Salim Haddadi

Programmation linéaire

Une approche mathématique et algorithmique



ellipses

Références sciences

Programmation linéaire

Une approche mathématique et algorithmique

Salim Haddadi

ellipses

Collection Références sciences

dirigée par Paul de Laboulaye
paul.delaboulaye@editions-ellipses.fr

Retrouvez tous les livres de la collection et des extraits sur www.editions-ellipses.fr

ISBN 9782340-045569
©Ellipses Édition Marketing S.A., 2021
32, rue Bargue 75740 Paris cedex 15

DANGER LE PHOTOCOPILLAGE TUE LE LIVRE

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5.2° et 3°a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

Un programme linéaire est un problème mathématique consistant à optimiser une fonction linéaire sur un ensemble défini par un nombre fini d'équations et/ou d'inégalités linéaires. La programmation (ou optimisation) linéaire est la branche de la recherche opérationnelle qui se propose d'étudier et de résoudre les programmes linéaires. Son histoire remonte à la fin des années 1940 lorsque l'économiste soviétique L. Kantorovitch posa et résolut un problème de planification de la production. Mais ces travaux ne furent découverts par la communauté scientifique qu'aux alentours de 1960. En parallèle vers 1949, le mathématicien américain G. B. Dantzig, alors qu'il travaillait comme consultant pour l'US Air Force, découvrit une méthode qui fut appelée algorithme du simplexe. Comme c'était l'usage, l'armée américaine appelait tout ce qui était plan, planning, etc., par le terme générique « program ». Ce terme s'est par la suite accolé à l'appellation de cette science.

Assez naturelle, l'analogie de la programmation linéaire avec l'algèbre linéaire concerne au moins trois aspects :

1. L'algèbre linéaire étudie essentiellement des ensembles définis par un nombre fini d'équations linéaires de la forme $V = \{\boldsymbol{x} | A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\}$ pour certains $A, \boldsymbol{b}$ alors que la programmation linéaire considère des ensembles définis par un nombre fini d'équations et/ou d'inégalités linéaires de la forme $P = \{\boldsymbol{x} | A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\}$ pour $A, \boldsymbol{b}$ donnés.
2. On a une double description de l'ensemble V : c'est à la fois l'intersection d'un nombre fini d'hyperplans et l'enveloppe affine d'un ensemble fini de vecteurs. De manière semblable, l'ensemble P est décrit à la fois comme l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces fermés et comme l'enveloppe convexe d'un nombre fini de vecteurs plus l'enveloppe conique d'un nombre fini d'autres vecteurs.
3. Enfin, si l'algorithme d'élimination de Gauss, qui est polynomial, permet de trouver un vecteur $\boldsymbol{x} \in V$ ou de conclure que $V = \emptyset$, résoudre un programme linéaire est un problème polynomialement équivalent au suivant : trouver un vecteur $\boldsymbol{x} \in P$ ou conclure que $P = \emptyset$. Or, l'algorithme des ellipsoïdes est polynomial et résout ce dernier.

Cet ouvrage étudie les principaux concepts de la programmation linéaire des points de vue théorique et algorithmique, en mettant l'accent sur la méthode du simplexe. Son contenu s'adresse essentiellement aux étudiants du domaine Mathématiques et Informatique, mais aussi à ceux des domaines Technologie, Sciences Juridiques, Économiques et de Gestion. Il se destine aussi bien aux étudiants avancés en licence qu'à ceux en master.

Bien que la programmation linéaire soit un sujet relativement récent, assez différent de ce que l'on a l'habitude d'étudier dans le cadre des mathématiques traditionnelles, elle nécessite néanmoins la même rigueur intellectuelle. Ce livre ne nécessite, cependant, que deux simples prérequis : être habitué au raisonnement mathématique

et avoir quelques connaissances basiques d'algèbre linéaire (une annexe rappelle quelques-unes de ces notions, qui peuvent être délaissées dans un premier temps pour être consultées en cas de besoin, au fur et à mesure).

Voici comment cet ouvrage est organisé. Après avoir introduit au chapitre 1 ce qu'est un programme linéaire et quelques faits basiques y afférent, le chapitre 2 étudie la géométrie des polyèdres. Ensuite, des résultats théoriques fondamentaux sont présentés au chapitre 3, permettant la conception de l'algorithme du simplexe, présenté et analysé sous tous ses aspects (correction, finitude et complexité) au chapitre central numéro 4. En quête de plus d'efficacité, le chapitre 5 propose une méthode dite révisée, qui consiste en une version « implémentable » de l'algorithme du simplexe. Le chapitre 6 propose une théorie de la dualité et finit avec un moyen d'obtention d'un certificat d'optimalité en temps polynomial. Enfin, on montre au chapitre 7 que le problème de la programmation linéaire est « facile » en proposant un algorithme polynomial : la méthode des ellipsoïdes.

J'ai enseigné la programmation linéaire durant de nombreuses années dans divers départements en Algérie ainsi qu'à l'IUFM de Clermont-Ferrand, lorsque j'y ai été recruté en tant qu'attaché temporaire à l'enseignement et à la recherche au début des années 1990. La population estudiantine qui a fréquenté mes cours est hétérogène : des élèves ingénieurs et étudiants en divers « Magisters » lorsque l'ancien système était en vigueur, et aujourd'hui des étudiants en Licence et en Master. Le contenu de ce livre s'inspire de cette expérience, c'est-à-dire de mes notes de cours, mais aussi des nombreuses références bibliographiques citées en fin d'ouvrage. De nombreux exemples et remarques sont destinés à clarifier les concepts abordés. Des exercices de divers niveaux de difficulté sont proposés, empruntés pour la plupart aux références citées en fin d'ouvrage. Un index servira pour repérer les différents concepts dans le texte.

Le lecteur est invité à me faire parvenir ses suggestions, remarques, interrogations et corrections, par courriel à l'adresse haddadi.salim@univ-guelma.dz. Par ailleurs, je me tiens à sa disposition pour une éventuelle correction ou indication en ce qui concerne tel ou tel exercice.

Notations et conventions

Tout au long de cet ouvrage, les conventions et notations suivantes sont adoptées :

- $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des nombres entiers naturels ;
- $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des nombres entiers ;
- $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres rationnels ;
- $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels.

Tout logarithme est considéré en base 2. Le symbole $|\quad|$ désigne la valeur absolue et l'écriture $\lceil x \rceil$ désigne le plus petit entier supérieur ou égal au réel x.

Une matrice est représentée par une lettre majuscule italique maigre, par exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Il en est de même d'un ensemble, comme par exemple :

$$R = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n | A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\}$$

Un vecteur est représenté par une lettre minuscule italique grasse et un scalaire, par une lettre minuscule italique maigre. Ici, le vecteur

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

a deux composantes que sont les scalaires u_1 et u_2.

Lorsqu'elle se trouve en exposant d'une matrice ou d'un vecteur, la lettre t indique l'opération de transposition. Ainsi $A^t\boldsymbol{u}$ signifie le produit de la transposée de la matrice A par le vecteur $\boldsymbol{u}$.

Lorsque

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

l'écriture conventionnelle $\boldsymbol{u} \leq \boldsymbol{v}$ signifie simplement que $u_i \leq v_i$ pour $j = 1, \cdots, n$. De la même manière, l'écriture $\boldsymbol{u} \geq \boldsymbol{0}$ est équivalente à $u_i \geq 0$ pour $j = 1, \cdots, n$. La dimension du vecteur nul $\boldsymbol{0}$ se déduit facilement du contexte.

Table des matières

1. CONCEPTS BASIQUES 9

1.1. PROGRAMME LINÉAIRE 9
1.2. EXEMPLE DE PROGRAMME LINÉAIRE 10
1.3. FORMES D'UN PROGRAMME LINÉAIRE 13
1.4. SOLUTION RÉALISABLE ET SOLUTION OPTIMALE 17
1.5. MÉTHODE DU GRADIENT 21
1.6. MÉTHODE ALGÉBRIQUE 23
1.7. FONCTION OBJECTIF CONVEXE LINÉAIRE PAR MORCEAUX 28
1.8. EXERCICES 30

2. GÉOMÉTRIE DES PROGRAMMES LINÉAIRES 37

2.1. ENSEMBLES CONVEXES 37
2.2. ENVELOPPE CONVEXE ET ENVELOPPE CONIQUE 39
2.3. POINTS EXTRÊMES ET DIRECTIONS EXTRÊMES 42
2.4. HYPERPLAN ET DEMI-ESPACE FERMÉ 47
2.5. POLYÈDRE ET CÔNE POLYÉDRAL 48
2.6. POINTS EXTRÊMES, DIRECTIONS EXTRÊMES ET FACES D'UN POLYÈDRE 50
2.7. REPRÉSENTATION D'UN POLYÈDRE 55
2.8. EXERCICES 56

3. THÉORIE FONDAMENTALE 59

3.1. CONDITIONS D'EXISTENCE D'UN POINT DANS UN POLYÈDRE 59
3.2. HYPOTHÈSE DE PLEIN RANG DE LA MATRICE DES CONTRAINTES 60
3.3. SOLUTION DE BASE RÉALISABLE 62
3.4. THÉORÈMES FONDAMENTAUX 65
3.5. UN ALGORITHME DE FORCE BRUTE 71
3.6. EXERCICES 73

4. ALGORITHME DU SIMPLEXE 75

4.1. DESCRIPTION DE L'ALGORITHME DU SIMPLEXE 75
4.2. CORRECTION DE L'ALGORITHME DU SIMPLEXE 83
4.3. FINITUDE DE L'ALGORITHME DU SIMPLEXE 95
4.4. OBTENTION D'UNE SOLUTION DE BASE RÉALISABLE INITIALE 98
4.5. COMPLEXITÉ DE L'ALGORITHME DU SIMPLEXE 108

4.6. EXERCICES 117

5. ALGORITHME DU SIMPLEXE RÉVISÉ 125

5.1. MOTIVATION 125
5.2. ÉNONCÉ DE L'ALGORITHME RÉVISÉ 126
5.3. PREMIÈRE VERSION : PIVOTAGE DANS UN TABLEAU 126
5.4. MATRICE ÉLÉMENTAIRE ET INVERSION 131
5.5. SECONDE VERSION : FORME PRODUIT DE L'INVERSE 134
5.6. EXERCICES 138

6. DUALITÉ 141

6.1. MOTIVATION 141
6.2. DÉFINITION ET RÈGLES D'ÉCRITURE DU DUAL 142
6.3. THÉORÈME FONDAMENTAL DE LA DUALITÉ 145
6.4. ÉCARTS COMPLÉMENTAIRES 150
6.5. CERTIFICAT D'OPTIMALITÉ 151
6.6. EXERCICES 154

7. COMPLEXITÉ DE LA PROGRAMMATION LINÉAIRE 159

7.1. BISECTION RÉCURSIVE 159
7.2 PROGRAMME LINÉAIRE ET PROBLÈME DE DÉCISION ASSOCIÉ 160
7.3 SYSTÈME D'INÉGALITÉS LINÉAIRES 164
7.4 QUELQUES FAITS CONCERNANT LES ELLIPSOÏDES 165
7.5 MÉTHODE DES ELLIPSOÏDES 169
7.6 EXERCICES 174

ANNEXE. PRÉREQUIS D'ALGÈBRE LINÉAIRE 177

1. SOUS-ESPACES VECTORIELS LINÉAIRES 177
2. MATRICES ET VECTEURS 178
3. MATRICES INVERSIBLES ET INVERSION DE MATRICES 181
4. DÉTERMINANT 183
5. SOUS-ESPACES AFFINES 184
6. MATRICES DÉFINIES POSITIVES ET NORMES 186

BIBLIOGRAPHIE 189

INDEX 191

1. Concepts basiques

Ce chapitre introduit ce qu'est un programme linéaire (PL en abrégé), les différentes formes qu'il peut prendre ainsi que les concepts essentiels de solution réalisable et de solution optimale. Il présente aussi une méthode dite du gradient, valable pour des PL de toute petite taille, dont le principe provient de ce que l'on a appris en licence sur l'optimisation d'une fonction différentiable sur un ensemble fermé. Pour avoir un aperçu de la solution d'un PL, une méthode algébrique est proposée, dont le fondement est identique à celui de l'algorithme du simplexe que l'on étudiera plus tard, sauf qu'elle est moins « systématique ». On verra également comment linéariser un problème consistant à optimiser une fonction convexe et linéaire par morceaux sur un ensemble défini par des équations et/ou inégalités linéaires.

1.1. Programme linéaire

Un PL est un problème mathématique d'optimisation comportant des constantes, ou données, et des variables. Les constantes et les variables sont liées par des équations et/ou des inégalités linéaires appelées contraintes. Certaines variables sont astreintes à la non négativité alors que d'autres sont libres en signe. Une variable libre en signe peut être négative, nulle ou positive. Un PL comporte en outre une fonction objectif linéaire en les variables qu'il s'agit de maximiser ou minimiser.

Quitte à renuméroter les variables, à changer l'ordre des contraintes et le signe de tous les coefficients $c_1, \cdots, c_n$, le modèle mathématique d'un PL, dit de forme générale, se présente ainsi :

$$
\begin{array}{lccccccccc}
\max z = & c_1 x_1 & \cdots & +c_r x_r & +c_{r+1} x_{r+1} & \cdots & +c_n x_n & & \\
& a_{11} x_1 & \cdots & +a_{1r} x_r & +a_{1,r+1} x_{r+1} & \cdots & +a_{1n} x_n & \leq & b_1 \\
& \vdots & & & & & & \vdots & \\
& a_{s1} x_1 & \cdots & +a_{sr} x_r & +a_{s,r+1} x_{r+1} & \cdots & +a_{sn} x_n & \leq & b_s \\
& a_{s+1,1} x_1 & \cdots & +a_{s+1,r} x_r & +a_{s+1,r+1} x_{r+1} & \cdots & +a_{s+1,n} x_n & \geq & b_{s+1} \\
& \vdots & & & & & & \vdots & \\
& a_{t1} x_1 & \cdots & +a_{tr} x_r & +a_{t,r+1} x_{r+1} & \cdots & +a_{tn} x_n & \geq & b_t \\
& a_{t+1,1} x_1 & \cdots & +a_{t+1,r} x_r & +a_{t+1,r+1} x_{r+1} & \cdots & +a_{t+1,n} x_n & = & b_{t+1} \\
& \vdots & & & & & & \vdots & \\
& a_{m1} x_1 & \cdots & +a_{mr} x_r & +a_{m,r+1} x_{r+1} & \cdots & +a_{mn} x_n & = & b_m \\
& x_1 \geq 0 & \cdots & x_r \geq 0 & & & & &
\end{array}
$$

Il comporte n variables $x_1, \cdots, x_n$. On distingue trois parties toujours présentes :

- La première ligne consiste en la fonction $z = c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n$ qui est linéaire en les n variables et qui doit être maximisée ou minimisée. La fonction z est appelée fonction objectif car elle traduit l'objectif du problème (minimiser la longueur de chutes de papier lors d'une découpe, maximiser un profit, etc.).

- La dernière ligne indique que les variables $x_1, \cdots, x_r$ doivent être non négatives alors que, lorsqu'on ne met rien à leur propos, les variables $x_{r+1}, \cdots, x_n$ peuvent être de n'importe quel signe. On dit que les r premières variables sont astreintes à la non négativité alors que les $n - r$ autres sont libres en signe. Notons que r peut éventuellement être nul.
- Les autres lignes concernent ce qu'on appelle les m contraintes du problème. Il y a s inégalités linéaires du type $\leq$, $t - s$ inégalités linéaires du type $\geq$ et $m - t$ équations linéaires.
- Les données du problème sont les n nombres réels $c_1, \cdots, c_n$ appelés coefficients de la fonction objectif, les m réels $b_1, \cdots, b_m$ appelés coefficients à droite des contraintes et les $m \times n$ réels $a_{11}, \cdots, a_{mn}$.

Le PL pose la question suivante : compte-tenu de toutes les données, quelles valeurs donner aux variables $x_1, \cdots, x_n$ de manière à ce que les contraintes, y compris celles de signe, soient satisfaites et que la fonction objectif z soit maximum.

EXEMPLE 1.1.– Voici un exemple de PL de forme générale :

$$\begin{array}{rrrrrr} \min z = & -3x_1 & +5x_2 & -9x_3 & & \\ & & 5x_2 & -9x_3 & \leq & -2 \\ & 4x_1 & +7x_2 & +2x_3 & \geq & 10 \\ & 7x_1 & -6x_2 & & = & 2 \\ & x_1 \geq 0 & x_2 \geq 0 & & & \end{array}$$

Dans cet exemple $m = 3, n = 3, r = 2, s = 1$ et $t = 2$. Le PL de cet exemple comporte trois variables x_1, x_2, x_3 et trois contraintes dont deux inégalités et une équation. Les variables x_1, x_2 ne peuvent être négatives tandis que x_3 est libre, puisqu'il n'y a aucune restriction sur son signe, et peut donc être éventuellement négative.

REMARQUE 1.1.– Le PL est le modèle mathématique le plus souvent rencontré dans la modélisation de problèmes réels de production, d'allocation de ressources, de logistique et autres (voir par exemple les références [8,13]).

1.2. Exemple de programme linéaire

On présente un exemple de problème dont les données sont fictives où, en partant de l'énoncé, on propose un modèle mathématique qui se trouve être un PL.

Un fermier dispose d'une parcelle de 13 hectares sur laquelle il désire cultiver du blé et du maïs. Il sait par expérience que pour cultiver un hectare de blé, il doit consacrer 3 semaines de travail et 1 quintal d'engrais, et pour cultiver un hectare de maïs, il doit travailler pendant 4 semaines et utiliser 3 quintaux d'engrais. De plus, il ne peut dédier à ces tâches que 42 semaines et il dispose en tout de 24 quintaux d'engrais. En outre, il sait qu'un hectare de blé (respectivement maïs) cultivé lui procurera un

bénéfice de 10 000 € (respectivement 12 000 €). Comment doit-il s'y prendre afin de maximiser son profit ? Récapitulons les données au tableau 1.1.

	Blé	Maïs	Quantité de ressource disponible
Bénéfice (en milliers d'euros) par hectare	10	12	
Superficie totale à cultiver			13
Nombre de semaines de travail par hectare	3	4	42
Nombre de quintaux d'engrais par hectare	1	3	24

TABLEAU 1.1. Données du problème du fermier

REMARQUE 1.2.– Pour écrire un modèle mathématique, il faut commencer par définir précisément les variables de décision, car la décision portera sur les valeurs à donner à ces variables.

Déterminons les variables de décision du problème posé. De quoi va dépendre le profit du fermier ? De la façon dont il va partager ses 13 hectares (ou une partie des 13 hectares) en deux parcelles, une parcelle, de superficie inconnue, réservée à la culture du blé et une autre, de superficie également inconnue, réservée à la culture du maïs. Soit donc x_1 la superficie inconnue réservée au blé et x_2 la superficie inconnue réservée au maïs.

Le fermier n'est pas libre de donner des valeurs arbitraires à x_1 et x_2 car elles seront déterminées par les limitations, ou contraintes, imposées par les ressources qui ne sont disponibles qu'en quantités limitées.

De toute évidence, on doit avoir :

$$x_1 + x_2 \leq 13$$

car la somme des deux superficies réservées au blé et au maïs ne doit pas excéder la superficie totale disponible, soit 13 hectares.

La seconde contrainte va porter sur les semaines de travail. Si cultiver un hectare de blé nécessite 3 semaines de travail alors x_1 hectares nécessitent $3x_1$ semaines de travail. De même, si un hectare de maïs nécessite 4 semaines de travail alors x_2 hectares nécessitent $4x_2$ semaines de travail. Enfin, le temps total de travail accompli par le fermier ne doit pas excéder les 42 semaines disponibles. Ce qui se traduit par :

$$3x_1 + 4x_2 \leq 42$$

La troisième contrainte va porter, de manière analogue, sur les quantités d'engrais :

$$x_1 + 3x_2 \leq 24$$

Deux dernières contraintes naturelles sont :

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

car x_1 et x_2 sont des superficies ne pouvant être négatives. Ces contraintes ne sont pas superflues car si elles sont omises, on sera amené à accepter des valeurs négatives pour x_1 et x_2, ce qui est une aberration.

Appelons z la valeur du profit. Par abus, z est appelé fonction objectif car l'objectif du fermier est de maximiser z (on devrait écrire $z(x_1, x_2)$). Cette fonction se détermine de manière analogue :

$$z = 10x_1 + 12x_2$$

On est en mesure de réunir les éléments du modèle mathématique du problème du fermier :

$$\begin{array}{lllll} \max z = & 10x_1 & +12x_2 & & \\ & x_1 & +x_2 & \leq & 13 \\ & 3x_1 & +4x_2 & \leq & 42 \\ & x_1 & +3x_2 & \leq & 24 \\ & x_1 \geq 0 & x_2 \geq 0 & & \end{array} \qquad (1.1)$$

C'est un PL qui nous accompagnera tout au long du livre pour illustrer les concepts présentés.

REMARQUE 1.3.– Dans la modélisation qui précède, on a implicitement fait quelques hypothèses :

- Toute unité de variable ou de donnée (un quintal d'engrais, une semaine de travail, un hectare de terrain, une unité monétaire) est arbitrairement sécable. Par exemple, il est possible que la superficie x_1 vaille 1,25 hectares, auquel cas le fermier sera amené à travailler pendant $3x_1 = 3{,}75$ semaines sur le champ de blé. En revanche, un tracteur n'est pas sécable. Si le fermier avait 2 tracteurs, il n'y aurait aucun sens à affecter 0,8 tracteur au champ de blé et 1,2 au champ de maïs.
- Si le fermier consacre 3 semaines à l'hectare alors il consacre 6 semaines pour une superficie de 2 hectares. En général, il consacre $3x_1$ semaines pour une superficie de x_1 hectares.
- S'il consacre $3x_1$ semaines à cultiver du blé et $4x_2$ semaines au maïs alors il travaillera pendant $3x_1 + 4x_2$ semaines.

Les deux dernières hypothèses, proportionnalité et additivité, caractérisent une relation linéaire entre les variables et les données. Dans un PL, les variables et les données ne sont liées que par des relations linéaires et les unités de données sont sécables.

1.3. Formes d'un programme linéaire

DÉFINITION 1.1.– Le PL

$$\begin{array}{lllll} \max z = & c_1x_1 & \cdots & +c_nx_n & \\ & a_{11}x_1 & \cdots & +a_{1n}x_n & \leq \quad b_1 \\ & \vdots & & \vdots & \vdots \quad \vdots \\ & a_{m1}x_1 & \cdots & +a_{mn}x_n & \leq \quad b_m \\ & x_1 \geq 0 & \cdots & x_n \geq 0 & \end{array}$$

est dit de forme canonique. Il est caractérisé par :

- une fonction objectif à maximiser,
- toutes les contraintes sont des inégalités linéaires du type $\leq$,
- toutes les variables sont astreintes à la non négativité.

Le vecteur des variables de décision est $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ avec :

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Les données sont le vecteur $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$, le vecteur $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ et la matrice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ où :

$$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Sous forme condensée, un PL de forme canonique s'écrit :

$$\begin{array}{l} \max z = \boldsymbol{c}^t\boldsymbol{x} \\ A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

Notons que le PL du fermier (1.1) est de forme canonique.

PROPOSITION 1.1.– Tout PL peut être mis sous forme canonique.

Preuve. Donnons simplement les règles permettant de ramener un PL quelconque à un PL de forme canonique.

1. Toute variable libre x peut s'écrire comme différence de deux variables non négatives. Plus précisément :
$$x \text{ libre } \Leftrightarrow \begin{cases} x = u - v \\ u \geq 0, v \geq 0 \end{cases}$$
2. Minimiser une fonction objectif z est équivalent à maximiser $-z$. De plus, $\min z = -\max(-z)$.
3. Une inégalité du type $\geq$ se ramène à une inégalité du type $\leq$:
$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i \Leftrightarrow -a_{i1}x_1 - \cdots - a_{in}x_n \leq -b_i$$

4. Une équation se ramène à deux inégalités :

$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i \Leftrightarrow \begin{cases} a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i \\ -a_{i1}x_1 - \cdots - a_{in}x_n \leq -b_i \end{cases}$$

L'équivalence du PL initial et de celui qui est de forme canonique, obtenu par application des 4 règles décrites ci-dessus, provient des équivalences précédentes. ■

EXEMPLE 1.2.– Mettons le PL de l'exemple 1.1 sous forme canonique :

1. En posant $x_3 = x_3' - x_3''$ avec $x_3' \geq 0, x_3'' \geq 0$, le PL devient :

$$\begin{array}{lrrrrrr} \min z = & -3x_1 & +5x_2 & -9x_3' & +9x_3'' & & \\ & & 5x_2 & -9x_3' & +9x_3'' & \leq & -2 \\ & 4x_1 & +7x_2 & +2x_3' & -2x_3'' & \geq & 10 \\ & 7x_1 & -6x_2 & & & = & 2 \\ & x_1 \geq 0 & x_2 \geq 0 & x_3' \geq 0 & x_3'' \geq 0 & & \end{array}$$

2. Minimiser z revient à maximiser $w = -z$ (qui est obtenue en changeant le signe de tous les coefficients de la fonction objectif). Le PL équivalent est alors :

$$\begin{array}{lrrrrrr} \max w = & 3x_1 & -5x_2 & +9x_3' & -9x_3'' & & \\ & & 5x_2 & -9x_3' & +9x_3'' & \leq & -2 \\ & 4x_1 & +7x_2 & +2x_3' & -2x_3'' & \geq & 10 \\ & 7x_1 & -6x_2 & & & = & 2 \\ & x_1 \geq 0 & x_2 \geq 0 & x_3' \geq 0 & x_3'' \geq 0 & & \end{array}$$

3. L'inégalité :

$$4x_1 + 7x_2 + 2x_3' - 2x_3'' \geq 10$$

est équivalente à :

$$-4x_1 - 7x_2 - 2x_3' + 2x_3'' \leq -10$$

Le PL équivalent est alors :

$$\begin{array}{lrrrrrr} \max w = & 3x_1 & -5x_2 & +9x_3' & -9x_3'' & & \\ & & 5x_2 & -9x_3' & +9x_3'' & \leq & -2 \\ & -4x_1 & -7x_2 & -2x_3' & +2x_3'' & \leq & -10 \\ & 7x_1 & -6x_2 & & & = & 2 \\ & x_1 \geq 0 & x_2 \geq 0 & x_3' \geq 0 & x_3'' \geq 0 & & \end{array}$$

4. Enfin, l'équation $7x_1 - 6x_2 = 2$ se ramène aux deux inégalités :

$$\begin{cases} 7x_1 - 6x_2 \leq 2 \\ -7x_1 + 6x_2 \leq -2 \end{cases}$$

Finalement, le PL de forme canonique équivalent au PL de forme générale de l'exemple 1.1 s'écrit :

$$\begin{array}{lccccccc} \max w = & 3x_1 & -5x_2 & +9x_3' & -9x_3'' & & \\ & & 5x_2 & -9x_3' & +9x_3'' & \leq & -2 \\ & 4x_1 & +7x_2 & +2x_3' & -2x_3'' & \leq & 10 \\ & 7x_1 & -6x_2 & & & \leq & 2 \\ & -7x_1 & +6x_2 & & & \leq & -2 \\ & x_1 \geq 0 & x_2 \geq 0 & x_3' \geq 0 & x_3'' \geq 0 & & \end{array}$$

DÉFINITION 1.2.– Un PL est de forme standard s'il se présente ainsi :

$$\begin{array}{lccccc} \max z = & c_1x_1 & \cdots & +c_nx_n & & \\ & a_{11}x_1 & \cdots & +a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ & a_{m1}x_1 & \cdots & +a_{mn}x_n & = & b_m \\ & x_1 \geq 0 & \cdots & x_n \geq 0 & & \end{array}$$

Observons bien que :

- il s'agit ici de maximiser la fonction objectif,
- que toutes les contraintes sont des équations,
- que toutes les variables sont astreintes à la non négativité.

Sous forme condensée, un PL de forme standard s'écrit :

$$\begin{array}{l} \max z = \boldsymbol{c}^t\boldsymbol{x} \\ A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array} \qquad (1.2)$$

REMARQUE 1.4.– Les formes canonique et standard peuvent varier selon les auteurs.

PROPOSITION 1.2.– Tout PL peut être mis sous forme standard.

Preuve. Les règles suivantes servent à ramener un PL de forme générale à la forme standard.

1. On transforme toute variable libre comme pour la forme canonique.
2. On transforme une fonction de minimisation comme pour la forme canonique.
3. Une inégalité du type ≤ se ramène à une équation en ajoutant au membre de gauche une variable non négative, appelée variable d'écart, dont la contribution à la fonction objectif est nulle :

$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i \Leftrightarrow \begin{cases} a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n + u = b_i \\ u \geq 0 \end{cases}$$

4. Une inégalité du type ≥ se ramène à une équation en retranchant du membre de gauche une variable non négative, appelée également variable d'écart, avec une contribution nulle à la fonction objectif :

$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i \Leftrightarrow \begin{cases} a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n - v = b_i \\ v \geq 0 \end{cases}$$ ■

EXEMPLE 1.3.– Mettons le PL de l'exemple 1.1 sous forme standard :

1. Comme à l'exemple 1.2 pour la forme canonique.
2. Comme à l'exemple 1.2 pour la forme canonique.
3. L'inégalité :

$$5x_2 - 9x_3' + 9x_3'' \leq -2$$

est équivalente à :

$$5x_2 - 9x_3' + 9x_3'' + x_4 = -2 \text{ et } x_4 \geq 0$$

ce qui fait que le PL de l'exemple 1.1 est équivalent à :

$$\begin{array}{lccccccc} \max w = & 3x_1 & -5x_2 & +9x_3' & -9x_3'' & +0x_4 & & \\ & & 5x_2 & -9x_3' & +9x_3'' & +x_4 & = & -2 \\ & 4x_1 & +7x_2 & +2x_3' & -2x_3'' & & \geq & 10 \\ & 7x_1 & -6x_2 & & & & = & 2 \\ & x_1 \geq 0 & x_2 \geq 0 & x_3' \geq 0 & x_3'' \geq 0 & x_4 \geq 0 & & \end{array}$$

4. Enfin, l'inégalité :

$$4x_1 + 7x_2 + 2x_3' - 2x_3'' \geq 10$$

est équivalente à :

$$4x_1 + 7x_2 + 2x_3' - 2x_3'' - x_5 = 10 \text{ et } x_5 \geq 0$$

Finalement, le PL de forme générale proposé à l'exemple 1.1 s'écrit sous forme standard :

$$\begin{array}{lccccccc} \max w = & 3x_1 & -5x_2 & +9x_3' & -9x_3'' & +0x_4 & +0x_5 & & \\ & & 5x_2 & -9x_3' & +9x_3'' & +x_4 & & = & -2 \\ & 4x_1 & +7x_2 & +2x_3' & -2x_3'' & & -x_5 & = & 10 \\ & 7x_1 & -6x_2 & & & & & = & 2 \\ & x_1 \geq 0 & x_2 \geq 0 & x_3' \geq 0 & x_3'' \geq 0 & x_4 \geq 0 & x_5 \geq 0 & & \end{array}$$

Observons que les variables d'écart n'ont pas de contribution à la fonction objectif car ce ne sont pas des variables naturelles du PL. Elles ne servent qu'à combler l'écart entre les membres de droite et de gauche d'une inégalité. On a alors comme fonction objectif $w = 3x_1 - 5x_2 + 9x_3' - 9x_3''$.

EXEMPLE 1.4. – Après introduction de trois variables d'écart non négatives, le PL du fermier (1.1) se présente ainsi sous forme standard :

$$\begin{array}{lccccccc} \max z = & 10x_1 & +12x_2 & & & & & \\ & x_1 & +x_2 & +x_3 & & & = & 13 \\ & 3x_1 & +4x_2 & & +x_4 & & = & 42 \\ & x_1 & +3x_2 & & & +x_5 & = & 24 \\ & x_1 \geq 0 & x_2 \geq 0 & x_3 \geq 0 & x_4 \geq 0 & x_5 \geq 0 & & \end{array} \qquad (1.3)$$

1.4. Solution réalisable et solution optimale

Soit P un PL de forme standard :

$$P \begin{cases} \max z = \boldsymbol{c}^t \boldsymbol{x} \\ A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{cases}$$

DÉFINITION 1.3.– On appelle solution réalisable de P un vecteur $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ qui vérifie toutes les contraintes, c'est-à-dire que $\boldsymbol{x}$ est tel que $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$. L'ensemble $R = \{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n | A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \}$ de toutes les solutions réalisables de P est appelé domaine réalisable de P.

DÉFINITION 1.4.– Un vecteur $\boldsymbol{x}^* \in \mathbb{R}^n$ est appelé solution optimale de P si c'est une solution réalisable (c'est-à-dire $A\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{x}^* \geq \boldsymbol{0}$) et si $\boldsymbol{c}^t \boldsymbol{x}^* \geq \boldsymbol{c}^t \boldsymbol{x}$ pour toute solution réalisable $\boldsymbol{x}$. Autrement dit, une solution est optimale si c'est une solution réalisable qui, parmi toutes les solutions réalisables, donne la plus grande valeur à la fonction objectif. D'une autre façon encore, une solution est optimale si on ne peut trouver une solution réalisable donnant une plus grande valeur à la fonction objectif.

EXEMPLE 1.5.– Considérons le PL du fermier de forme standard en (1.3). Puisqu'on ne peut représenter le domaine réalisable

$$R' = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 \middle| \begin{array}{c} x_1 + x_2 + x_3 = 13, 3x_1 + 4x_2 + x_4 = 42, \\ x_1 + 3x_2 + x_5 = 24, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0 \end{array} \right\}$$

sur un plan, on va se contenter de représenter le domaine réalisable du PL de forme canonique en (1.1) (voir figure 1.1)

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \middle| \begin{array}{c} x_1 + x_2 \leq 13, 3x_1 + 4x_2 \leq 42, \\ x_1 + 3x_2 \leq 24, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array} \right\} \qquad (1.4)$$

Pour dessiner cet ensemble, on prend un repère orthonormé avec une origine O et deux axes Ox_1 et Ox_2. On commence par tracer les 5 droites d'équations respectives $x_1 + x_2 = 13, 3x_1 + 4x_2 = 42, x_1 + 3x_2 = 24, x_1 = 0, x_2 = 0$.

Le domaine réalisable R est l'intersection des cinq ensembles :

$$R_1 = \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \middle| x_1 + x_2 \leq 13\right\}, R_2 = \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \middle| 3x_1 + 4x_2 \leq 42\right\}$$

$$R_3 = \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \middle| x_1 + 3x_2 \leq 24\right\}, R_4 = \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \middle| x_1 \geq 0\right\}$$

$$R_5 = \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \middle| x_2 \geq 0\right\}$$

C'est donc la partie ombrée de la figure 1.1 qui est située sous la droite d'équation $x_1 + x_2 = 13$, sous la droite d'équation $3x_1 + 4x_2 = 42$, sous la droite d'équation $x_1 + 3x_2 = 24$, à droite de la droite d'équation $x_1 = 0$ et au-dessus de la droite d'équation $x_2 = 0$.

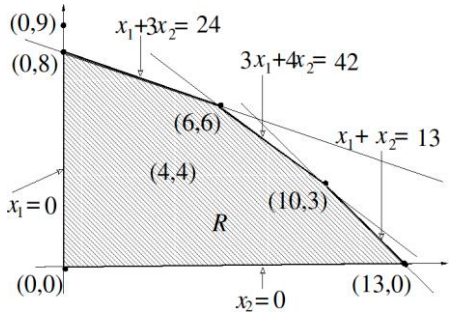


FIGURE 1.1. Domaine réalisable *R* du PL en (1.1)

On vérifie que $\boldsymbol{x}^{(0)} = (x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 13, x_4 = 42, x_5 = 24)^t$ est une solution réalisable. Elle correspond à l'origine sur la figure 1.1. Du point de vue du fermier, la solution $\boldsymbol{x}^{(0)}$ correspond à la stratégie qui consiste à ne rien faire, c'est-à-dire cultiver $x_1 = 0$ hectares de blé et $x_2 = 0$ hectares de maïs. Cette solution $\boldsymbol{x}^{(0)}$ procure au fermier un bénéfice de 0 €. Aucune ressource n'est consommée et il restera au fermier $x_3 = 13$ hectares de terre, $x_4 = 42$ semaines de travail et $x_5 = 24$ quintaux d'engrais.

On voit que $\boldsymbol{x}^{(1)} = (x_1 = 4, x_2 = 4, x_3 = 5, x_4 = 14, x_5 = 8)^t$ est une autre solution réalisable. Elle correspond au point de coordonnées $x_1 = 4, x_2 = 4$ situé à l'intérieur de R sur la figure 1.1. La solution $\boldsymbol{x}^{(1)}$ correspond à la stratégie qui consiste à cultiver $x_1 = 4$ hectares de blé et $x_2 = 4$ hectares de maïs. Cette solution $\boldsymbol{x}^{(1)}$ procure au fermier un bénéfice de 88 unités monétaires. Aucune ressource n'est complètement consommée et il restera au fermier $x_3 = 5$ hectares de terre inculte, $x_4 = 14$ semaines de travail et $x_5 = 8$ quintaux d'engrais. On peut clairement améliorer cette solution $\boldsymbol{x}^{(1)}$.