

**Física para los grados de Sistemas de
Telecomunicaciones e Ingeniería Telemática**

Física para los grados de Sistemas de Telecomunicaciones e Ingeniería Telemática

Antonio Pérez Garrido



AULAMAGNA
PROYECTO CLAVE

Física para los grados de Sistemas de Telecomunicaciones e Ingeniería Telemática

Primera edición: 2022

ISBN: 9788419544551

ISBN eBook: 9788419187963

Depósito legal SE 1980-2022

© de los textos:

Antonio Pérez Garrido

© de esta edición:

Editorial Aula Magna, 2022. McGraw-Hill Interamericana de España S.L.

editorialaulamagna.com

info@editorialaulamagna.com

Impreso en España – Printed in Spain

Quedan prohibidos, dentro de los límites establecidos en la ley y bajo los apercibimientos legalmente previstos, la reproducción total o parcial de esta obra por cualquier medio o procedimiento, ya sea electrónico o mecánico, el tratamiento informático, el alquiler o cualquier otra forma de cesión de la obra sin la autorización previa y por escrito de los titulares del copyright. Diríjase a info@editorialaulamagna.com si necesita fotocopiar o escanear algún fragmento de esta obra.

Prefacio

Este libro contiene el material de la asignatura Física de los grados de Sistemas de Telecomunicaciones e Ingeniería Telemática impartidos en la Universidad Politécnica de Cartagena. Esta asignatura es cuatrimestral, pero tiene una distribución de contenidos que corresponde a una física general, habitualmente impartida en dos cuatrimestres, incluyendo mecánica, ondas y electricidad y magnetismo. Aquí está el esfuerzo realizado para comprimir esta asignatura de manera que pueda ser impartida en tan solo cuatro meses, tal y como nos obligan muchos planes de estudios contemporáneos. Por este motivo, algunos temas, como el de ondas, apenas contienen material y solo sirven para presentar conceptos básicos; de manera que se resientan lo menos posible los temas de electricidad y magnetismo, más relacionados con los contenidos de asignaturas que tendrán que abordar posteriormente en estas titulaciones.

El primer tema es una introducción al cálculo vectorial, que llamamos tema 0 por ser un prerrequisito para poder seguir el resto de temas, y que no forma parte de los objetivos perseguidos en la asignatura. El contenido de cada capítulo se puede dividir en cuatro bloques: texto principal y cuadros de ejemplos, demostraciones y temas avanzados. Esta división permite su abordaje en cuatro niveles de profundidad. En un primer nivel tenemos un estudio superficial simplemente leyendo el texto principal, donde se expone la teoría, pero sin demostrar ni ilustrar con ejemplos. Permite una lectura rápida de los contenidos para poder tener una visión global. Un segundo nivel incorpora el estudio de los cuadros de ejemplos, que son una importante ayuda para entender la teoría y poder abordar los problemas propuestos al final de cada capítulo. En un tercer nivel de profundidad se requiere también la comprensión de los cuadros con las demostraciones. El segundo nivel, junto con la práctica en la resolución de problemas, permitiría

tener un mínimo para poder alcanzar los objetivos de aprendizaje de la asignatura, pero siendo recomendable alcanzar el tercer nivel. Por último están los cuadros con temas avanzados, que constituyen un cuarto nivel de profundidad. Estos temas avanzados están pensados para el estudiante que quiera ahondar en determinadas partes (o todas) de la materia y exceden el nivel requerido en la asignatura.

Agradecimientos

En primer lugar quiero dar las gracias a mi compañero Javier Cerrillo, por realizar una primera revisión de los borradores iniciales. También quiero agradecer, y de manera muy especial, a Encarni Yelo por su profesional y desinteresada revisión de estilo de todo el libro.

*Dedicado a la memoria de mis padres,
a Encarni, a mis hermanos y a las jo-
vencitas Elena y Clara*

Índice general

Prefacio	iii
0. Cálculo vectorial	1
0.1. Definición de vector	1
0.1.1. Componentes de un vector	2
0.1.2. Módulo de un vector	2
0.2. Operaciones con vectores	3
0.2.1. Suma	3
0.2.2. Producto de un vector por un escalar	3
0.2.3. Diferencia de vectores	4
0.2.4. Producto escalar	5
0.2.5. Producto vectorial	6
0.3. Campos escalares y vectoriales	10
0.4. Operador nabla	11
0.4.1. Gradiente	12
0.4.2. Divergencia	14
0.4.3. Rotacional	15
0.4.4. Laplaciano	16

0.5. Representación de superficies por vectores	18
0.6. Flujo de un campo vectorial	20
0.7. Circulación de un campo vectorial	21
0.8. Algunos teoremas de utilidad	24
0.8.1. Teorema fundamental del cálculo	24
0.8.2. Teorema de la divergencia de Gauss	25
0.8.3. Teorema de Stokes	26
0.8.4. Teorema de Helmholtz	29
0.9. Identidades vectoriales	30
Problemas	31
 1. Cinemática y dinámica de la partícula	 33
1.1. Cinemática	33
1.1.1. Movimiento de la partícula	33
1.1.2. Velocidad	35
1.1.3. Aceleración	37
1.1.4. Coordenadas polares	41
1.2. Dinámica de la partícula	46
1.2.1. Leyes de Newton	46
1.2.2. Peso de los cuerpos	51
1.3. Fuerzas de rozamiento	52
1.3.1. Fuerzas de rozamiento estático	52
1.3.2. Fuerzas de rozamiento cinético	52
Problemas	56
 2. Trabajo y energía	 59

2.1. Definición de trabajo	59
2.1.1. Fuerzas conservativas	60
2.2. Energía	62
2.3. Fuerzas centrales	69
Problemas	72
3. Sistemas de partículas	75
3.1. Centro de masas	76
3.1.1. Teoremas relativos al centro de masas	77
3.1.2. Sistema de referencia del centro de masas	80
3.2. Momentos de inercia	82
3.2.1. Radio de giro	83
3.2.2. Momentos de inercia respecto de los ejes del sistema de referencia	84
3.2.3. Teorema de Steiner	85
3.2.4. Teorema de los ejes perpendiculares	86
3.3. Momento lineal o cantidad de movimiento	87
3.4. Energía cinética de un sistema de partículas	90
3.5. Momento angular o cinético y momento de una fuerza	91
3.5.1. Momento angular	91
3.5.2. Momento de una fuerza	92
3.6. Momentos angular y de fuerzas en los sistemas de partículas	94
Problemas	101
4. Movimiento plano del sólido rígido	103
4.1. Movimiento general de un sólido rígido	103
4.2. Energía cinética de rotación	108

4.3. Movimiento plano	109
4.4. Movimiento de un punto de un sólido rígido respecto a otro	111
4.5. Par de fuerzas	112
4.6. Estática	115
Problemas	116
5. Movimiento ondulatorio, ondas sonoras	119
5.0.1. Ondas en una cuerda	119
5.0.2. Tipos de ondas	121
5.1. Intensidad de una onda	121
5.1.1. Atenuación	122
5.1.2. Absorción	123
5.2. Ondas sonoras	123
5.2.1. Sensación sonora	125
5.2.2. Efecto Doppler	126
Problemas	128
6. Campo electrostático	129
6.1. Ley de Coulomb	129
6.2. Campo eléctrico	131
6.2.1. Distribución continua de carga eléctrica	134
6.2.2. Líneas del campo eléctrico	135
6.3. Flujo del campo eléctrico: Ley de Gauss	136
6.3.1. Uso de la ley de Gauss para el cálculo de campos eléctricos	139
6.3.2. Carga en conductores en equilibrio electrostático	143
6.4. Energía eléctrica	143

6.4.1. Potencial eléctrico	146
Problemas	151
7. Conductores y dieléctricos	153
7.1. Corriente eléctrica	153
7.1.1. Densidad de corriente	154
7.1.2. Ley de Ohm microscópica	157
7.1.3. Resistencia	159
7.1.4. Energía consumida por un corriente eléctrica	164
7.1.5. Generadores	165
7.2. Capacidad	169
7.2.1. Condensadores	170
7.2.2. Energía en un condensador	174
7.3. Dieléctricos	175
7.3.1. Dipolos eléctricos	175
7.3.2. Dipolos en dieléctricos	177
7.3.3. Polarización	178
7.3.4. Condensadores con dieléctrico	184
Problemas	187
8. Campo magnético	189
8.1. Fuerza sobre una carga en movimiento	191
8.1.1. Fuerza magnética sobre una corriente	194
8.2. Fuentes del campo magnético	198
8.2.1. Campo magnético creado por una corriente	199
8.2.2. Fuerzas entre corrientes	202

8.3. Ley de Ampère	204
8.4. Ley de Gauss del campo magnético	208
8.4.1. Flujo del campo magnético	208
Problemas	212
9. Inducción magnética	213
9.1. Ley de Ampère-Maxwell	213
9.2. Ley de Faraday-Henry	215
9.2.1. Inducción	216
9.2.2. Autoinducción	219
9.2.3. Energía en una autoinducción	221
9.3. Leyes de Maxwell del electromagnetismo	223
Problemas	228
10. Magnetismo en la materia	231
10.1. Tipos de materiales magnéticos	231
10.2. Imantación o magnetización	233
10.2.1. Corrientes moleculares	233
10.3. Intensidad magnética	235
10.3.1. Materiales homogéneos, isotropos y lineales	236
10.4. Ciclo de histéresis de un ferromagnético	238
Problemas	241
Índice alfabético	242

Tema 0

Cálculo vectorial

En este capítulo presentamos la notación vectorial que emplearemos e introducimos determinados conceptos que serán de utilidad a lo largo de toda la materia.

0.1. Definición de vector

En física ciertas magnitudes quedan completamente representadas dando simplemente un número. Es el caso de la temperatura de un cuerpo, la densidad, etc. Estas magnitudes, que pueden ser caracterizadas con un número, las vamos a denominar **magnitudes escalares**. Por contra, para otras magnitudes físicas no basta con dar un número para su completa caracterización. Un ejemplo de este tipo de magnitudes es la velocidad de un objeto, no solo es necesario dar la rapidez con la que se mueve ese objeto, sino que también tendremos que decir hacia dónde se mueve. Para esto necesitamos emplear lo que vamos a denominar **vectores**. Los vectores los vamos a representar por medio de segmentos orientados y tienen tres propiedades fundamentales que los definen: **módulo** (la longitud del segmento), **dirección** (la recta sobre la que se apoya el segmento) y **sentido** (la orientación del segmento), ver fig. 0.1.

En física podemos añadir una cuarta propiedad que llamaremos **punto de aplicación** y que es la posición del origen del vector. Por ejemplo, en el caso de la velocidad de una partícula, el punto de aplicación sería la posición de esa partícula. Cuando tenemos una magnitud vectorial la escribimos por medio de una letra con

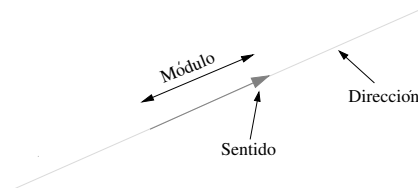


Figura 0.1 Un vector junto con sus tres propiedades fundamentales.

una flecha encima. Por ejemplo, la velocidad la escribiríamos como $\vec{v}$. Esa flecha encima de una letra nos indica que estamos ante una magnitud vectorial. En la mayoría de textos impresos se suelen representar las cantidades vectoriales por medio de la letra en negrita: $\mathbf{v}$. Nosotros nos ceñiremos a la notación con la flecha, ya que es más fácil de emplear en textos manuscritos y, además, habituará al estudiante a que, ya sea en sus apuntes o en los exámenes, refleje claramente qué magnitudes son o no son vectoriales.

0.1.1. Componentes de un vector

Para trabajar analíticamente con vectores vamos a introducir las componentes de un vector respecto de un sistema de referencia. Para ello trasladamos el vector paralelo a sí mismo (no cambiamos su dirección) hasta que el origen del vector coincida con el origen del sistema de referencia y, una vez hecho esto, las componentes del vector son las coordenadas del extremo del vector en ese sistema de referencia. Por ejemplo, si tenemos un vector $\vec{d}$ y al trasladarlo paralelo a sí mismo hasta que coincida su origen con el origen del sistema de referencia obtenemos que las coordenadas del extremo son a_x , a_y y a_z , podemos escribir ese vector como la terna:

$$\vec{d} = (a_x, a_y, a_z). \quad (0.1)$$

0.1.2. Módulo de un vector

Como ya hemos comentado, el módulo de un vector es la longitud del segmento orientado. Al ser un escalar se suele representar usando la misma letra empleada para el vector sin la flecha encima. Por ejemplo, a es como llamaríamos al módulo del vector $\vec{d}$ o bien rodeando la letra del vector con dos líneas verticales: $|\vec{d}|$. Usan-

do el teorema de Pitágoras encontramos que el módulo de un vector lo podemos expresar en función de sus componentes como:

$$|\vec{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}, \quad (0.2)$$

donde a_x , a_y y a_z son las componentes del vector $\vec{a}$. Si un vector tiene módulo unidad lo vamos a llamar **vector unitario**. En algunos textos, a los vectores unitarios se les representa colocándoles encima una acento circunflejo en lugar de una flecha, $\hat{a} \Rightarrow |\hat{a}| = 1$, para incidir en que tienen módulo unidad.

0.2. Operaciones con vectores

A continuación vamos a definir una serie de operaciones que toman como elementos de partida dos vectores o un vector y un escalar y nos devuelven otro vector o un escalar.

0.2.1. Suma

La operación suma de dos vectores $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ y $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ nos devuelve un tercer vector cuyas componentes son la suma de las componentes de cada vector:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z). \quad (0.3)$$

En algunas ocasiones tendremos que realizar la suma gráfica de vectores, por ejemplo cuando tengamos diagramas de fuerzas actuando sobre un cuerpo y queramos saber cómo es la fuerza resultante. En la figura 0.2 podemos ver un ejemplo de suma gráfica de dos vectores.

0.2.2. Producto de un vector por un escalar

Al multiplicar un vector $\vec{a}$ por un escalar λ obtenemos otro vector cuyas componentes son las componentes de $\vec{a}$ multiplicadas por el escalar:

$$\lambda \vec{a} = \lambda (a_x, a_y, a_z) = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z). \quad (0.4)$$

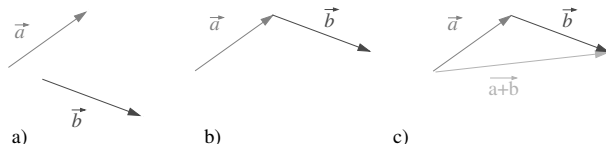


Figura 0.2 Suma gráfica de dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$. Trasladamos uno de los vectores paralelo a sí mismo hacia el extremo del otro, en este caso, trasladamos $\vec{b}$ hacía el extremo de $\vec{a}$ en b). La suma de esos dos vectores es el vector cuyo origen coincide con el origen del vector no trasladado y cuyo extremo es el extremo del vector que hemos trasladado, ver c).

Este vector tiene la misma dirección que $\vec{a}$, mismo sentido si λ es positivo y sentido contrario que $\vec{a}$ si λ es negativo. El módulo del nuevo vector es igual a $|\lambda|$ veces el módulo de $\vec{a}$. Por ejemplo, al multiplicar $\vec{a}$ por -1 obtenemos el vector $-\vec{a} = (-a_x, -a_y, -a_z)$, que es igual a $\vec{a}$ en módulo y dirección, pero de sentido contrario.

Si a cualquier vector $\vec{a}$ lo dividimos por su módulo (o lo multiplicamos por el inverso de su módulo) obtenemos un vector unitario que tiene la misma dirección y sentido que el vector original:

$$\hat{a} = \frac{1}{a}\vec{a} = \left(\frac{a_x}{a}, \frac{a_y}{a}, \frac{a_z}{a}\right). \quad (0.5)$$

Es fácil comprobar que el módulo de ese vector es igual a uno. Manipulando un poco la expresión anterior llegamos a:

$$\boxed{\vec{a} = a\hat{a}}, \quad (0.6)$$

Expresión que usaremos bastante y que nos dice que cualquier vector lo podemos expresar como su módulo multiplicado por un vector unitario con su misma dirección y sentido.

0.2.3. Diferencia de vectores

La diferencia de dos vectores es otro vector cuyas componentes son la diferencia de las componentes de cada vector.

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z). \quad (0.7)$$

Para calcular la diferencia de dos vectores gráficamente usamos la misma técnica que para la suma, solo que en este caso sumamos $\vec{a} + (-\vec{b})$, esto es, sumamos $\vec{a}$ con el vector $-\vec{b}$, que es igual que el vector $\vec{b}$, pero de sentido contrario.

0.2.4. Producto escalar

El producto escalar de dos vectores nos devuelve un escalar. Este producto lo representamos colocando un punto entre los dos vectores que multiplicamos: $\vec{a} \cdot \vec{b}$. El producto escalar de dos vectores es igual al producto del módulo de los dos vectores por el seno del ángulo θ (ver figura 0.3) que forman esos dos vectores:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \theta. \quad (0.8)$$

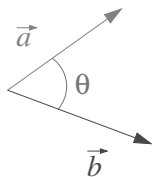


Figura 0.3 Dos vectores y el ángulo θ entre ellos.

Esta operación es conmutativa: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$. Si dos vectores son perpendiculares ($\theta = 90^\circ$ o $\theta = 270^\circ = -90^\circ$) su producto vectorial es nulo ya que el coseno de 90° y el de -90° es cero. Si dos vectores son paralelos ($\theta = 0^\circ \Rightarrow \cos 0 = 1$) el producto escalar es igual al producto de los módulos de ambos vectores. Si dos vectores son antiparalelos ($\theta = 180^\circ \Rightarrow \cos 180^\circ = -1$) el producto escalar entre ellos es igual a menos el producto de sus módulos. Por tanto, el producto escalar de un vector por el mismo es igual a su módulo al cuadrado (un vector es paralelo a sí mismo):

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = a \cdot a = a^2. \quad (0.9)$$

Usando la relación (0.9) podemos escribir el módulo de un vector como la raíz cuadrada de su producto escalar:

$$a = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}. \quad (0.10)$$

Conviene ahora introducir los vectores unitarios de la base cartesiana: $\vec{i}$, $\vec{j}$ y $\vec{k}$. No usamos el acento circunflejo, ya que son unitarios por definición y no es necesario dejar constancia de este hecho, aunque algunos autores sí lo emplean y los representan por $\hat{i}$, $\hat{j}$ y $\hat{k}$. Estos vectores tienen por componentes:

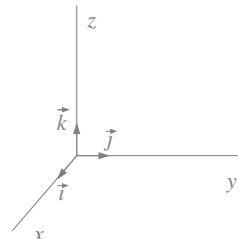


Figura 0.4 Vectores de la base cartesiana $\vec{i}$, $\vec{j}$ y $\vec{k}$

$$\vec{i} = (1, 0, 0), \quad \vec{j} = (0, 1, 0), \quad \vec{k} = (0, 0, 1). \quad (0.11)$$

Es fácil ver que estos vectores son unitarios:

$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1, \quad (0.12)$$

y que son mutuamente perpendiculares, por lo que el producto escalar entre ellos es cero:

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0. \quad (0.13)$$

En la figura 0.4 vemos representados los vectores unitarios de la base.

Como estos vectores son unitarios el producto escalar de uno de ellos por él mismo es igual a 1:

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1. \quad (0.14)$$

Estos vectores nos permiten escribir cualquier vector $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ de forma compacta como:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}, \quad (0.15)$$

que hace posible operar con ellos de manera más sencilla. Por ejemplo, podemos calcular el producto escalar entre dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ en función de sus componentes a partir de (0.15) y usando las relaciones (0.13) y (0.14):

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \cdot (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \quad (0.16)$$

Este resultado es importante, el producto escalar de dos vectores lo podemos escribir como la suma del producto de sus componentes:

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.} \quad (0.17)$$

Esto lo podríamos haber tomado como definición de producto escalar y deducir la relación (0.8) a partir de esta.

0.2.5. Producto vectorial

El producto vectorial de dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, que se escribe $\vec{a} \times \vec{b}$, es una operación que nos devuelve otro vector cuya dirección es una recta perpendicular al plano formado por los dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, cuyo módulo viene dado por:

$$\boxed{|\vec{a} \times \vec{b}| = ab \sin \theta,} \quad (0.18)$$

donde θ es el ángulo que forman los dos vectores. El sentido del vector producto vectorial lo podemos obtener usando diversas reglas mnemotécnicas. La que yo suelo emplear es la de la mano derecha. En esta regla empujamos mentalmente el primer vector del producto hacia el segundo vector por el camino más corto y el pulgar nos indica cuál es el sentido del vector $\vec{a} \times \vec{b}$.¹ De aquí es fácil comprobar que el producto vectorial es anticonmutativo, esto es, al alterar el orden de los factores cambia el signo del resultado. Dicho de otra forma, cambia el sentido del vector resultante:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}. \quad (0.19)$$

El producto vectorial de dos vectores paralelos ($\theta = 0^\circ \Rightarrow \sin 0^\circ = 0$) produce un vector nulo. De ahí que el resultado del producto vectorial de un vector cualquiera por él mismo es cero.

Vamos a calcular los productos vectoriales de los vectores de la base cartesiana $\vec{i}$, $\vec{j}$ y $\vec{k}$. En primer lugar tenemos que los productos de cada uno de esos vectores por él mismo dará un vector nulo:

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0. \quad (0.20)$$

Sería más correcto escribir $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{0}$, donde $\vec{0}$ es un vector nulo: $\vec{0} = (0, 0, 0)$. Cuando multiplicamos un vector cualquiera de la base cartesiana por otro vector distinto de la base cartesiana obtenemos un vector también unitario, ya que estos vectores son perpendiculares entre sí ($\theta = 90^\circ \Rightarrow \sin 90^\circ = 1$) y tienen módulo unidad. Además, este vector será perpendicular al plano formado por esos dos vectores. El estudiante puede comprobar el siguiente resultado usando la regla de la mano derecha y mirando la figura 0.4:

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}. \quad (0.21)$$

Si ahora hacemos el mismo cálculo, pero mirando el sistema de referencia de la figura 0.5 obtenemos un resultado diferente:

$$\vec{i} \times \vec{j} = -\vec{k}, \quad \vec{i} \times \vec{k} = \vec{j}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = -\vec{i}. \quad (0.22)$$

¹Realmente, el sentido del vector resultante de un producto vectorial es arbitrario, lo tomamos por convenio. Si en lugar de usar la mano derecha usáramos la mano izquierda para otorgar el sentido al producto vectorial no cambiaría nada. Es un ejercicio interesante comprobar que esto es así.

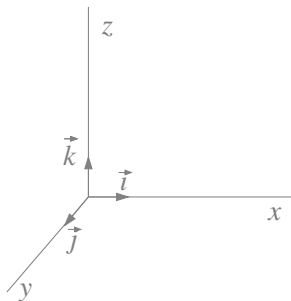


Figura 0.5 Sistema de referencia cartesiano levógiro.

Esto no quiere decir que el resultado del producto vectorial cambie con el tipo de sistema de referencia. Cuando multiplicamos vectorialmente dos vectores el resultado siempre es el mismo vector, independientemente del tipo de sistema de referencia, pero al cambiar el sistema de referencia también estamos cambiando las coordenadas de los vectores.

Podemos clasificar los sistemas de referencia en dos tipos. Unos, que vamos a llamar sistemas de referencia **dextrógiros**, en los que $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$ (Fig. 0.4) y otros, que vamos a llamar sistemas de referencia **levógiros**, en los que $\vec{i} \times \vec{j} = -\vec{k}$, ver (Fig. 0.5).

Para obtener el producto vectorial de dos vectores podríamos hacer algo como lo que hicimos para el producto escalar: realizar el producto explícito sabiendo cuánto vale el producto vectorial entre los vectores de la base:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}), \quad (0.23)$$

donde debemos recordar que el producto vectorial entre los vectores de la base cambia según que el sistema de referencia sea dextrógiro o levógiro. En la práctica es más fácil de recordar el resultado del producto vectorial usando la siguiente regla: vamos a calcular el producto vectorial de dos vectores como el determinante de una matriz 3×3 en la que la primera fila son los vectores unitarios de la base cartesiana, la segunda fila son las componentes del primer vector y la tercera fila son las componentes del segundo vector:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k}. \quad (0.24)$$

Comprobamos fácilmente que esta expresión vale para un sistema de referencia dextrógiro haciendo el producto $\vec{i} \times \vec{j}$:

$$\vec{i} \times \vec{j} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{k}. \quad (0.25)$$

Si el sistema de referencia es levógiro aún podemos usar la expresión (0.24), pero tendremos que cambiar el signo al vector resultante.

Tema avanzado: Vectores axiales o pseudovectores

En realidad el producto vectorial de dos vectores no devuelve un vector propiamente dicho, sino lo que se conoce como vector axial o pseudovector. Esto es, podemos dividir los vectores en física en dos tipos que llamaremos **vectores polares** y **vectores axiales** o **pseudovectores**. Los vectores polares son aquellos asociados a desplazamientos de una partícula y todos los vectores que podemos derivar de ellos, ya sea derivando respecto del tiempo, multiplicando por un escalar o mediante una combinación lineal de cualquiera de los anteriores. La forma más fácil de distinguir entre estos vectores es por medio de lo que ocurre con ellos tras una reflexión a través de un plano, en otras palabras, en lo que ocurre con su imagen especular. Si un vector polar lo vemos a través de un espejo tenemos que el vector reflejado es igual al original excepto que la componente normal al espejo está invertida. Cuando multiplicamos vectorialmente dos vectores polares, ¿cómo es la reflexión de este vector en el espejo? Para ver qué pasa vamos a multiplicar $\vec{a} \times \vec{b}$:

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= (\vec{a}_{\parallel} + \vec{a}_{\perp}) \times (\vec{b}_{\parallel} + \vec{b}_{\perp}) = \vec{a}_{\parallel} \times \vec{b}_{\parallel} + \vec{a}_{\parallel} \times \vec{b}_{\perp} + \vec{a}_{\perp} \times \vec{b}_{\parallel} + \vec{a}_{\perp} \times \vec{b}_{\perp} \\ &= \vec{a}_{\parallel} \times \vec{b}_{\perp} + \vec{a}_{\perp} \times \vec{b}_{\parallel} + \vec{a}_{\perp} \times \vec{b}_{\perp},\end{aligned}\tag{0.26}$$

donde hemos descompuesto cada vector en una componente perpendicular y una componente paralela al espejo. El primer término, $\vec{a}_{\parallel} \times \vec{b}_{\parallel}$, es perpendicular al espejo y los otros dos, $\vec{a}_{\parallel} \times \vec{b}_{\perp} + \vec{a}_{\perp} \times \vec{b}_{\parallel}$, serían paralelos al plano del espejo. Si ahora hacemos el producto vectorial de las reflexiones de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ en el espejo, que sabemos que tienen sus componentes normales invertidas, tenemos:

$$\begin{aligned}(\vec{a}_{\parallel} - \vec{a}_{\perp}) \times (\vec{b}_{\parallel} - \vec{b}_{\perp}) &= \vec{a}_{\parallel} \times \vec{b}_{\parallel} - \vec{a}_{\parallel} \times \vec{b}_{\perp} - \vec{a}_{\perp} \times \vec{b}_{\parallel} + \vec{a}_{\perp} \times \vec{b}_{\perp} \\ &= \vec{a}_{\parallel} \times \vec{b}_{\perp} - \vec{a}_{\parallel} \times \vec{b}_{\perp} - \vec{a}_{\perp} \times \vec{b}_{\parallel}.\end{aligned}\tag{0.27}$$

Vemos que el vector resultante tiene invertida la componente paralela al plano del espejo. Estos es, mientras que los vectores polares invierten su componente normal al plano del espejo, los vectores axiales invierten su componente paralela al plano del espejo tras una reflexión. A partir de un vector axial podemos obtener más vectores axiales por medio de derivadas temporales, productos por un escalar o por cualquier combinación lineal de vectores axiales.

En general, cuando multiplicamos vectorialmente dos vectores polares el resultado es un vector axial, mientras que si multiplicamos vectorialmente un

vector polar con un vector axial tenemos un vector polar de nuevo. Si lo que multiplicamos vectorialmente son dos vectores axiales, el resultado es otro vector axial. En física no veremos en una expresión que se estén sumando vectores axiales y vectores polares, a no ser que los hayamos transformado por medio de un producto vectorial. Cuando en una misma ecuación veamos al mismo tiempo vectores de los dos tipos podremos comprobar que uno de los dos tipos está transformado en el otro por algún método, como estar dentro de un producto vectorial, que hace que en la expresión todos los términos sean de un solo tipo, ya sea vectores axiales o vectores polares.

Los vectores de la base también los podemos dividir en dos tipos: vectores de la base polar: $\vec{i}_{\text{polar}}$, $\vec{j}_{\text{polar}}$ y $\vec{k}_{\text{polar}}$ y los vectores de la base axial: $\vec{i}_{\text{axial}}$, $\vec{j}_{\text{axial}}$ y $\vec{k}_{\text{axial}}$. Los vectores polares los escribimos en función de la base polar y los vectores axiales en función de la base axial. Cuando anteriormente hacíamos $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$ (o $-\vec{k}$, según el tipo de base), lo que estábamos haciendo es $\vec{i}_{\text{polar}} \times \vec{j}_{\text{polar}} = \vec{k}_{\text{axial}}$ (o $-\vec{k}_{\text{axial}}$). Con esto es fácil entender el porqué del cambio de signo al cambiar de sistema de levógiro a dextrógiro: estos dos sistemas de referencia son la imagen especular el uno del otro.

Los vectores axiales más importantes que veremos son la velocidad angular, ω , el momento angular, $\vec{L}$, y de fuerza, $\vec{M}$, el campo magnético, $\vec{B}$ y todos los campos asociados: intensidad magnética, $\vec{H}$, y magnetización $\vec{M}$, entre otros. A la hora de la verdad, podemos atravesar toda la física de este libro sin atender a si los vectores son axiales o polares, por lo que no haremos distinción entre ellos en general.

0.3. Campos escalares y vectoriales

En física muchas veces nos encontramos funciones que nos dicen propiedades que varían según la posición. Por ejemplo, al estudiar las propiedades térmicas de una habitación nos encontramos con una ecuación que nos dice la temperatura en cada punto en función de sus coordenadas x , y , y z . Estas funciones que nos devuelven un número, un escalar, para cada punto de una región del espacio las vamos a denominar **campos escalares**. Por otro lado, también nos podemos encontrar funciones que asocian a cada punto de una región del espacio un vector. A estas funciones las vamos a llamar **campos vectoriales**.