

Méthodes mathématiques pour la physique

3^e édition

Vladimir Dotsenko

**Professeur à Sorbonne Université - Faculté des Sciences
et de l'ingénierie (Paris)**

Axel Courtat

**Ingénieur de recherche en Informatique
quantique chez Qubit Pharmaceuticals**

Gaëtan Gauthier

**Docteur en Physique, Professeur certifié de
Physique-Chimie en Lycée et BTS**

DUNOD

Couverture : ©yogesh_more/Shutterstock.

© Dunod, 2018, 2021 2025
11, rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-088192-5

TABLE DES MATIÈRES

AVANT-PROPOS	9
1 ANALYSE VECTORIELLE	11
1.1 Rappel, définitions	11
1.1.1 Systèmes de coordonnées	11
1.1.2 Fonctions scalaires et fonctions vectorielles	13
1.2 Bases mobiles dans les coordonnées curvilignes	15
1.2.1 Rappel sur la base des coordonnées cartésiennes	15
1.2.2 Bases mobiles des coordonnées curvilignes	16
1.2.3 Les relations entre les vecteurs des bases de coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques	21
1.2.4 Exemples de projections des champs de vecteurs sur des bases mobiles . .	23
1.3 Intégrales dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$, théorème de Fubini et exemples de calculs	29
1.3.1 Intégrales dans $\mathbb{R}^2$	29
1.3.2 Intégrales dans $\mathbb{R}^3$	36
1.4 Gradient d'une fonction scalaire	45
1.5 Complément sur les fonctions de plusieurs variables	53
1.5.1 Développements en série des fonctions de plusieurs variables	53
1.5.2 Différentielles des fonctions	58
1.5.3 Extrema d'une fonction de deux variables	62
1.6 Divergence d'une fonction vectorielle et théorème d'Ostrogradski	68
1.6.1 Divergence d'un champ de vecteurs $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ dans les coordonnées cartésiennes	68
1.6.2 Divergence d'un champ de vecteurs $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ dans les coordonnées curvilignes	72
1.6.3 Premier théorème intégral : théorème d'Ostrogradski	74
1.6.4 Complément : exemples de calculs de flux des champs de vecteurs	76
1.7 Rotationnel d'une fonction vectorielle, circulation et théorème de Stokes	90
1.7.1 Rotationnel d'un champ de vecteurs $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ dans les coordonnées cartésiennes	90
1.7.2 Rotationnel d'un champ de vecteurs $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ dans les coordonnées curvilignes	94
1.7.3 Deuxième théorème intégral : théorème de Stokes	96
1.7.4 Complément : exemples de calculs de circulations en coordonnées carté- siennes et en coordonnées cylindriques	98
1.8 Laplacien	113
1.8.1 L'opérateur laplacien dans les coordonnées cartésiennes	113

1.8.2	L'opérateur laplacien dans les coordonnées curvilignes	116
1.9	Formules différentielles et identités de Green	118
1.10	Complément : formulaires	122
1.10.1	Formulaire 1 - Opérateurs différentiels exprimés en coordonnées sphériques et cylindriques	122
1.10.2	Formulaire 2 - Développement en séries entières des fonctions classiques .	123
1.10.3	Formulaire 3 - Relations vectorielles	124
2	ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES	125
2.1	Équations différentielles d'ordre 1	125
2.1.1	Équations différentielles d'ordre 1 solubles par la séparation de variables .	125
2.1.2	Équations différentielles linéaires d'ordre 1 à coefficients et second membre variables	128
2.2	Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants et second membre variable	140
3	ALGÈBRE LINÉAIRE	157
3.1	Matrices	157
3.2	Opérations algébriques avec des matrices	158
3.2.1	Opérations matricielles	158
3.2.2	Matrices $n \times n$ comme des opérations (applications) linéaires	159
3.3	Trace, déterminant et mineurs d'une matrice	167
3.4	Matrice inverse, propriétés de la trace et du déterminant d'une matrice	176
3.4.1	Propriétés de la trace	176
3.4.2	Propriétés du déterminant	176
3.4.3	Matrice inverse M^{-1}	180
3.5	Spectre d'une matrice : ses valeurs et ses vecteurs propres	188
3.6	Changement de base	192
3.6.1	Transformations des vecteurs	192
3.6.2	Transformations des matrices	194
3.7	Diagonalisation des matrices et premières applications	196
3.7.1	Diagonalisation des matrices	196
3.7.2	Puissance m -ième d'une matrice diagonalisable	199
3.7.3	Exponentielle d'une matrice M diagonalisable	201
3.7.4	Exponentielles des matrices de Pauli	203
3.7.5	Solution de systèmes d'équations différentielles linéaires du 1er ordre . . .	204
3.7.6	Solution de systèmes linéaires	206
3.8	Dégénérescence, matrices diagonalisables et non diagonalisables	210
3.9	Matrices hermitiennes, matrices unitaires et leurs propriétés	222
3.9.1	Conventions et définitions	222
3.9.2	Matrices hermitiennes	223
3.9.3	Matrices unitaires	226
3.10	Applications aux systèmes des oscillateurs couplés	234
3.10.1	Oscillateurs couplés avec des oscillations longitudinales	234
3.10.2	N oscillateurs couplés. Relation de dispersion	242
3.11	Supplément : triangularisation des matrices qui ne sont pas diagonalisables . . .	246

4	ANALYSE RÉELLE : SUITES ET SÉRIES	251
4.1	Suites convergentes et non convergentes	251
4.2	Séries convergentes et non convergentes. Critères de convergence	259
4.2.1	Séries numériques	259
4.2.2	Critères de convergence des séries numériques	264
4.3	Séries entières	276
4.3.1	Théorème d'Abel et ses conséquences	276
4.3.2	Détermination du rayon de convergence de la série entière	277
4.3.3	Dérivation des séries entières	279
4.3.4	Séries de puissances de $x - a$	280
4.4	Séries de Taylor et développement en série entière de fonction classique	281
4.5	Notion de prolongement analytique	291
4.5.1	Exemples particuliers de prolongement analytiques des séries	291
4.5.2	Exemple physique : l'effet de Casimir	293
4.5.3	Deux exemples mathématiques	294
4.6	Exercices sur les calculs des séries	296
5	ANALYSE RÉELLE : INTÉGRALES	305
5.1	Intégrale : définition et propriétés	305
5.1.1	Propriétés de l'intégrale	306
5.1.2	Formule de Newton-Leibniz	308
5.1.3	Table des primitives des fonctions classiques	310
5.2	Calcul des intégrales par la primitive	312
5.3	Intégrales impropres	316
5.3.1	Intégrales impropres du type 1	316
5.3.2	Intégrales impropres du type 2	327
5.4	Autres méthodes de calculs des intégrales	341
5.4.1	Dérivation par rapport au paramètre	342
5.4.2	Intégrales d'une fonction gaussienne	344
5.4.3	Intégration par un développement en série	347
5.5	Compléments	353
5.5.1	Séries de Fourier	353
5.5.2	Applications de la série de Fourier	356
6	NOTIONS DE THÉORIE DES PROBABILITÉS	357
6.1	Événements et leur probabilité	357
6.1.1	Définitions et exemples	357
6.1.2	Probabilités conditionnelles, probabilités totales, indépendance	359
6.1.3	Dénombrements	361
6.2	Variables aléatoires	373
6.2.1	Définitions et exemples	373
6.2.2	Distributions des variables aléatoires	374
6.2.3	Moyenne, variance, écart-type d'une variable aléatoire	376
6.3	Exemples de distributions classiques	380
6.3.1	Distribution normale	380
6.3.2	Distribution binomiale	381
6.3.3	Fréquence d'événements rares. Distribution de Poisson	383
6.4	Appendices	399
6.4.1	Appendice A : liste des distributions classiques	399

6.4.2	Appendice B : distribution de la somme de deux variables aléatoires, intégrale de convolution	400
6.4.3	Appendice C : théorème central limite	402
6.4.4	Appendice D : la forme limite de la distribution binomiale pour n et k grands	405
6.4.5	Appendice E : formule de Stirling pour la factorielle	408
6.4.6	Appendice F : quelques formules utiles pour les intégrales avec une fonction gaussienne	409
6.4.7	Appendice G : table des valeurs numériques de la fonction de répartition pour la distribution normale, centrée ($x_0 = 0$) et réduite ($c \equiv \sigma = 1$) : $F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t dt' \exp(-\frac{t'^2}{2})$	410
7	ANALYSE COMPLEXE	411
7.1	Fonctions holomorphes	411
7.1.1	Rappels	411
7.1.2	Dérivée, fonctions holomorphes, conditions de Cauchy-Riemann	412
7.1.3	Fonction holomorphe dans un domaine, singularités et classements	415
7.1.4	Fonction réciproque d'une fonction holomorphe	419
7.1.5	Fonctions harmoniques de deux variables. Application physique	424
7.1.6	Fonctions avec des points de branchement, une suite d'exemples. Transformation de monodromie	428
7.2	Intégration des fonctions holomorphes	444
7.2.1	Intégrale sur une courbe dans $\mathbb{C}$	444
7.2.2	Intégrale d'une fonction holomorphe et théorème de Cauchy	446
7.2.3	Primitive d'une fonction holomorphe	452
7.2.4	Formule intégrale de Cauchy	453
7.2.5	Théorèmes sur des fonctions holomorphes	454
7.2.6	Complément : théorème de Stokes	458
7.3	Dérivabilité et développements en série des fonctions holomorphes et prolongement analytique	465
7.3.1	Dérivées successives d'une fonction holomorphe	465
7.3.2	Développement en série de Taylor	466
7.3.3	Zéros des fonctions holomorphes	471
7.3.4	Prolongement analytique	472
7.3.5	Prolongement analytique d'une fonction multiforme autour d'un point de branchement	476
7.3.6	Application : calcul d'une intégrale	479
7.4	Série de Laurent et théorème des résidus	483
7.4.1	Série de Laurent	483
7.4.2	Points singuliers isolés	487
7.4.3	Résidu en un point singulier	492
7.4.4	Théorème des résidus	494
7.4.5	Relations de Kramer-Kronig	498
7.4.6	Application 1	503
7.4.7	Application 2	506
7.4.8	Application 3	509
7.4.9	Application physique : l'effet Landau	510

8	TRANSFORMATIONS DE FOURIER ET DE LAPLACE	535
8.1	La transformée de Fourier : définitions et propriétés	535
8.1.1	Définitions	535
8.1.2	Propriétés générales de la transformation de Fourier	536
8.1.3	Propriétés par rapport au changement de la variable	536
8.1.4	Calcul de la transformée de Fourier de la fonction $1/x^\gamma$	542
8.1.5	Continuité de $\hat{f}(p)$, pour $f(x) \in L^1(\mathbb{R})$	544
8.2	Dérivabilité et décroissance à l'infini	549
8.2.1	Transformation de Fourier des dérivées d'une fonction	549
8.2.2	Dérivées de la transformée de Fourier d'une fonction	555
8.2.3	Transformée de Fourier d'une fonction gaussienne	556
8.3	Réciprocité	560
8.4	Convolution et transformation de Fourier	565
8.4.1	Le produit de convolution	565
8.4.2	Transformée de Fourier d'un produit de convolution	567
8.4.3	Formule de Parseval-Plancherel	567
8.4.4	Applications, exercices et remarques	568
8.5	Transformation de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^n)$	572
8.5.1	Définitions	572
8.5.2	Transformation de Fourier d'une fonction radiale dans $\mathbb{R}^3$	573
8.5.3	Transformation de Fourier d'une fonction radiale dans $\mathbb{R}^2$	573
8.5.4	Application à la diffraction par un obstacle plan	577
8.6	Transformation de Laplace	580
8.6.1	Définition, propriétés et exemples	580
8.6.2	Transformation de Laplace et convolution	583
8.6.3	Transformation de Laplace inverse	583
8.6.4	Application de la transformation de Laplace aux solutions des équations différentielles	588
8.7	Exercices sur l'ensemble du chapitre	592
8.8	Supplément 1 : listes de base des transformées	603
8.8.1	Liste de base des transformées de Fourier	603
8.8.2	Liste de base des transformées de Laplace	605
8.9	Supplément 2 : la fonction δ de Dirac	606
9	ESPACE DE HILBERT	609
9.1	Espace L^2 , espace de Hilbert	609
9.1.1	Produit scalaire hermitien dans L^2	609
9.1.2	Inégalité de Cauchy-Schwarz	610
9.1.3	La norme $\ \cdot \ _2$	611
9.1.4	Relations métriques	612
9.1.5	Projection orthogonale	613
9.2	Séries de Fourier	616
9.2.1	Séries de Fourier dans $L^2([0, 1])$ et complétude des bases	616
9.2.2	Démonstration de la complétude de la base $\{\phi_n(x)\}$	623
9.3	Bases hilbertiennes et polynômes orthogonaux	626
9.3.1	Exemples de bases hilbertiennes	626
9.3.2	Polynômes orthogonaux	628
9.3.3	Séries de Fourier, application 1 : l'équation de propagation de la chaleur	638
9.3.4	Séries de Fourier, application 2 : l'équation d'une corde vibrante	641

9.4	Opérateurs dans un espace de Hilbert	645
9.4.1	Opérateurs	645
9.4.2	Opérateur adjoint	647
9.4.3	Opérateur hermitien	649
9.4.4	Opérateurs unitaires	650
9.5	Application : réponse linéaire, fonction de Green	661
9.5.1	Dynamique de relaxation	661
9.5.2	Oscillateur harmonique	665
9.5.3	Le cas général	667
10	ÉLÉMENTS D'ANALYSE DES DISTRIBUTIONS	675
10.1	Fonctions généralisées et distributions : définitions, opérations, formes limites . .	675
10.1.1	Introduction	675
10.1.2	Définitions et opérations sur les distributions	678
10.1.3	Distributions singulières comme limites de distributions régulières	680
10.1.4	Dérivée d'une fonction avec une discontinuité	681
10.1.5	Autres formes limites de $\delta(x)$	683
10.2	Une suite d'exemples de distributions singulières	685
10.2.1	Les fonctions $\text{sgn}(x)$, $1_{a,b}(x)$, $ x $, etc. vues comme des distributions sin- gulières	685
10.2.2	Les distributions $\delta_+(x)$, $\delta_-(x)$, $\text{vp} \frac{1}{x}$	687
10.3	Étude approfondie de la fonction $\delta(x)$	694
10.3.1	Dérivées de $\delta(x)$	694
10.3.2	Application : équation de Schrödinger avec un potentiel $U(x) = \lambda\delta(x)$. .	697
10.4	Transformation de Fourier des distributions. Convolutions des distributions . .	703
10.4.1	Introduction	703
10.4.2	Exemples sur les transformations de Fourier des distributions singulières .	703
10.4.3	Convolution des distributions	705
10.5	Fonction $\delta(\mathbf{r})$ de Dirac dans l'espace tridimensionnel	707
10.5.1	Définitions et propriétés	707
10.5.2	Remarque mathématique justifiant l'introduction de la fonction $\delta(\mathbf{r})$. . .	708
10.5.3	Application en l'électrostatique	709
11	ÉLÉMENTS DE THÉORIE DES GROUPES	711
11.1	Définitions & propriétés générales	711
11.1.1	Généralités	711
11.1.2	Sous-groupe et morphisme de groupes	714
11.1.3	Opération d'un groupe	716
11.2	Théorie des groupes dits finis	717
11.2.1	Groupes cycliques et symétriques	717
11.2.2	Exemples de groupes de symétries en physique	720
11.3	Théorie des groupes matriciels	721
11.3.1	Groupe général linéaire $\text{GL}_n(\mathbb{K})$	722
11.3.2	Représentation d'un groupe G dans $\text{GL}_n(\mathbb{K})$	726
11.3.3	Électromagnétisme et symétrie vus comme un groupe matriciel	727
11.3.4	Qubit, matrices de Pauli et le groupe $\text{SU}_2(\mathbb{C})$	728
11.4	Théorie de Lie : généralisation du formalisme des groupes matriciels	729
11.4.1	Définitions générales et propriétés fondamentales d'un groupe de Lie . . .	729
11.4.2	Algèbre de Lie et association avec un groupe de Lie	730

12 SUJETS D'EXAMENS CORRIGÉS	735
12.1 Analyse vectorielle	735
12.2 Équations différentielles	751
12.3 Algèbre linéaire	752
12.4 Analyse réelle : suites et séries	755
12.5 Analyse réelle : intégrales	762
12.6 Notions de théorie de probabilités	765
12.7 Analyse complexe	769
12.8 Transformations de Fourier et de Laplace	777
12.9 Espace de Hilbert	785
12.10 Éléments d'analyse des distributions	790
 INDEX	 794

AVANT-PROPOS

Ce livre est fondé, en grande partie, sur les notes des différents cours que j'ai donné progressivement, période par période, à l'Université Pierre et Marie Curie (UPMC) entre 1996 et 2017.

À l'origine du projet se trouvent mes anciens étudiants; Axel Courtat et Gaëtan Gauthier qui ont fortement apprécié les cours et ont beaucoup insisté sur l'idée de transformer les notes de mes cours en un livre. Finalement, ils m'ont convaincu de l'utilité d'un tel ouvrage pour les futurs étudiants et nous avons réalisé ce projet ensemble.

Pendant mes années d'enseignements, j'ai beaucoup bénéficié des compétences de mes collègues. Ils sont trop nombreux pour tous les évoquer.

Je suis particulièrement reconnaissant envers Jérôme Sirven, pour le travail que nous avons effectué ensemble durant 12 ans. Avec lui ainsi qu'avec d'autres collègues, nous avons enseigné les quatre parties de ces cours, qui correspondent aux chapitres 1, 2, 3 et 6. Nous avons développé, Jérôme et moi, une grande majorité des exercices des chapitres 1 à 3 et une partie des cours sur les équations différentielles (chapitre 2).

Une autre contribution importante dans ces enseignements est due à Paul Ravary et Richard Wilson qui ont développé des exercices de la partie probabilité (chapitre 6). J'ai beaucoup appris à leur contact.

L'ambiance dans mon laboratoire (LPTHE), à Jussieu, a été également très positive, encourageante. Tout particulièrement, je suis reconnaissant envers mon collègue Marco Picco pour son soutien permanent, dans nos collaborations de recherche, dans les enseignements et pour le soutien de tout genre pendant mon travail sur le livre.

Finalement, toutes mes notes d'enseignement, anciennes et actuelles, pendant le travail sur le livre, ont été tapées et préparées à partir de mes notes manuscrites en format « brouillon », par ma femme Valentina Dotsenko. En plus des notes d'enseignements, elle avait préparé tous les articles de recherche, au cours de ma carrière, ceci en trois langues (plus $\text{\LaTeX}$), tout en corrigeant les fautes dans les équations. Grand merci à elle.

Vladimir Dotsenko

Au cours de notre formation universitaire, nous avons suivi et appliqué, de manière régulière et approfondie, l'ensemble des méthodes proposées dans cet ouvrage. L'intérêt de ces méthodes mathématiques est qu'elles furent développées en premier lieu pour la résolution pratique des équations rencontrées lors d'études concrètes en physique, tant théoriques qu'expérimentales. Il est impossible de comprendre les bases des théories physiques (électromagnétisme, physique statistique, physique quantique, etc.) sans une bonne compréhension des mathématiques sur lesquelles elles reposent. Ces méthodes mathématiques pour la physique ont la volonté de rendre accessible aux étudiants le langage de la physique actuelle. Cela se fait autour de notions, d'exemples d'illustration et d'exercices d'application de difficulté croissante, dont certains sont directement appliqués à des phénomènes physiques. C'est cette construction qui fait la grande force de ces méthodes.

Pour ma part (Axel Courtat), ces méthodes m'ont été et me sont encore d'une utilité primordiale lors de ma formation en physique théorique. Je travaille avec ces méthodes depuis quatre ans, dans l'ordre qui est présenté dans ce livre. Elles m'ont d'abord servi de manière cruciale tout au long de mes études, pour la résolution mathématique des nombreuses équations que l'on trouve dans tous les enseignements d'une formation en physique. Mais elles m'ont été tout aussi utiles lors des différents stages de recherche que j'ai effectué, sur des sujets théoriques d'un niveau bien plus élevé que celui requis pour les apprendre. Ces méthodes ne se limitent pas à cet ouvrage et m'ont apporté une aisance calculatoire indispensable.

Pour ma part (Gaëtan Gauthier), j'ai été confronté l'ensemble à des méthodes présentées dans ce livre, de nombreuses fois, depuis que je les ai découvertes, depuis quatre ans pendant mes études en physique. Elles jouent un rôle crucial dans le développement et la traduction de l'Univers en équations. Mon parcours est plus expérimental mais ces méthodes m'ont été et me sont encore extrêmement utiles. Pour comprendre et appliquer les méthodes mathématiques, la répétition est un principe clé (surtout lorsque le problème se complexifie).

Bonne lecture,
A. Courtat & G. Gauthier

► La **seconde édition** du livre a fait l'objet de plusieurs ajouts :

1. Remarque sur le d'Alembertien, (section 1.8.1)
2. Identités de Green (section 1.9)
3. Application physique de l'analyse complexe (sous-section 7.4.8)
4. Et surtout, le chapitre 12 qui contient des sujets d'examens corrigés relatifs à tous les chapitres du livre.

Ces sujets d'examens corrigés constituent un vaste terrain supplémentaire pour s'entraîner sur les méthodes présentes dans le livre.

► La **troisième édition** du livre a fait l'objet de plusieurs ajouts :

1. Des nouveaux contenus, exemples et exercices dans de nombreux chapitres afin de relier les méthodes mathématiques à des notions de Physique sous-jacente ;
2. Un nouveau visuel pour rendre la lecture de cet ouvrage plus fonctionnelle.
3. Un nouveau chapitre introductif sur la théorie des groupes.
4. Les vecteurs (et les quantités vectorielles) sont notés en gras : **a**.

Vladimir Dotsenko, Axel Courtat, Gaëtan Gauthier (Oct. 2024)

ANALYSE VECTORIELLE

1.1 Rappel, définitions

1.1.1 Systèmes de coordonnées

Un point P dans l'espace réel à trois dimensions spatiales $\mathbb{R}^3$, sera représenté par un vecteur $\mathbf{r} = \mathbf{OP}$, avec des composantes (x, y, z) qui sont les **coordonnées cartésiennes** de ce point, (Figure 1.1) :

$$\mathbf{OP} \equiv \mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (1.1.1.1)$$

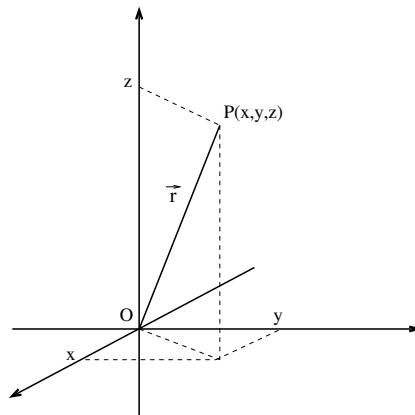


FIGURE 1.1 – Coordonnées cartésiennes dans l'espace $\mathbb{R}^3$.

Dans les **coordonnées sphériques**, ce même point sera représenté par les paramètres (r, θ, ϕ) ,

(Figure 1.2), tels que :

$$\begin{aligned}
 r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\
 \theta &= \arctan \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} = \arcsin \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\
 \phi &= \arctan \frac{y}{x} = \arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}
 \end{aligned} \tag{1.1.1.2}$$

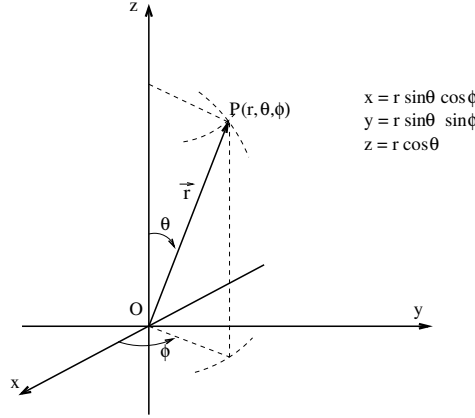


FIGURE 1.2 – Coordonnées sphériques.

Dans les **coordonnées cylindriques** le vecteur $\mathbf{r}$ représentant ce même point P , aura comme paramètres (ρ, ϕ, z) , (Figure 1.3), définis tels que :

$$\begin{aligned}
 \rho &= \sqrt{x^2 + y^2} \\
 \phi &= \arctan \frac{y}{x} = \arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\
 z &= z
 \end{aligned} \tag{1.1.1.3}$$

Dans le cas de l'espace réel à deux dimensions spatiales $\mathbb{R}^2$, le point P sera représenté par un vecteur $\boldsymbol{\rho}$, avec des composantes (x, y) qui sont les **coordonnées cartésiennes** de ce point, (Figure 1.4) :

$$\mathbf{OP} = \boldsymbol{\rho} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{1.1.1.4}$$

Dans les **coordonnées polaires** (dans $\mathbb{R}^2$), ce même point sera représenté par les paramètres (ρ, ϕ) , (Figure 1.5), tels que :

$$\begin{aligned}
 \rho &= \sqrt{x^2 + y^2} \\
 \phi &= \arctan \frac{y}{x} = \arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}
 \end{aligned} \tag{1.1.1.5}$$

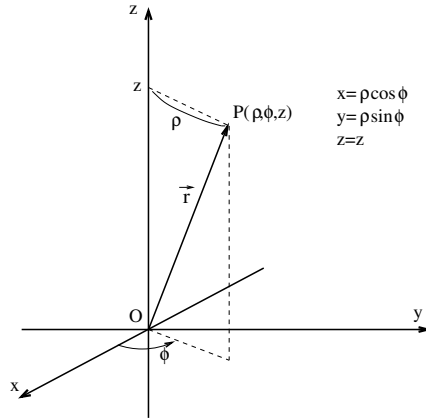
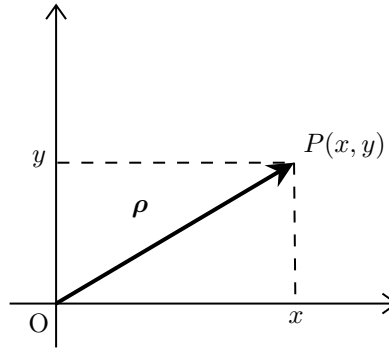
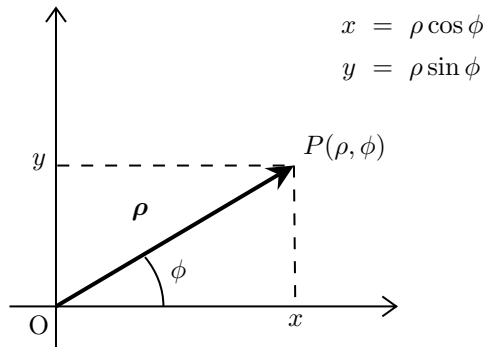


FIGURE 1.3 – Coordonnées cylindriques.

FIGURE 1.4 – Coordonnées cartésiennes dans l'espace $\mathbb{R}^2$.FIGURE 1.5 – Coordonnées polaires dans l'espace $\mathbb{R}^2$.

1.1.2 Fonctions scalaires et fonctions vectorielles

Une **fonction** $f(\mathbf{r}) \equiv f(x, y, z)$ définie dans $\mathbb{R}^3$, est une règle particulière qui fait correspondre les points de $\mathbb{R}^3$ et les nombres réels (ou complexes). Symboliquement :

$$f(\mathbf{r}) \equiv f(x, y, z) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C}) \quad (1.1.2.1)$$

Exemples :

1.

$$f(\mathbf{r}) = \frac{1}{r} \equiv \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (1.1.2.2)$$

représente le potentiel de Coulomb, en électrostatique ($U(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$), produit par la charge électrique ponctuelle placée à l'origine (nous avons posé $q/4\pi\epsilon_0 \rightarrow 1$, pour simplifier les formules).

2.

$$g(\mathbf{r}) = \frac{1}{a^2 + r^2} \equiv \frac{1}{a^2 + x^2 + y^2 + z^2} \quad (1.1.2.3)$$

a est un paramètre réel constant.

3.

$$h(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \equiv \frac{p_x x + p_y y + p_z z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \quad (1.1.2.4)$$

où $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$ est un paramètre vectoriel (l'ensemble de trois paramètres réels que nous notons p_x, p_y, p_z), $h(\mathbf{r})$ est un potentiel électrique créé par un petit dipôle placé à l'origine et $\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}$ est un produit scalaire usuel.

Dans la suite, nous allons appeler $f(\mathbf{r})$ **fonction scalaire** pour la différencier des fonctions vectorielles que l'on peut également définir dans l'espace $\mathbb{R}^3$. Une **fonction vectorielle** (ou un **champ de vecteurs**, dans la terminologie des physiciens) $\mathbf{A}(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{A}(x, y, z)$ définie dans $\mathbb{R}^3$, est une règle particulière qui fait correspondre les points de $\mathbb{R}^3$ et les points d'un autre espace $\mathbb{R}^3$, ou du même espace.

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{A}(x, y, z) = \begin{pmatrix} A_x(x, y, z) \\ A_y(x, y, z) \\ A_z(x, y, z) \end{pmatrix} \quad (1.1.2.5)$$

En d'autres termes, une fonction vectorielle est un ensemble de trois fonctions scalaires, notées $A_x(x, y, z)$, $A_y(x, y, z)$ et $A_z(x, y, z)$.

Exemples :

1.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (1.1.2.6)$$

Détaillons :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{r^3} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{r^3} \\ \frac{y}{r^3} \\ \frac{z}{r^3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\ \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\ \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \end{pmatrix} \quad (1.1.2.7)$$

Dans cet exemple $E_x(x, y, z) = x/(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}$, etc. $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ est un champ électrique créé par une charge ponctuelle placée à l'origine (toujours en admettant que $q/4\pi\epsilon_0 \rightarrow 1$).

2.

$$\mathbf{G}(\mathbf{r}) = \frac{2\mathbf{r}}{(a^2 + r^2)^2} \quad (1.1.2.8)$$

Il est évident que dans le cas de l'espace bidimensionnel $\mathbb{R}^2$, une fonction vectorielle sera de la forme :

$$\mathbf{B}(\rho) \equiv \mathbf{B}(x, y) = \begin{pmatrix} B_x(x, y) \\ B_y(x, y) \end{pmatrix} \quad (1.1.2.9)$$

qui correspond à un ensemble de deux fonctions scalaires dans $\mathbb{R}^2$.

Exemple :

$$\mathbf{B}(\rho) = \frac{\rho}{\rho^2} = \frac{1}{\rho^2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\rho^2} \\ \frac{y}{\rho^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2+y^2} \\ \frac{y}{x^2+y^2} \end{pmatrix} \quad (1.1.2.10)$$

1.2 Bases mobiles dans les coordonnées curvilignes

1.2.1 Rappel sur la base des coordonnées cartésiennes

Dans les coordonnées cartésiennes, un vecteur quelconque $\mathbf{p}$ de composantes (p_x, p_y, p_z) peut être représenté soit sous la forme présentée dans la section précédente, c'est-à-dire par une colonne :

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} \quad (1.2.1.1)$$

soit sous la forme d'une décomposition dans les vecteurs de la base :

$$\mathbf{p} = p_x \mathbf{e}_x + p_y \mathbf{e}_y + p_z \mathbf{e}_z \quad (1.2.1.2)$$

Les vecteurs $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$, montrés dans la Figure 1.6, forment une **base orthonormée de coordonnées cartésiennes**, à savoir :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{e}_x\| &= \|\mathbf{e}_y\| = \|\mathbf{e}_z\| = 1 \\ \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_y &= \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_x = 0 \end{aligned} \quad (1.2.1.3)$$

$\|\mathbf{e}_x\|$ représente le **module** (aussi la **norme**, ou encore **longueur**) du vecteur $\mathbf{e}_x$:

$$\|\mathbf{e}_x\|^2 = \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_x, \quad \|\mathbf{e}_x\| = \sqrt{\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_x} \quad (1.2.1.4)$$

Très souvent, les vecteurs $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$ de la base de coordonnées cartésiennes sont notés respectivement $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, c'est-à-dire :

$$\mathbf{e}_x \equiv \mathbf{i}, \quad \mathbf{e}_y \equiv \mathbf{j}, \quad \mathbf{e}_z \equiv \mathbf{k} \quad (1.2.1.5)$$

La forme (1.2.1.1) du vecteur $\mathbf{p}$, représenté sous la forme d'une colonne des composantes p_x , p_y , p_z , correspond implicitement à la décomposition (équation (1.2.1.2)) de $\mathbf{p}$ dans les vecteurs de la base.

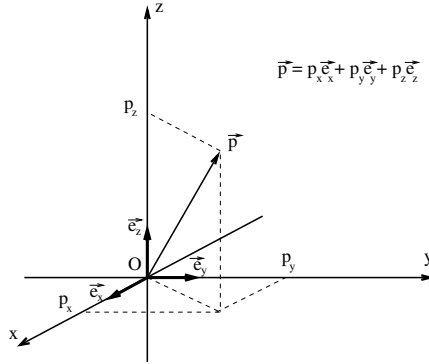


FIGURE 1.6 – Décomposition d'un vecteur $\mathbf{p}$ quelconque dans l'espace $\mathbb{R}^3$ sur la base cartésienne formée par les vecteurs $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$.

1.2.2 Bases mobiles des coordonnées curvilignes

Lorsque la symétrie du problème est appropriée, il est parfois plus facile de faire des calculs avec d'autres coordonnées. Par exemple les coordonnées sphériques et cylindriques sont souvent utilisées dans le cas de l'espace $\mathbb{R}^3$. Dans l'espace $\mathbb{R}^2$, les coordonnées polaires sont employées très souvent.

Par la suite nous allons définir des bases orthonormées qui permettent de décomposer les vecteurs, afin de les exprimer selon ces coordonnées. Autrement dit, nous allons définir des bases qui remplacent la suite des vecteurs $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ des coordonnées cartésiennes.

Nous nous placerons dans un premier temps dans le cadre plus général des coordonnées curvilignes quelconques de l'espace $\mathbb{R}^3$, mais qui sont soumises à la condition qu'elles soient localement orthogonales. Si (u_1, u_2, u_3) sont ces nouvelles coordonnées, alors l'orthogonalité locale implique que les vecteurs suivants soient orthogonaux entre eux :

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1}, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2}, \quad \mathbf{e}_3 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3} \quad (1.2.2.1)$$

Dans l'équation (1.2.2.1), $\mathbf{r}$ est censé s'exprimer en fonction des nouvelles coordonnées :

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u_1, u_2, u_3) = (x(u_1, u_2, u_3), y(u_1, u_2, u_3), z(u_1, u_2, u_3)).$$

Prenons un exemple simple, celui de l'espace bidimensionnel $\mathbb{R}^2$ et des coordonnées polaires. Nous notons $\boldsymbol{\rho}$ les vecteurs qui représentent les points d'espace $\mathbb{R}^2$, au lieu de $\mathbf{r}$ de $\mathbb{R}^3$. Alors :

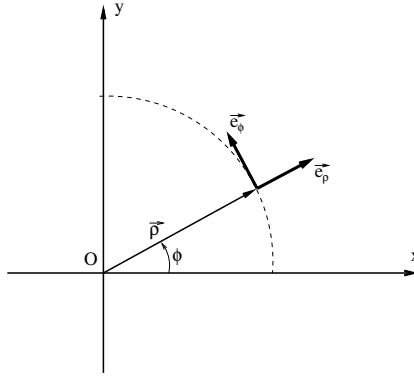
$$\boldsymbol{\rho} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos \phi \\ \rho \sin \phi \end{pmatrix} \quad (1.2.2.2)$$

ρ et ϕ étant les coordonnées polaires, curvilignes, de l'espace $\mathbb{R}^2$. Les vecteurs $\mathbf{e}_1$ et $\mathbf{e}_2$, analogues aux vecteurs de l'équation (1.2.2.1), sont déterminés comme suit :

$$\mathbf{e}_1 \equiv \mathbf{e}_\rho = \frac{\partial \boldsymbol{\rho}}{\partial \rho} = \frac{\partial}{\partial \rho} \begin{pmatrix} \rho \cos \phi \\ \rho \sin \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix} \quad (1.2.2.3)$$

$$\mathbf{e}_2 \equiv \mathbf{e}_\phi = \frac{\partial \boldsymbol{\rho}}{\partial \phi} = \frac{\partial}{\partial \phi} \begin{pmatrix} \rho \cos \phi \\ \rho \sin \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\rho \sin \phi \\ \rho \cos \phi \end{pmatrix} \quad (1.2.2.4)$$

Ces vecteurs sont montrés dans la Figure 1.7. Ils sont orthogonaux entre eux, en tout point $\boldsymbol{\rho}$ de l'espace $\mathbb{R}^2$.

FIGURE 1.7 – Base mobile $(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\phi)$ des coordonnées polaires.

Il est également facile de déterminer les vecteurs $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ (équation (1.2.2.1)) pour des coordonnées sphériques et cylindriques de l'espace $\mathbb{R}^3$.

► Pour les coordonnées sphériques de la Figure 1.2 :

$$\mathbf{e}_1 \equiv \mathbf{e}_r = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \phi \\ r \sin \theta \sin \phi \\ r \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad (1.2.2.5)$$

$$\mathbf{e}_2 \equiv \mathbf{e}_\theta = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \phi \\ r \sin \theta \sin \phi \\ r \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \cos \phi \\ r \cos \theta \sin \phi \\ -r \sin \theta \end{pmatrix} \quad (1.2.2.6)$$

$$\mathbf{e}_3 \equiv \mathbf{e}_\phi = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = \frac{\partial}{\partial \phi} \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \phi \\ r \sin \theta \sin \phi \\ r \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r \sin \theta \sin \phi \\ r \sin \theta \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.2.2.7)$$

Ces vecteurs sont montrés dans la Figure 1.8. Il est facile de vérifier qu'ils sont orthogonaux pour tout $\mathbf{r}$ (tous r, θ, ϕ).

► Pour les coordonnées cylindriques (Figure 1.3) on trouve :

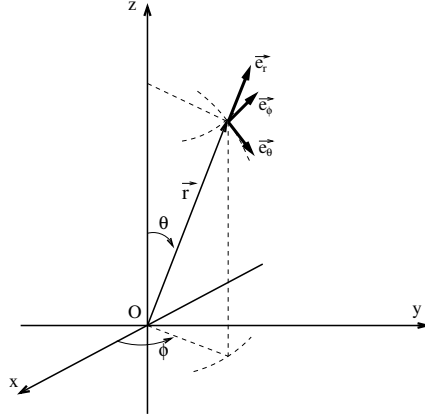
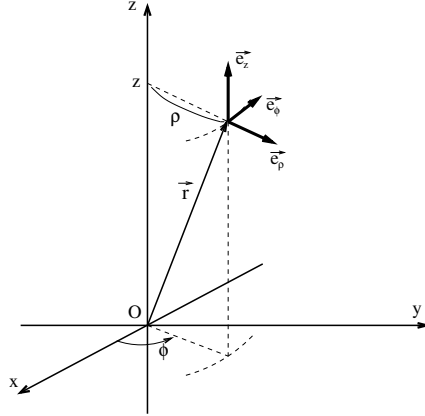
$$\mathbf{e}_1 \equiv \mathbf{e}_\rho = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} = \frac{\partial}{\partial \rho} \begin{pmatrix} \rho \cos \phi \\ \rho \sin \phi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.2.2.8)$$

$$\mathbf{e}_2 \equiv \mathbf{e}_\phi = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = \frac{\partial}{\partial \phi} \begin{pmatrix} \rho \cos \phi \\ \rho \sin \phi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\rho \sin \phi \\ \rho \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.2.2.9)$$

$$\mathbf{e}_3 \equiv \mathbf{e}_z = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \begin{pmatrix} \rho \cos \phi \\ \rho \sin \phi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.2.2.10)$$

voir la Figure 1.9. Ces vecteurs sont orthogonaux entre eux.

Revenons au cadre général des coordonnées curvilignes quelconques u_1, u_2, u_3 (localement orthogonales) et des vecteurs $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ (équation (1.2.2.1)). Ces vecteurs forment une **base locale**, ou une **base mobile**, pour un point d'espace donné (Figure 1.10). Elle sert à décomposer les

FIGURE 1.8 – Base mobile $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi)$ des coordonnées sphériques.FIGURE 1.9 – Base mobile $(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_z)$ des coordonnées cylindriques.

vecteurs : à les exprimer dans ces coordonnées. Cette base est censée être orthogonale mais elle n'est pas nécessairement normée. Autrement dit, en général $\|\mathbf{e}_i\| \neq 1$, $i = 1, 2, 3$.

Les **échelles** le long des axes de cette base locale sont définies par les modules (longueurs) des vecteurs $\{\mathbf{e}_i\}$. Nous allons les noter $e_i \equiv \|\mathbf{e}_i\|$, $i = 1, 2, 3$. Ces quantités sont appelées **facteurs d'échelle** ou **facteurs géométriques** des coordonnées curvilignes correspondantes.

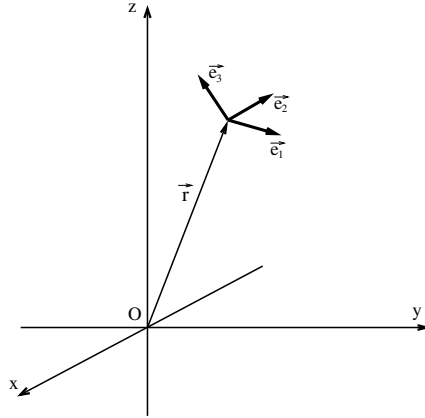
Nous introduisons également les vecteurs normés de cette base locale :

$$\hat{\mathbf{e}}_1, \quad \hat{\mathbf{e}}_2, \quad \hat{\mathbf{e}}_3 \quad (1.2.2.11)$$

$\|\hat{\mathbf{e}}_1\| = \|\hat{\mathbf{e}}_2\| = \|\hat{\mathbf{e}}_3\| = 1$, de telle façon que :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{e}}_1 &= \frac{\mathbf{e}_1}{e_1}, \quad \hat{\mathbf{e}}_2 = \frac{\mathbf{e}_2}{e_2}, \quad \hat{\mathbf{e}}_3 = \frac{\mathbf{e}_3}{e_3}, \\ \mathbf{e}_1 &= e_1 \hat{\mathbf{e}}_1, \quad \mathbf{e}_2 = e_2 \hat{\mathbf{e}}_2, \quad \mathbf{e}_3 = e_3 \hat{\mathbf{e}}_3 \end{aligned} \quad (1.2.2.12)$$

Pour des coordonnées sphériques on trouve, à partir des équations (1.2.2.5)–(1.2.2.7), les facteurs

FIGURE 1.10 – Base mobile des coordonnées quelconques u_1, u_2, u_3 , au point $\mathbf{r}$ dans $\mathbb{R}^3$.

géométriques suivants :

$$e_1 \equiv e_r = 1, \quad e_2 \equiv e_\theta = r, \quad e_3 \equiv e_\phi = r \sin \theta \quad (1.2.2.13)$$

Pour des coordonnées cylindriques (équations (1.2.2.8)–(1.2.2.10)), on obtient :

$$e_1 \equiv e_\rho = 1, \quad e_2 \equiv e_\phi = \rho, \quad e_3 \equiv e_z = 1 \quad (1.2.2.14)$$

Observons par ailleurs que le **volume élémentaire**, ou la **mesure d'intégration**, dans les intégrales dans l'espace $\mathbb{R}^3$, est égal au produit des facteurs géométriques multipliés par les différentielles des coordonnées. Dans le cas général des coordonnées curvilignes orthogonales :

$$dV \equiv d^3\mathbf{r} = e_1 e_2 e_3 du_1 du_2 du_3 \quad (1.2.2.15)$$

Les notations dV et $d^3\mathbf{r}$ sont équivalentes. Les deux sont utilisées couramment dans la littérature physique.

En effet, on peut réécrire les équations (1.2.2.1), qui définissent les vecteurs $\{\mathbf{e}_i\}$, de la manière suivante :

$$d\mathbf{r}_{(1)} = \mathbf{e}_1 du_1, \quad d\mathbf{r}_{(2)} = \mathbf{e}_2 du_2, \quad d\mathbf{r}_{(3)} = \mathbf{e}_3 du_3 \quad (1.2.2.16)$$

où les petits vecteurs $d\mathbf{r}_{(i)}$, $i = 1, 2, 3$, représentent les petits déplacements, à partir du point $\mathbf{r}$ dans $\mathbb{R}^3$, qui correspondent à des variations des coordonnées du_i , $i = 1, 2, 3$. Les trois vecteurs $d\mathbf{r}_{(1)}$, $d\mathbf{r}_{(2)}$, $d\mathbf{r}_{(3)}$ sont orthogonaux entre eux, étant proportionnels aux vecteurs $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ de la base locale. Le volume élémentaire (dans des intégrales) s'obtient par le produit des longueurs des trois vecteurs $\{d\mathbf{r}_{(i)}\}$ (équation (1.2.2.16)), ce qui nous donne la mesure d'intégration dans l'équation (1.2.2.15).

Dans les coordonnées sphériques :

$$dV \equiv d^3\mathbf{r} = e_r e_\theta e_\phi dr d\theta d\phi = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \quad (1.2.2.17)$$

Dans les coordonnées cylindriques :

$$dV \equiv d^3\mathbf{r} = e_\rho e_\phi e_z d\rho d\phi dz = \rho d\rho d\phi dz \quad (1.2.2.18)$$

Finalement, les bases mobiles orthonormées de coordonnées sphériques et cylindriques sont formées par les vecteurs

$$\hat{\mathbf{e}}_r = \frac{\mathbf{e}_r}{e_r}, \quad \hat{\mathbf{e}}_\theta = \frac{\mathbf{e}_\theta}{e_\theta}, \quad \hat{\mathbf{e}}_\phi = \frac{\mathbf{e}_\phi}{e_\phi} \quad (1.2.2.19)$$

et

$$\hat{\mathbf{e}}_\rho = \frac{\mathbf{e}_\rho}{e_\rho}, \quad \hat{\mathbf{e}}_\phi = \frac{\mathbf{e}_\phi}{e_\phi}, \quad \hat{\mathbf{e}}_z = \frac{\mathbf{e}_z}{e_z} \quad (1.2.2.20)$$

Selon la base cartésienne, les vecteurs de la **base mobile orthonormée de coordonnées sphériques**, s'expriment comme suit :

$$\hat{\mathbf{e}}_r = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{e}}_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi \\ -\sin \theta \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{e}}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.2.2.21)$$

Ou encore :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{e}}_r &= \sin \theta \cos \phi \mathbf{e}_x + \sin \theta \sin \phi \mathbf{e}_y + \cos \theta \mathbf{e}_z \\ \hat{\mathbf{e}}_\theta &= \cos \theta \cos \phi \mathbf{e}_x + \cos \theta \sin \phi \mathbf{e}_y - \sin \theta \mathbf{e}_z \\ \hat{\mathbf{e}}_\phi &= -\sin \theta \sin \phi \mathbf{e}_x + \sin \theta \cos \phi \mathbf{e}_y + 0 \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (1.2.2.22)$$

Tandis que les vecteurs de la **base mobile orthonormée de coordonnées cylindriques**, s'expriment selon la base cartésienne tels que :

$$\mathbf{e}_\rho = \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\rho \sin \phi \\ \rho \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.2.2.23)$$

ou de manière équivalente

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{e}}_\rho &= \cos \phi \mathbf{e}_x + \sin \phi \mathbf{e}_y + 0 \mathbf{e}_z \\ \hat{\mathbf{e}}_\phi &= -\sin \phi \mathbf{e}_x + \cos \phi \mathbf{e}_y + 0 \mathbf{e}_z \\ \hat{\mathbf{e}}_z &= 0 \mathbf{e}_x + 0 \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (1.2.2.24)$$

Il est évident que la **base mobile orthonormée de coordonnées polaires** est formée par les vecteurs :

$$\hat{\mathbf{e}}_\rho = \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{e}}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix} \quad (1.2.2.25)$$

également sous la forme suivante

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{e}}_\rho &= \cos \phi \mathbf{e}_x + \sin \phi \mathbf{e}_y \\ \hat{\mathbf{e}}_\phi &= -\sin \phi \mathbf{e}_x + \cos \phi \mathbf{e}_y \end{aligned} \quad (1.2.2.26)$$

Par la suite nous n'allons utiliser que des bases orthonormées. Pour simplifier les écritures, une fois les vecteurs définis par les méthodes exposées précédemment, nous allons supprimer les accents circonflexes des vecteurs des bases $\hat{\mathbf{e}}_r \rightarrow \mathbf{e}_r$, $\hat{\mathbf{e}}_\theta \rightarrow \mathbf{e}_\theta$ etc.

1.2.3 Les relations entre les vecteurs des bases de coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques

D'après les projections orthogonales des figures 1.11 et 1.12 on trouve les décompositions suivantes :

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_\rho &= \cos \phi \mathbf{e}_x + \sin \phi \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_\phi &= -\sin \phi \mathbf{e}_x + \cos \phi \mathbf{e}_y\end{aligned}\tag{1.2.3.1}$$

dans le plan (x, y) (Figure 1.11), et

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_r &= \sin \theta \mathbf{e}_\rho + \cos \theta \mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_\theta &= \cos \theta \mathbf{e}_\rho - \sin \theta \mathbf{e}_z\end{aligned}\tag{1.2.3.2}$$

dans le plan méridien (Figure 1.12).

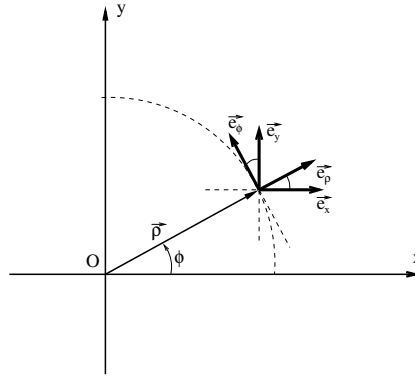


FIGURE 1.11 – Plan (x, y) .

Nous observons que les décompositions inverses s'obtiennent par la transposition des matrices des coefficients dans les équations (1.2.3.1) et (1.2.3.2). On trouve :

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_x &= \cos \phi \mathbf{e}_\rho - \sin \phi \mathbf{e}_\phi \\ \mathbf{e}_y &= \sin \phi \mathbf{e}_\rho + \cos \phi \mathbf{e}_\phi\end{aligned}\tag{1.2.3.3}$$

et

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_\rho &= \sin \theta \mathbf{e}_r + \cos \theta \mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{e}_z &= \cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_\theta\end{aligned}\tag{1.2.3.4}$$

En effet, les décompositions dans les équations (1.2.3.1) et (1.2.3.3) peuvent être réécrites comme suit :

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_\rho &= (\mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{e}_x) \mathbf{e}_x + (\mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{e}_y) \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_\phi &= (\mathbf{e}_\phi \cdot \mathbf{e}_x) \mathbf{e}_x + (\mathbf{e}_\phi \cdot \mathbf{e}_y) \mathbf{e}_y\end{aligned}\tag{1.2.3.5}$$

et

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_x &= (\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_\rho) \mathbf{e}_\rho + (\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_\phi) \mathbf{e}_\phi \\ \mathbf{e}_y &= (\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_\rho) \mathbf{e}_\rho + (\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_\phi) \mathbf{e}_\phi\end{aligned}\tag{1.2.3.6}$$

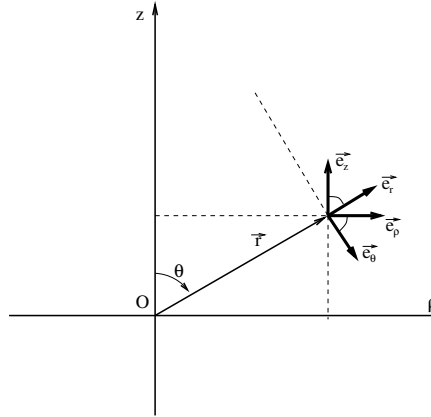


FIGURE 1.12 – Le **plan méridien**, dans cette figure, est le plan qui passe par l'axe z et le vecteur $\mathbf{r}$ dans les figures 1.8 et 1.9. Autrement dit, le plan méridien est le plan (x, z) tourné selon l'angle ϕ autour de l'axe z des figures 1.8 et 1.9. La variable ρ de l'axe horizontal correspond à la distance de l'axe z , sur le plan.

Les produits scalaires sont symétriques : $(\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_\rho) = (\mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{e}_x)$, etc. En comparant les deux décompositions on voit clairement que les matrices de coefficients, dans les équations (1.2.3.5) et (1.2.3.6), sont transposées, l'une par rapport à l'autre.

Autrement, on retrouve les décompositions inverses par les projections correspondantes dans les figures 1.11 et 1.12 .

De même, les décompositions des vecteurs $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$ dans la base sphérique $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_\phi$ s'obtiennent par la transposition de la matrice des coefficients dans l'équation (1.2.2.22). On trouve :

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_x &= \sin \theta \cos \phi \mathbf{e}_r + \cos \theta \cos \phi \mathbf{e}_\theta - \sin \theta \sin \phi \mathbf{e}_\phi \\ \mathbf{e}_y &= \sin \theta \sin \phi \mathbf{e}_r + \cos \theta \sin \phi \mathbf{e}_\theta + \sin \theta \cos \phi \mathbf{e}_\phi \\ \mathbf{e}_z &= \cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_\theta + 0 \mathbf{e}_\phi \end{aligned} \quad (1.2.3.7)$$

Observons que l'on peut également retrouver les décompositions (1.2.3.7) par les décompositions, dans un premier temps, des vecteurs $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ dans la base de $\mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{e}_\phi$ (équation (1.2.3.3)), le vecteur $\mathbf{e}_z$ restant inchangé. Et ensuite en décomposant les vecteurs $\mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{e}_z$ dans la base de $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$ (équation (1.2.3.4)), le vecteur $\mathbf{e}_\phi$ restant inchangé.

En résumé, on peut trouver toutes les relations entre les vecteurs des trois bases, cartésienne, cylindrique et sphérique, en employant les projections orthogonales des figures 1.11 et 1.12 .

Les vecteurs des bases mobiles, de coordonnées cylindriques et sphériques en particulier, ont initialement été définis dans la section 1.2.2 par les dérivées par rapport aux variables correspondantes. Mais, une fois les orientations de ces vecteurs établies et les facteurs géométriques déterminés, il est en principe possible de ne se servir que des projections orthogonales pour obtenir (ou retrouver) les relations entre tous ces vecteurs.

D'une manière générale, concernant les transformations des champs de vecteurs entre les différentes bases, les relations ci-dessous sont utiles en complément des décompositions des vecteurs

de bases présentées précédemment :

$$\rho = r \sin \theta, \quad z = r \cos \theta \quad (1.2.3.8)$$

$$x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi \quad (1.2.3.9)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad r = \sqrt{\rho^2 + z^2} \quad (1.2.3.10)$$

$$\mathbf{r} = x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z = r \mathbf{e}_r \quad (1.2.3.11)$$

$$\boldsymbol{\rho} = x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y = \rho \mathbf{e}_\rho \quad (1.2.3.12)$$

$$-y \mathbf{e}_x + x \mathbf{e}_y = \rho \mathbf{e}_\phi \quad (1.2.3.13)$$

$$\mathbf{r} = x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z = \boldsymbol{\rho} + z \mathbf{e}_z = \rho \mathbf{e}_\rho + z \mathbf{e}_z \quad (1.2.3.14)$$

1.2.4 Exemples de projections des champs de vecteurs sur des bases mobiles

Exemple 1 :

Soit le champ de vecteurs dans $\mathbb{R}^2$ (Figure 1.13)

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \equiv -y \mathbf{e}_x + x \mathbf{e}_y \quad (1.2.4.1)$$

Ses décompositions dans les bases cartésienne et polaire sont montrées sur les figures 1.14 et 1.15.

À partir du champ $\mathbf{v}$ exprimé en coordonnées cartésiennes (équation (1.2.4.1)), on peut passer vers son expression en coordonnées polaires de manière plus algébrique :

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= -y \mathbf{e}_x + x \mathbf{e}_y = -\rho \sin \phi (\cos \phi \mathbf{e}_\rho - \sin \phi \mathbf{e}_\phi) + \rho \cos \phi (\sin \phi \mathbf{e}_\rho + \cos \phi \mathbf{e}_\phi) \\ &= (\rho \sin^2 \phi + \rho \cos^2 \phi) \mathbf{e}_\phi = \rho \mathbf{e}_\phi, \quad \mathbf{v} = \rho \mathbf{e}_\phi \end{aligned} \quad (1.2.4.2)$$

Nous avons utilisé les décompositions des vecteurs $\mathbf{e}_x$ et $\mathbf{e}_y$ dans l'équation (1.2.3.3).

On trouve un accord avec la forme du champ $\mathbf{v}$ en coordonnées polaires obtenue de manière graphique dans la figure 1.15.

Exemple 2 :

Soit le champ de vecteurs dans $\mathbb{R}^3$ (Figure 1.16)

$$\mathbf{w}(\mathbf{r}) = z \mathbf{e}_z \quad (1.2.4.3)$$

Dans la base cartésienne, sa décomposition est de la forme :

$$\mathbf{w}(\mathbf{r}) = 0 \mathbf{e}_x + 0 \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \quad (1.2.4.4)$$

Ses décompositions graphiques dans les bases mobiles des coordonnées sphériques et cylindriques sont données sur les figures 1.17 à 1.19.

Par la méthode algébrique on fait passer le champ $\mathbf{w} = z \mathbf{e}_z$ vers les coordonnées sphériques de la manière suivante :

$$\mathbf{w} = z \mathbf{e}_z = r \cos \theta (\cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_\theta) = r \cos^2 \theta \mathbf{e}_r - r \cos \theta \sin \theta \mathbf{e}_\theta$$

Nous avons utilisé la décomposition (équation (1.2.3.4)) du vecteur $\mathbf{e}_z$ dans les vecteurs de la base sphérique.

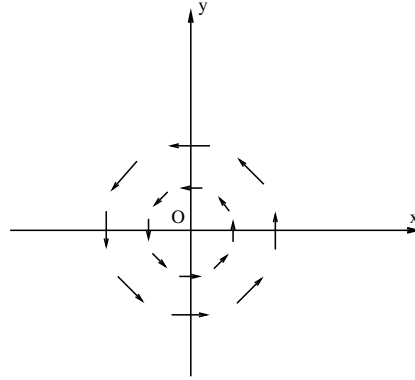


FIGURE 1.13 – Champ de vecteurs $\tilde{\mathbf{v}} = \frac{1}{2}(-y\mathbf{e}_x + x\mathbf{e}_y)$ dans $\mathbb{R}^2$. Le facteur $\frac{1}{2}$ a été ajouté pour simplifier l'image, la taille de flèches s'accordant plus ou moins à la formule. L'image du champ $\mathbf{v} = -y\mathbf{e}_x + x\mathbf{e}_y$ sera la même mais avec des flèches deux fois plus longues.

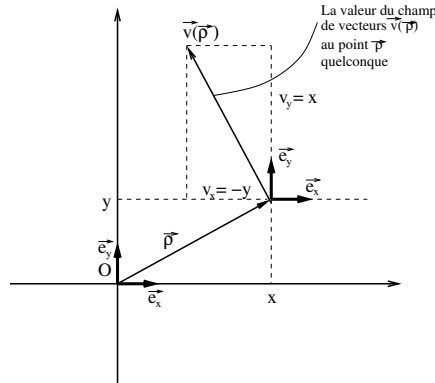


FIGURE 1.14 – Décomposition du champ de vecteurs $\mathbf{v}(\boldsymbol{\rho}) = -y\mathbf{e}_x + x\mathbf{e}_y$ dans la base cartésienne $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ de $\mathbb{R}^2$.

EXERCICE 1.

1. Dessiner le champ de vecteurs défini dans le plan par l'expression $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y$. Donner son expression en coordonnées polaires planes dans la base $(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\phi)$.
2. Dessiner dans le plan méridien le champ de vecteurs défini dans l'espace par l'expression $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = r\mathbf{e}_\theta$. Pourquoi demande-t-on le dessin seulement dans un plan méridien? Donner son expression en coordonnées cartésiennes dans la base $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$.
3. Soit le champ de vecteurs $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + 2z\mathbf{e}_z$. Donner son expression en coordonnées cylindriques dans la base $(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_z)$ puis en coordonnées sphériques dans la base $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi)$.
4. Soit le champ de vecteurs $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (x^2 + y^2)(\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y)$. Donner son expression en coordonnées cylindriques dans la base $(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_z)$ puis en coordonnées sphériques dans la base $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta,$

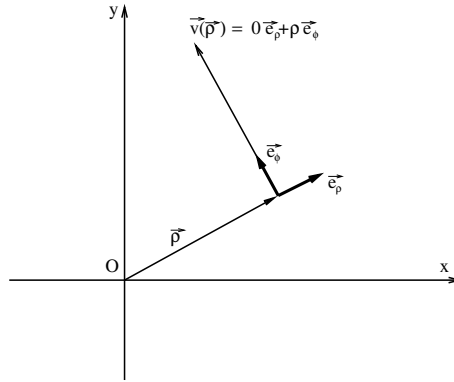


FIGURE 1.15 – Décomposition du champ de vecteurs $\mathbf{v}(\boldsymbol{\rho}) = -y\mathbf{e}_x + x\mathbf{e}_y$ dans la base mobile des coordonnées polaires.

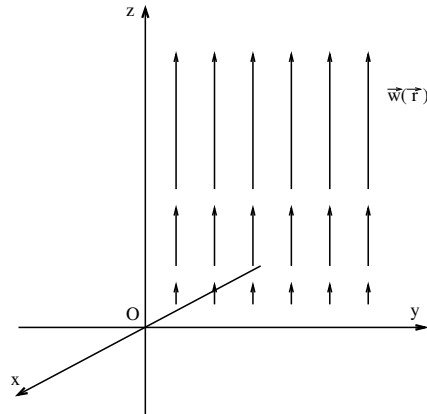


FIGURE 1.16 – Champ de vecteurs $\mathbf{w}(\mathbf{r}) = z\mathbf{e}_z$ dans $\mathbb{R}^3$.

$\mathbf{e}_\phi$).

5. Soit le champ de vecteurs $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{e}_\rho + \rho \sin \phi \mathbf{e}_\phi)$. Donner son expression en coordonnées sphériques dans la base $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi)$ puis en coordonnées cartésiennes dans la base $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$.

6. Soit le champ de vecteurs $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = r(\mathbf{e}_r + r \sin \theta \mathbf{e}_\theta)$. Donner son expression en coordonnées cylindriques dans la base $(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_z)$ puis en coordonnées cartésiennes dans la base $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$.

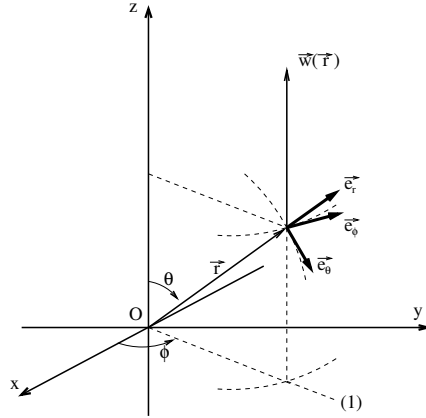


FIGURE 1.17 – Le champ de vecteurs $\mathbf{w}(\mathbf{r}) = z\mathbf{e}_z$ et la base mobile de coordonnées sphériques.

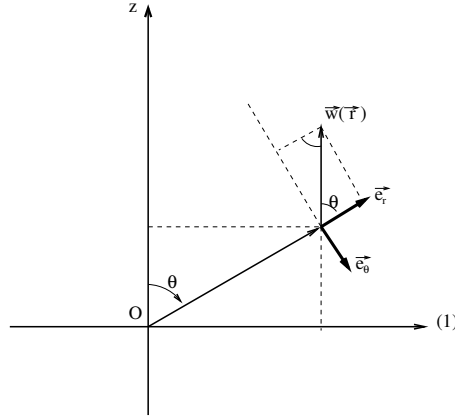


FIGURE 1.18 – Le champ $\mathbf{w}(\mathbf{r}) = z\mathbf{e}_z$, montré dans le plan $(z, (1))$ de la figure 1.17, qui est le plan méridien de cette figure. Il se décompose dans la base mobile de coordonnées sphériques comme suit : $\mathbf{w}(\mathbf{r}) = z \cos \theta \mathbf{e}_r - z \sin \theta \mathbf{e}_\theta + 0 \mathbf{e}_\phi = r \cos^2 \theta \mathbf{e}_r - r \cos \theta \sin \theta \mathbf{e}_\theta$. C'est-à-dire que $w_r = r \cos^2 \theta$, $w_\theta = -r \cos \theta \sin \theta$ sont les composantes de $\mathbf{w}(\mathbf{r})$ par rapport à la base mobile de coordonnées sphériques.

✓ Corrections

1. Le dessin est donné dans la figure 1.20. Évidemment que

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \rho \mathbf{e}_\rho \quad (1.2.4.5)$$

car

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y = \boldsymbol{\rho} = \rho \mathbf{e}_\rho \quad (1.2.4.6)$$

2. Le dessin est donné dans la figure 1.21. Le dessin dans le plan méridien est suffisant car le

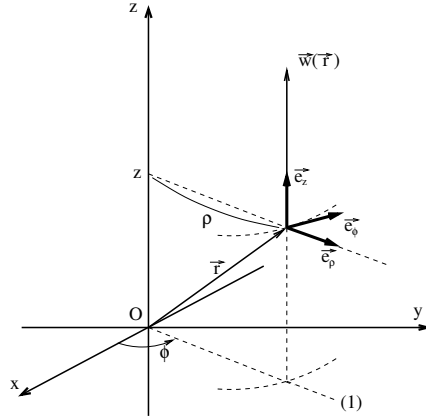


FIGURE 1.19 – Décomposition du champ de vecteurs $\mathbf{w}(\mathbf{r}) = z\mathbf{e}_z$ dans la base mobile de coordonnées cylindriques. On a : $\mathbf{w} = 0\mathbf{e}_\rho + 0\mathbf{e}_\phi + z\mathbf{e}_z$. C'est-à-dire que $w_\rho = 0$, $w_\phi = 0$, $w_z = z$ sont les composantes de $\mathbf{w}(\mathbf{r})$ par rapport à la base mobile de coordonnées cylindriques.

champ $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = r\mathbf{e}_\theta$ est de symétrie axiale (ne dépend pas de ϕ). Par l'équation (1.2.2.22),

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}(\mathbf{r}) &= r\mathbf{e}_\theta = r(\cos\theta\cos\phi\mathbf{e}_x + \cos\theta\sin\phi\mathbf{e}_y - \sin\theta\mathbf{e}_z) \\
 &= z\cos\phi\mathbf{e}_x + z\sin\phi\mathbf{e}_y - \rho\mathbf{e}_z \\
 &= z\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathbf{e}_x + z\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathbf{e}_y - \sqrt{x^2+y^2}\mathbf{e}_z \\
 \mathbf{v}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(zx\mathbf{e}_x + zy\mathbf{e}_y - (x^2+y^2)\mathbf{e}_z)
 \end{aligned} \tag{1.2.4.7}$$

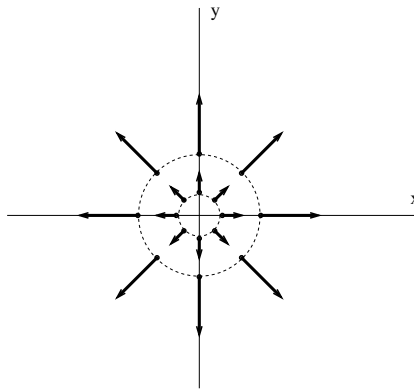
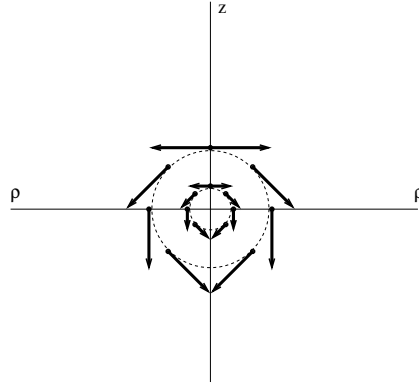


FIGURE 1.20 – Dessin du champ $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y = \rho\mathbf{e}_\rho$ dans le plan (x, y) .

3. Le calcul direct, par la substitution des expressions des x , y , z , $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$ en coordonnées et vecteurs de la base sphériques serait long, tout en restant faisable. En profitant de la forme

FIGURE 1.21 – Dessin du champ de vecteurs $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = r \mathbf{e}_\theta$ dans le plan méridien.

particulière de ce champ de vecteurs, on effectue un calcul plus rapide :

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(\mathbf{r}) &= x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + 2z \mathbf{e}_z = x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z + z \mathbf{e}_z \\ &= \mathbf{r} + z \mathbf{e}_z = r \mathbf{e}_r + r \cos \theta (\cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_\theta)\end{aligned}$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (r + r \cos^2 \theta) \mathbf{e}_r - r \cos \theta \sin \theta \mathbf{e}_\theta \quad (1.2.4.8)$$

en coordonnées sphériques, et

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \rho \mathbf{e}_\rho + 2z \mathbf{e}_z \quad (1.2.4.9)$$

en coordonnées cylindriques.

✓ Réponses

4. En coordonnées cylindriques :

$$\mathbf{v} = \rho^2 [(\cos \phi + \sin \phi) \mathbf{e}_\rho + (\cos \phi - \sin \phi) \mathbf{e}_\phi] \quad (1.2.4.10)$$

En coordonnées sphériques :

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= r^2 \sin^2 \theta [(\cos \phi + \sin \phi) \sin \theta \mathbf{e}_r \\ &\quad + (\cos \phi + \sin \phi) \cos \theta \mathbf{e}_\theta + (\cos \phi - \sin \phi) \mathbf{e}_\phi]\end{aligned} \quad (1.2.4.11)$$

5.

$$\mathbf{v} = r \sin^2 \theta \mathbf{e}_r + r \sin \theta \cos \theta \mathbf{e}_\theta + r^2 \sin^2 \theta \sin \phi \mathbf{e}_\phi \quad (1.2.4.12)$$

$$\mathbf{v} = (x - y^2) \mathbf{e}_x + (y + xy) \mathbf{e}_y \quad (1.2.4.13)$$

6.

$$\mathbf{v} = (\rho + \rho z) \mathbf{e}_\rho + (z - \rho^2) \mathbf{e}_x \quad (1.2.4.14)$$

$$\mathbf{v} = x(1+z) \mathbf{e}_x + y(1+z) \mathbf{e}_y + (z - x^2 - y^2) \mathbf{e}_z \quad (1.2.4.15)$$

1.3 Intégrales dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$, théorème de Fubini et exemples de calculs

1.3.1 Intégrales dans $\mathbb{R}^2$

Soit $f(x, y) \equiv f(\boldsymbol{\rho})$ une fonction de deux variables.

Définition

L'intégrale I sur le domaine D dans le plan bidimensionnel (Figure 1.22) est définie comme la limite de la somme de Darboux correspondante :

$$I = \int_D d^2 \boldsymbol{\rho} f(\boldsymbol{\rho}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N ds_i f(\boldsymbol{\rho}_i) \quad (1.3.1.1)$$

où

$$d^2 \boldsymbol{\rho} \equiv ds = dx dy \quad (1.3.1.2)$$

est l'aire d'un élément dans D , l'**aire élémentaire**, ou la **mesure d'intégration** dans l'intégrale bidimensionnelle, dans les coordonnées cartésiennes (Figure 1.22).

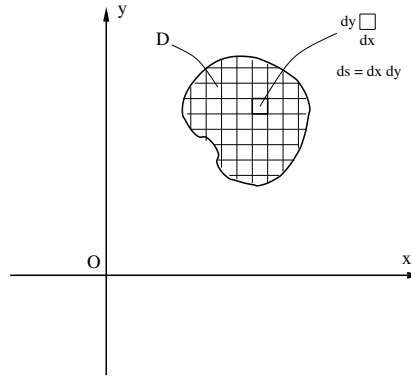


FIGURE 1.22 – Domaine d'intégration D , coupé sur N éléments rectangulaires.

Théorème de Fubini

L'intégrale sur D (domaine bidimensionnel) de $f(x, y)$, une fonction de deux variables, est égale à l'intégrale double, d'abord sur y et ensuite sur x , ou inversement. La valeur de l'intégrale ne change pas sous le changement de l'ordre d'intégration :

$$\int_D d^2 \boldsymbol{\rho} f(\boldsymbol{\rho}) \equiv \int_D dx dy f(x, y) = \int dx \int dy f(x, y) = \int dy \int dx f(x, y) \quad (1.3.1.3)$$

♠ **Démonstration** : L'idée de la démonstration est simple. L'intégrale double, où l'on intègre d'abord sur y et ensuite sur x , correspond à la sommation, dans la somme de Darboux de

l'équation (1.3.1.1), d'abord sur de petits rectangles appartenant à des colonnes et ensuite on somme les colonnes (les résultats des sommations dans les colonnes) (Figure 1.22).

Inversement, on somme d'abord les petits rectangles appartenant à des lignes, dans la figure 1.22, et ensuite on additionne les lignes (les résultats de sommation dans les lignes).

Évidemment que la somme totale dans l'équation (1.3.1.1) restera la même, indépendamment de la manière dont on aura organisé la sommation. $\square$

Exemple 1 : Soit

$$f(\boldsymbol{\rho}) \equiv f(x, y) = x + y \quad (1.3.1.4)$$

et D un rectangle (Figure 1.23) :

$$D : 0 < x < a, \quad 0 < y < b \quad (1.3.1.5)$$

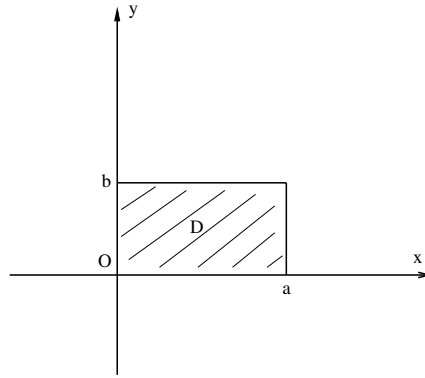


FIGURE 1.23 – Domaine d'intégration dans l'intégrale de l'exemple 1.

1. Dans le premier calcul, on somme d'abord sur y et ensuite sur x

$$I = \int_D d^2\boldsymbol{\rho} f(\boldsymbol{\rho}) = \int_D dx dy f(x, y) \quad (1.3.1.6)$$

selon le théorème de Fubini :

$$I = \int_0^a dx \int_0^b dy f(x, y) = \int_0^a dx \int_0^b dy (x + y) \quad (1.3.1.7)$$

Dans la première intégrale, quand on intègre sur y , x est considérée comme une constante,

$$I = \int_0^a dx \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_0^b = \int_0^a dx \left(xb + \frac{b^2}{2} \right) \quad (1.3.1.8)$$

et ensuite on intègre sur x , le résultat d'intégration sur y ,

$$I = \left[\frac{x^2}{2} b \right]_0^a + \left[\frac{b^2}{2} x \right]_0^a = \frac{a^2 b}{2} + \frac{a b^2}{2} = \frac{a b (a + b)}{2} \quad (1.3.1.9)$$

$$I = \frac{a b (a + b)}{2} \quad (1.3.1.10)$$

2. Dans le second calcul, on somme d'abord sur x et ensuite sur y :

$$I = \int_D dx dy f(x, y) = \int_0^b dy \int_0^a dx (x + y) \quad (1.3.1.11)$$

Pendant la première intégration (sur x), y est considéré comme une constante :

$$I = \int_0^b dy \left[\frac{x^2}{2} + xy \right]_0^a = \int_0^b dy \left(\frac{a^2}{2} + ay \right) \quad (1.3.1.12)$$

On intègre ensuite sur y :

$$\left[\frac{a^2}{2} y \right]_0^b + \left[a \frac{y^2}{2} \right]_0^b = \frac{a^2 b}{2} + \frac{ab^2}{2} = \frac{ab(a+b)}{2} \quad (1.3.1.13)$$

On trouve le même résultat, en accord avec la théorème de Fubini.

Exemple 2 : Soit $f(x, y) = x + y$ et D un triangle (Figure 1.24).

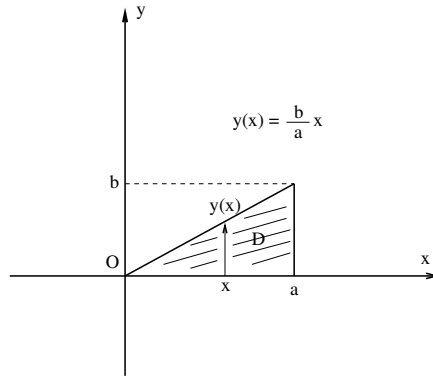


FIGURE 1.24 – L'intégration se fait d'abord sur y , ensuite sur x .

1.

$$I = \int_D d^2 \rho f(\rho) = \int_D dx dy f(x, y) \quad (1.3.1.14)$$

Par le théorème de Fubini

$$I = \int_0^a dx \int_0^{y(x)} dy f(x, y) \quad (1.3.1.15)$$

Dans l'intégrale sur y , avec x fixé quelconque entre 0 et a , on intègre sur y de 0 à $y(x) = \frac{b}{a}x$, la valeur maximale de y qui se trouve sur le bord de D , lorsque l'on traverse le domaine D dans le sens vertical. Cette limite supérieure dépend de x , elle est différente pour différentes valeurs de x . Autrement dit, la limite supérieure de y n'est pas une constante (comme c'était le cas dans l'exemple 1). Elle est une fonction de x . Cette fonction correspond à l'équation de la ligne qui délimite le domaine D . Dans cet exemple, cette ligne est une droite, d'équation $y = \frac{b}{a}x$ (Figure 1.24).

La suite du calcul dans l'équation (1.3.1.15), en y mettant les forme explicites de $y(x)$ et de $f(x, y)$ est :

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^a dx \int_0^{\frac{b}{a}x} dy (x+y) = \int_0^a dx \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_0^{\frac{b}{a}x} \\
 &= \int_0^a dx \left(x \frac{b}{a}x + \frac{1}{2} \left(\frac{b}{a}x \right)^2 \right) = \int_0^a dx \left(\frac{b}{a}x^2 + \frac{b^2}{2a^2}x^2 \right) \\
 &= \left(\frac{b}{a} + \frac{b^2}{2a^2} \right) \int_0^a dx x^2 = \frac{2ab + b^2}{2a^2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^a \\
 &= \frac{2ab + b^2}{2a^2} \cdot \frac{a^3}{3} = \frac{ab(2a + b)}{6} \\
 I &= \frac{ab(2a + b)}{6} \tag{1.3.1.16}
 \end{aligned}$$

2. Il est proposé en exercice, de refaire le calcul de cette intégrale en arrangeant différemment les intégrations dans l'intégrale double : en intégrant d'abord sur x et ensuite sur y . Le début du calcul est comme suit (Figure 1.25) :

$$I = \int_0^b dy \int_{x(y)}^a dx f(x, y) \tag{1.3.1.17}$$

où $x(y) = \frac{a}{b}y$. Cette fois-ci c'est la limite inférieure de x qui est une fonction de y . En procédant à la suite du calcul on doit trouver le résultat de l'équation (1.3.1.16).

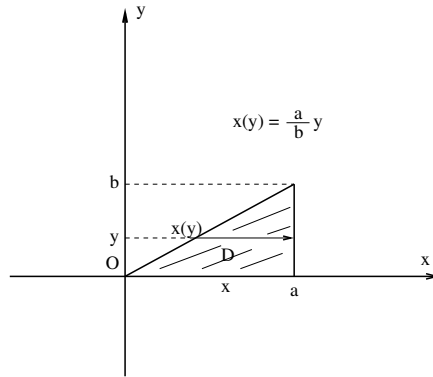
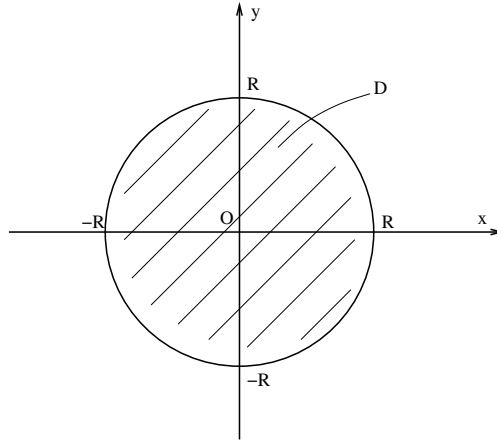
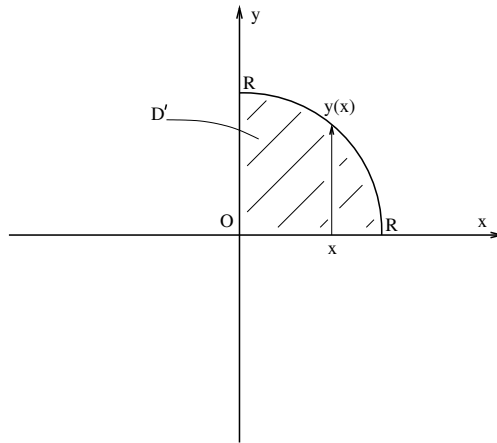


FIGURE 1.25 – L'intégration selon un ordre différent : d'abord sur x , ensuite sur y .

Exemple 3 : l'aire d'un disque (Figure 1.26) :

Dans ce cas, où l'on cherche à déterminer l'aire d'un domaine, il faut mettre $f(x, y) = 1$.

Tout d'abord, du fait de la symétrie du domaine (Figure 1.26), il suffit d'intégrer sur un quart du disque (Figure 1.27). Évidemment, en intégrant sur le domaine réduit (Figure 1.27), on trouvera un quart de l'aire du disque total (Figure 1.26).

FIGURE 1.26 – D , disque de rayon R , centré en O .FIGURE 1.27 – D' correspond à un quart du disque. L'équation du bord est : $x^2 + y^2 = R^2 \implies y(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$.

Même si cette réduction du domaine n'est pas indispensable, les limites d'intégration dans l'intégrale double vont être plus simples pour un quart du disque par rapport au disque total.

Notons par I l'aire total du disque. Alors

$$\begin{aligned} \frac{I}{4} &= \int_{D'} dx \, dy \cdot 1 = \int_0^R dx \int_0^{y(x)} dy \\ &= \int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} dy = \int_0^R dx [y]_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} = \int_0^R dx \sqrt{R^2 - x^2} \end{aligned} \quad (1.3.1.18)$$

Nous avons choisi d'intégrer, dans l'intégrale double, d'abord sur y et ensuite sur x , comme cela est indiqué dans la figure 1.27.

Il est utile de changer la variable d'intégration, dans l'équation (1.3.1.18). Posons

$$x = R \sin \phi \quad (1.3.1.19)$$

Alors

$$dx = R \cos \phi \, d\phi, \quad \sqrt{R^2 - x^2} = \sqrt{R^2 - R^2 \sin^2 \phi} = R \sqrt{1 - \sin^2 \phi} = R \cos \phi \quad (1.3.1.20)$$

Pour les limites d'intégration :

$$\begin{aligned} &\text{quand } x \text{ varie de } 0 \text{ à } R \\ &\phi \text{ doit varier de } 0 \text{ à } \frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad (1.3.1.21)$$

d'après l'équation (1.3.1.19) et la courbe de $\sin \phi$.

Selon l'équation (1.3.1.18) et les substitutions précédentes, on trouve :

$$\begin{aligned} \int_0^R dx \sqrt{R^2 - x^2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} R \cos \phi \, d\phi \cdot R \cos \phi \\ &= R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \phi \cdot d\phi = R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (1 + \cos 2\phi) d\phi \\ &= \frac{R^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi + \frac{R^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \cdot \cos 2\phi \\ &= \frac{R^2}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{R^2}{2} \left[\frac{1}{2} \sin 2\phi \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi R^2}{4} + 0 = \frac{\pi R^2}{4} \end{aligned} \quad (1.3.1.22)$$

Nous trouvons que $I/4 = \pi R^2/4$. Donc l'aire du disque est

$$I = \pi R^2 \quad (1.3.1.23)$$

Exemple 3' :

Calculons l'aire du disque de la figure 1.26 en utilisant les coordonnées polaires. Cette fois-ci il n'y a pas de raison de diviser le disque en quatre parties, les limites d'intégration avec les coordonnées polaires étant aussi simples pour le disque total que pour un quart du disque.

Avec les coordonnées polaires, pour le disque entier (Figure 1.28), le calcul se fait comme suit ($f(\rho)$ est toujours égale à 1) :

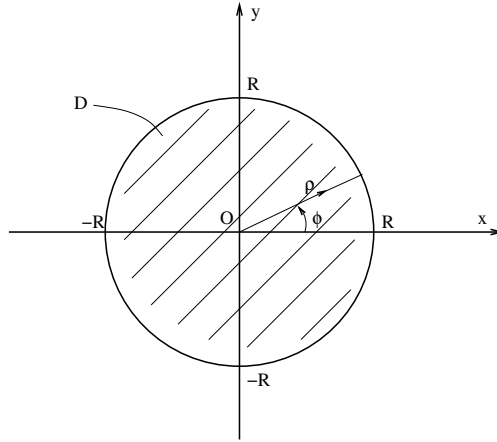
$$I = \int_D d^2 \rho \cdot 1 = \int_D \rho d\rho d\phi \quad (1.3.1.24)$$

Rappelons que dans les coordonnées polaires $d^2 \rho = \rho d\rho d\phi$. On trouve :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^R \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\phi = \left[\frac{\rho^2}{2} \right]_0^R \cdot [\phi]_0^{2\pi} = \frac{R^2}{2} \cdot 2\pi = \pi R^2 \\ I &= \pi R^2 \end{aligned} \quad (1.3.1.25)$$

En accord avec le résultat du calcul en coordonnées cartésiennes de l'exemple 3 (équation (1.3.1.23)).

Observons que l'utilité des coordonnées polaires, pour la géométrie circulaire du domaine D , réside dans le fait que les limites d'intégration, sur ρ et sur ϕ , sont constantes : $0 \rightarrow R$ pour ρ , $0 \rightarrow 2\pi$ pour ϕ , quand on fait « scanner » le disque entier en variant ρ et ϕ . Tandis qu'elles sont variables $0 \rightarrow y(x)$, pour y , dans les coordonnées cartésiennes (Figure 1.27). En revanche, dans les coordonnées cartésiennes, les limites d'intégration de l'exemple 1 sont constantes, pour un domaine D rectangulaire.

FIGURE 1.28 – Disque D intégré en coordonnées polaires

EXERCICE 2. Il est suggéré de calculer l'aire du domaine borné par l'ellipse (Figure 1.29) en utilisant les coordonnées cartésiennes.

♣ *Indications :* Comme lors du calcul pour le disque, il est plus simple de faire le calcul pour un quart de l'ellipse (Figure 1.30). Le calcul commence comme :

$$\frac{I}{4} = \int_{D'} dx dy \cdot 1 = \int_0^a dx \int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} dy = \int_0^a dx b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \quad (1.3.1.26)$$

Il faut changer la variable d'intégration :

$$x = a \sin \phi \quad (1.3.1.27)$$

et procéder à la suite du calcul. Finalement, on doit trouver que :

$$I = \pi ab \quad (1.3.1.28)$$

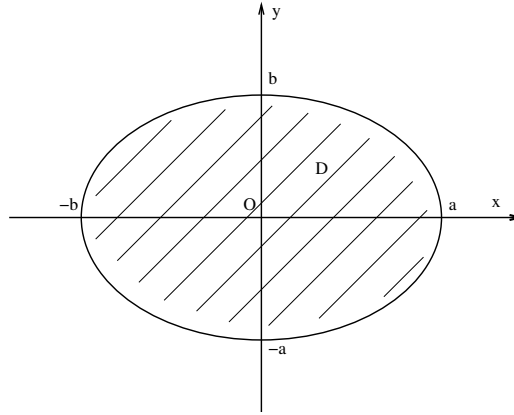
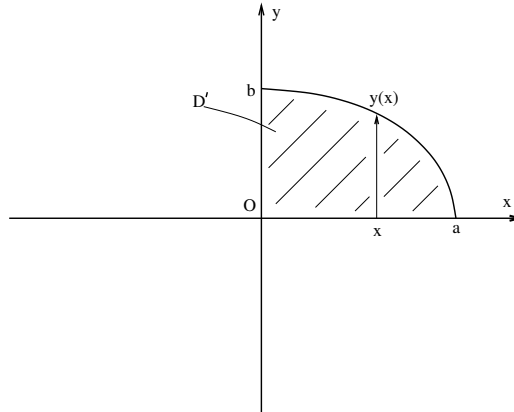
On doit trouver le même résultat en faisant les intégrations selon l'ordre inverse des x , y , en intégrant d'abord sur x et ensuite sur y :

$$\frac{I}{4} = \int_{D'} dx dy \cdot 1 = \int_0^b dy \int_0^{x(y)} dx \quad (1.3.1.29)$$

Dans ce cas

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \implies x(y) = a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}} \quad (1.3.1.30)$$

et en procédant le calcul on doit retrouver $\pi ab/4$.

FIGURE 1.29 – Domaine D borné par une ellipse.FIGURE 1.30 – équation de l'ellipse : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \implies y(x) = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$.

1.3.2 Intégrales dans $\mathbb{R}^3$

Soit $f(x, y, z) \equiv f(\mathbf{r})$ une fonction de trois variables.

Définition

L'intégrale I sur le domaine D dans l'espace tridimensionnel (Figure 1.31) est définie comme la limite de la somme de Darboux correspondante :

$$I = \int_D d^3\mathbf{r} f(\mathbf{r}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N dV_i f(\mathbf{r}_i) \quad (1.3.2.1)$$

où

$$d^3\mathbf{r} \equiv dV = dx dy dz \quad (1.3.2.2)$$

est le volume d'un élément dans D (petit cube), le **volume élémentaire** ou la **mesure d'intégration**, dans l'intégrale tridimensionnelle en coordonnées cartésiennes. Le domaine D est considéré être découpé sur N petits cubes, dont l'un est montré explicitement sur la figure 1.31.

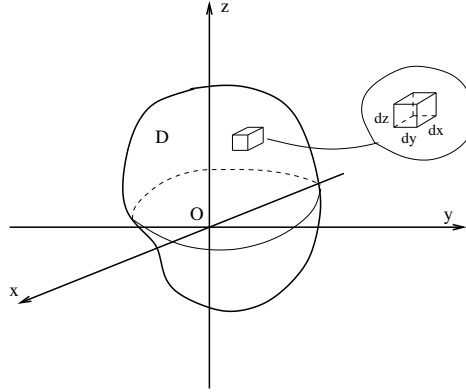


FIGURE 1.31 – Domaine D dans $\mathbb{R}^3$ et le volume élémentaire dV à l'intérieur, en coordonnées cartésiennes : $dV \equiv d^3\mathbf{r} = dx dy dz$.

Théorème de Fubini

L'intégrale sur D (domaine tridimensionnel) de $f(x, y, z)$, une fonction de trois variables, est égale à l'intégrale triple où l'on intègre successivement sur z , puis sur y et ensuite sur x , ou dans un autre ordre. La valeur de l'intégrale ne change pas sous les changements de l'ordre d'intégration sur les trois variables dans l'intégrale triple :

$$\begin{aligned} \int_D d^3\mathbf{r} f(\mathbf{r}) &\equiv \int_D dx dy dz f(x, y, z) \\ &= \int dx \int dy \int dz f(x, y, z) = \int dy \int dz \int dx f(x, y, z) = \dots \end{aligned} \quad (1.3.2.3)$$

L'idée de la démonstration est une généralisation directe de la démonstration dans le cas bidimensionnel, présentée au début de la section 1.3.1. Elle s'appuie sur les différentes façons d'organiser la sommation dans la somme de Darboux (équation (1.3.2.1)) sur des petits cubes, sur lesquels le domaine D (Figure 1.31) est considéré être découpé.

Exemple 1 :

D est un cube $a \times b \times c$ (Figure 1.32) et $f(x, y, z)$ est une fonction quelconque de trois variables. Dans ce cas l'intégrale de $f(x, y, z)$ sur D prendra la forme :

$$I = \int_D d^3\mathbf{r} f(x, y, z) = \int_D dx dy dz f(x, y, z) \quad (1.3.2.4)$$

Par le théorème de Fubini :

$$I = \int_0^a dx \int_0^b dy \int_0^c dz f(x, y, z) \quad (1.3.2.5)$$