Medellín en un 30% encuentre la matriz que representa la nueva producción total.

24. En una empresa se fabrican pisos para casas de tres tipos: parqués, piso en tabla y alfombra especial que matiza con la madera. Existen tres colores para cada uno de los estilos: caoba, natural y mate. La siguiente matriz muestra la producción para un almacén ubicado en Bogotá:

$$\begin{bmatrix} 20 & 30 & 60 \\ 50 & 40 & 30 \\ 10 & 80 & 20 \end{bmatrix}$$

Las filas muestran los estilos y las columnas muestran los colores.

La siguiente matriz muestra la producción en la ciudad de Cali:

$$\begin{bmatrix} 20 & 30 & 60 \\ 50 & 10 & 30 \\ 50 & 40 & 30 \end{bmatrix}$$

Obtenga la matriz que represente la producción total de las dos plantas.

25. *Costos de transporte.* Una empresa de lavandería tiene tres plantas en la ciudad de Bogotá, ubicadas en los barrios Galerías, Lago y Chapinero, también tiene cuatro puntos de distribución ubicados en los barrios Chicó, Villa luz, Niza y Salitre. El costo (en dólares) de transportar cada pieza de ropa de las plantas a los centros de distribución está dada por la matriz siguiente:

$$\begin{bmatrix} 1.0 & 3.2 & 6.3 & 2.0 \\ 2.0 & 1.2 & 2.5 & 3.6 \\ 1.2 & 5.4 & 8.5 & 5.0 \end{bmatrix}$$

Donde las filas indican las plantas, y las columnas los centros de distribución.

a. Si los costos de transporte se incrementan en US $2 por unidad, ¿Cuál es la nueva matriz?
b. Si los costos de transporte se elevan en un 30%, escriba los nuevos costos en forma matricial.

26. *Matrices de producción.* Una empresa produce tres tipos diferentes de camisas en dos calidades diferentes. La producción (en miles) en una planta ubicada en la ciudad de Medellín, está dada por la matriz siguiente, donde las filas indican la calidad, y las columnas indican los tipos de camisas.

$$\begin{bmatrix} 25 & 36 & 24 \\ 35 & 45 & 20 \end{bmatrix}$$

La producción en miles de la planta ubicada en Itaguí está dada por la siguiente matriz:

$$\begin{bmatrix} 25 & 32 & 12 \\ 20 & 32 & 10 \end{bmatrix}$$

Escriba la matriz que represente la producción total de camisas en ambas plantas.

27. *Valoración de inventarios.* Un comerciante de carros vende cinco marcas diferentes a saber, Chevrolet, Ford, Mazda, Nissan y Honda. En este momento posee para la venta 8 automóviles Chevrolet, 7 automóviles Ford, 10 automóviles Mazda, 15 automóviles Nissan y 4 automóviles Honda.

Los automóviles Chevrolet tienen un valor de US$ 16.000 dólares cada uno, Ford tienen un valor de US$ 17.000 cada uno, Mazda tienen un valor de US$ 18.000 cada uno, los Nissan un valor de US$ 20.000 cada uno, y los Honda como son modelo 2002 tienen un valor de US$ 25.000 cada uno. Exprese el precio de venta total de su existencia de automóviles como el producto de dos matrices.

28. *Costos de materias primas.* En una fábrica de helados se utilizan cuatro diferentes tipos de ingredientes. En la elaboración del helado se utilizan 3 unidades del ingrediente 1, 4 unidades del ingrediente 2, 8 unidades del ingrediente 3 y 10 unidades del ingrediente 4. El costo por unidad de los cuatro ingredientes son respectivamente (precios en dólares), $8, $10, $20 y $30. Expresar el costo total de los ingredientes por unidad de producto como el producto de dos matrices.

29. *Costos de materias primas.* En una empresa de elaboración de galletas se producen dos tipos: wafer y saltines. La empresa utiliza tres tipos de harina para la elaboración de las galletas, harina tipo 1, harina tipo 2, harina tipo 3, el número de gramos de harina de cada tipo utilizados en la elaboración de una galleta wafer es respectivamente 2, 4, 6, y el número de gramos de harina utilizados en cada galleta tipo saltines es 3, 5, 7 respectivamente. Suponga que la empresa produce 30.000 unida-

des de galletas wafer y 40.000 unidades de galletas saltines en un día. Responda las siguientes preguntas en términos de productos de matrices.

a. ¿Cuál es el consumo total diario de harina, por cada tipo de harina?
b. Si los costos por unidad (en dólares) para los diferentes tipos de harina son 8,10 y 12 dólares respectivamente ¿Cuáles son los costos de las materias primas (harina) por unidad de cada tipo de galleta?
c. ¿Cuál es la cantidad total gastada diariamente en materia prima?

30. Para la biblioteca de un centro educativo se piden con cierta frecuencia libros a diferentes editoriales, en esta ocasión se necesitan libros de: matemáticas, física, geometría, trigonometría y política. Los precios puestos por cada editorial a cada uno de los libros se muestran en la siguiente matriz:

$$A=\begin{bmatrix}10 & 20 & 30 & 20 & 5\\ 6 & 20 & 10 & 30 & 50\\ 40 & 30 & 5 & 20 & 30\end{bmatrix}$$

En esta matriz cada fila se refiere a una editorial y las columnas a los diferentes cursos, en el orden listado arriba. El centro educativo en este momento está abriendo nuevas carreras y otras sedes, por lo que siempre hace el pedido a las mismas editoriales con el fin de minimizar los costos de transporte. Existen en este momento tres nuevas carreras de ingeniería, para efectos de dotar la biblioteca. Para la primera carrera de ingeniería requiere: matemáticas 20 libros, física 30 libros, geometría 30 libros, trigonometría 40 libros y política 10 libros. Para la segunda carrera de ingeniería requiere: matemática 30 libros, física 20 libros, geometría 50 libros, trigonometría 30 libros y política 20 libros. Para la tercera carrera de ingeniería requiere: 50 libros para matemática, 30 libros para física, 20 libros para geometría, 40 libros para trigonometría, y 50 libros para política. Haga una matriz B con los datos anteriores, efectúe un producto con la matriz A, e interprete el resultado.

31. *Pedidos de repuestos.* Un distribuidor de repuestos para automóviles ha aceptado pedidos para 10 automóviles marca Chevrolet, 14 marca ford y 24 marca mazda. Suponga que los repuestos pedidos son radiadores, inyectores, tableros, rines y pastillas para los frenos. Las filas de la siguiente matriz indican las diferentes marcas de automóviles y las columnas indican los diferentes tipos de repuestos, el distribuidor desea calcular la cantidad de cada tipo de repuestos para satisfacer todos sus pedidos. Exprese el problema en forma de producto de matrices.

$$\begin{bmatrix}1 & 4 & 1 & 5 & 4\\ 2 & 2 & 1 & 5 & 4\\ 1 & 6 & 1 & 5 & 4\end{bmatrix}$$

32. *Producción de helados.* Un almacén de helados vende 200 helados de fresa, 300 de chocolate, 400 de leche y 100 de arequipe. Los precios por helado son de US $ 2, US$ 3, US$ 4, US$ 5, respectivamente. Encuentre el costo total de los helados utilizando producto de matrices.

33. *Valoración de inventarios.* Un vendedor de calculadoras, ofrece calculadoras Hewlett Packard de cuatro clases distintas; A, B, C y D, las calculadoras tipo A tienen un precio a la venta de US$ 125, las tipo B tienen un precio de US$ 150, y las tipo C un precio de US$ 200. Exprese la venta total como un producto de matrices, si el comerciante tiene 20 calculadoras tipo A, 30 calculadoras tipo B y 50 calculadoras tipo C.

34. En el salón de onces *las galletas de la abuela*, se elaboran cinco tipos de galletas G_1, G_2, G_3, G_4, G_5. El precio por unidad de cada clase de galletas es respectivamente, 0.5, 0.8, 1, 1.2, 1.4, 1.5 dólares. Si se venden 400 unidades de las galletas tipo 1, 500 unidades de las galletas tipo 2, 800 unidades de las galletas tipo 3, 1000 galletas de las tipo 4 y 500 unidades de las galletas tipo 5, calcule el resultado final de las ventas como el producto de dos matrices.

35. *Trabajo.* Un fabricante de muebles tiene pedidos para dos juegos de sala, tres juegos de comedor, cinco bibliotecas y seis mesas para escritorio. El fabricante estima que requiere de 8 días para elaborar los juegos de sala, 14 días para elaborar los juegos de comedor, 20 días para elaborar las bibliotecas y 14 días para elaborar los escritorios.

a. Exprese las órdenes de trabajo o pedidos como una matriz fila.
b. Exprese los tiempos de elaboración de los diferentes productos como una matriz columna.
c. Utilice el producto entre matrices para determinar el número total de días que se requerirán para surtir los pedidos.

36. Una empresa paga a sus empleados según su cargo y su trabajo, por lo regular cuando el trabajo es muy bueno la empresa entrega bonos en dólares. El año anterior el presidente de la empresa recibió un sueldo adicional de $2´000.000 y un bono por US$ 600, los tres vicepresidentes recibieron cada uno, $1´500.000 y un bono por US$ 400, y el tesorero recibió $1´000.000 y un bono por US$ 300.

a. Exprese el pago en pesos y en dólares por medio de una matriz de 2x3.
b. Exprese el número de empleados como una matriz columna.
c. Utilice la multiplicación de matrices para calcular la cantidad total de dinero en pesos y en dólares que la empresa entregó a sus funcionarios.

37. Una empresa encargada de fabricar tacos para el juego de billar utiliza tres clases diferentes de madera a saber, cedro, guayacán y roble, que le permite construir dos tipos diferentes de tacos. Un taco tipo A y un taco tipo B, la cantidad de madera

utilizada en fabricar una unidad de la clase de taco A es: tres piezas de cedro, dos piezas de guayacán y cinco piezas de roble. Por cada unidad de los tacos tipo B invierte 4 piezas de cedro, 6 piezas de guayacán y 8 piezas de roble. En la semana produce 70 unidades del taco tipo A y 80 unidades del taco tipo B. Exprese las siguientes respuestas como productos de matrices.

a. ¿Cuál es el consumo semanal de madera de cada tipo?
b. Si los costos por unidad (en dólares) para la madera, cedro, guayacán y roble son 20, 30, 40 respectivamente, ¿cuáles son los costos de madera por unidad del taco tipo A y del taco tipo B?
c. ¿Cuál es la cantidad total gastada en madera a la semana en la producción del taco tipo A y el taco tipo B?.

38. La empresa *pintas y pintores* es la encargada de pintar casas y oficinas en diferentes partes del país. Para un determinado proyecto requiere de pinturas color verde, azul, crema, blanco y verde oliva, de cualquiera de tres proveedores. Los precios que cada proveedor fija a cada unidad de estos cinco colores están dados en la matriz A.

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 6 & 8 \\ 4 & 2 & 2 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

En esta matriz cada renglón se refiere a un proveedor y cada columna a un color.

Existen en el momento tres edificios en construcción: el edificio número I requiere de 3 canecas de pintura verde, 5 canecas de pintura azul, 5 canecas de pintura crema, 7 canecas de pintura blanca y 8 canecas de pintura verde oliva. El edificio número II requiere 4,5,6,8,9 canecas respectivamente, y el edificio número III requiere 4,5,7,8,9 canecas respectivamente.

a. Diseñe una matriz de 5x3 de tal forma que se pueda disponer de esta información.
b. Forme una matriz producto AxB e interprete los elementos de ese producto y decida cuál proveedor debería usar en cada edificio.

39. Un empresario de frutas se encarga de distribuir frutas a varios hipermercados en la ciudad de Bogotá. Por una carga de manzanas cobra 20 dólares, por una de peras 30 dólares, por una de mandarinas 30 y por una de uvas 50. Si tiene que transportar 40 cargas de manzana, 40 de peras, 50 de mandarinas y 50 de uvas, halle el precio del transporte de las frutas utilizando un producto de matrices.

1.3 PROPIEDADES DE LAS OPERACIONES ENTRE MATRICES

Propiedades de las operaciones entre matrices

Sean A, B y C matrices conformes para las operaciones indicadas, k, l escalares.

1. $A + B = B + A$
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$
3. $A + 0 = A$ donde 0 es la matriz nula
4. $A + (-A) = (-A) + A = 0$
5. $k(A + B) = kA + kB$
6. $(k + l)A = kA + lA$
7. $(k\ (lA)) = (kl)A$
8. $A(B + C) = AB + AC$
9. $(A + B)\,C = AC + BC$
10. $A(BC) = (AB)C$

Propiedades de las operaciones entre matrices
- Conmutativa: (respecto de la adición)
- Asociativa: (respecto de la adición)
- Modulativa: (respecto de la adición)
- Invertiva: (respecto de la adición)
- Distributiva

Ejemplo 1. Verificar la propiedad (2): $A + (B+C) = (A+B) + C$

Sean: $A=\begin{bmatrix}2 & 4 & 6\\ 7 & 1 & 9\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}7 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix}$ y $C=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 4 & 6 & 2\\ 7 & 2 & 1\end{bmatrix}$ entonces:

$$A+(B+C)=\begin{bmatrix}2 & 4 & 6\\ 7 & 1 & 9\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}+\left(\begin{bmatrix}7 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 4 & 6 & 2\\ 7 & 2 & 1\end{bmatrix}\right)=$$

$$\begin{bmatrix}2 & 4 & 6\\ 7 & 1 & 9\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}8 & -1 & 0\\ 4 & 6 & 1\\ 6 & 3 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10 & 3 & 6\\ 11 & 7 & 10\\ 6 & 3 & 4\end{bmatrix}, \text{ por otro lado:}$$

$$(A+B)+C=\left(\begin{bmatrix}2 & 4 & 6\\ 7 & 1 & 9\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}7 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix}\right)+\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 4 & 6 & 2\\ 7 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}9 & 3 & 6\\ 7 & 1 & 8\\ -1 & 1 & 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 4 & 6 & 2\\ 7 & 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10 & 3 & 6\\ 11 & 7 & 10\\ 6 & 3 & 4\end{bmatrix}$$

Ejemplo 2. Verificar la propiedad (5): $k(A + B) = kA + kB$

$$\text{Sean: } A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 3\\ 4 & 2 & 0\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1 & 4 & 2\\ 0 & 1 & 3\\ 2 & -1 & 0\end{bmatrix} \text{ y sea } k=3, \text{entonces:}$$

$$3(A+B)=3\begin{bmatrix}2 & 6 & 2\\ 0 & 2 & 6\\ 6 & 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 18 & 6\\ 0 & 6 & 18\\ 18 & 3 & 0\end{bmatrix}, \text{ ahora:}$$

$$kA=3\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 3\\ 4 & 2 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 6 & 0\\ 0 & 3 & 9\\ 12 & 6 & 0\end{bmatrix} \text{ y } kB=3\begin{bmatrix}1 & 4 & 2\\ 0 & 1 & 3\\ 2 & -1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 12 & 6\\ 0 & 3 & 9\\ 6 & -3 & 0\end{bmatrix}$$

$$\text{por lo tanto: } kA+kB=\begin{bmatrix}3 & 6 & 0\\ 0 & 3 & 9\\ 12 & 6 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & 12 & 6\\ 0 & 3 & 9\\ 6 & -3 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 18 & 6\\ 0 & 6 & 18\\ 18 & 3 & 0\end{bmatrix}$$

Ejemplo 3. Verificar la propiedad (8): $A(B + C) = AB + AC$

No conmutatividad
El producto de matrices en general no es conmutativo: $A \cdot B \neq B \cdot A$

$$\text{Sean: } A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}3 & 4\\ -1 & 4\end{bmatrix} \text{ y } C=\begin{bmatrix}0 & 7\\ 2 & 1\end{bmatrix}, \text{entonces:}$$

$$A(B+C)=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}3 & 4\\ -1 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 7\\ 2 & 1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 11\\ 1 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 21\\ 3 & 15\end{bmatrix}$$

$$\text{Ahora: } AB+AC=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 4\\ -1 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 7\\ 2 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 12\\ -3 & 12\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4 & 9\\ 6 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 21\\ 3 & 15\end{bmatrix}$$

Ejemplo 4. Verificar que: $(AB)C = A(BC)$

$$\text{Sean } A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix} \text{ y } C=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}, \text{entonces}$$

$$(AB)C=\left(\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 8\\ 4 & 8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8 & 6\\ -8 & 4\end{bmatrix}$$

Por otra parte

$$A(BC)=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}2 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 2\\ -4 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8 & 6\\ -8 & 4\end{bmatrix}$$