

Table des matières

Partie 1 – Analyse dans $\mathbb{R}$

1	Nombres réels	2	13	Intégrales définies	39
	1 ^{re} année			1 ^{re} année	
2	Fonctions numériques	6	14	Calcul des primitives	43
	1 ^{re} année			1 ^{re} année	
3	Limites : généralités	10	15	Formules de Taylor	47
	1 ^{re} année			1 ^{re} année	
4	Limites : comparaisons locales	13	16	Développements limités	48
	1 ^{re} année			1 ^{re} année	
5	Continuité	16	17	Approximation	52
	1 ^{re} année			1 ^{re} année	
6	Fonctions dérivables	18	18	Intégration sur un intervalle quelconque	55
	1 ^{re} année			2 ^e année	
7	Étude globale des fonctions dérivables	21	19	Généralités sur les équations différentielles	60
	1 ^{re} année			1 ^{re} année	
8	Logarithmes, exponentielles et puissances	24	20	Équations différentielles linéaires	62
	1 ^{re} année			1 ^{re} année et 2 ^e année	
9	Fonctions circulaires et réciproques	28	21	Systèmes différentiels linéaires	66
	1 ^{re} année			2 ^e année	
10	Fonctions hyperboliques et réciproques	32	22	Notions sur les équations différentielles non linéaires	68
	1 ^{re} année			1 ^{re} année et 2 ^e année	
11	Suites numériques	34	23	Séries numériques	70
	1 ^{re} année			2 ^e année	
12	Suites particulières	37			
	1 ^{re} année				

Partie 2 – Analyse dans $\mathbb{R}^n$

24	Espaces vectoriels normés	76	31	Intégrales curvilignes	98
	2 ^e année			2 ^e année	
25	Continuité	80	32	Suites de fonctions	102
	2 ^e année			2 ^e année	
26	Calcul différentiel dans $\mathbb{R}^n$	83	33	Séries de fonctions	104
	1 ^{re} année			2 ^e année	
27	Différentiabilité	86	34	Séries entières	107
	2 ^e année			2 ^e année	
28	Extremum d'une fonction à plusieurs variables	89	35	Séries de Fourier	112
	2 ^e année			2 ^e année	
29	Intégrales doubles	91	36	Fonctions définies par une intégrale	115
	1 ^{re} année			2 ^e année	
30	Intégrales triples et applications	95			
	2 ^e année				

Partie 3 – Algèbre générale

37	Logique binaire	118	42	Dénombrement	131
	1 ^{re} année			1 ^{re} année	
38	Ensembles	121	43	Groupes	134
	1 ^{re} année			1 ^{re} année	
39	Applications	123	44	Autres structures algébriques	138
	1 ^{re} année			1 ^{re} année	
40	Relations	126	45	Nombres complexes	141
	1 ^{re} année			1 ^{re} année	
41	Entiers naturels	128			
	1 ^{re} année				

46	Exponentielle complexe	144
	1 ^{re} année	
47	Nombres complexes et géométrie plane	147
	1 ^{re} année	

48	Polynômes	149
	1 ^{re} année	
49	Fractions rationnelles	153
	1 ^{re} année	

Partie 4 – Algèbre linéaire et multilinéaire

50	Structure d'espace vectoriel	158
	1 ^{re} année et 2 ^e année	
51	Dimension d'un espace vectoriel	161
	1 ^{re} année et 2 ^e année	
52	Applications linéaires	165
	1 ^{re} année et 2 ^e année	
53	Applications linéaires particulières	170
	1 ^{re} année	
54	Écritures matricielles	172
	1 ^{re} année	
55	Calcul matriciel	175
	1 ^{re} année	
56	Changements de bases	178
	1 ^{re} année	
57	Systèmes linéaires	181
	1 ^{re} année	

58	Déterminants	185
	1 ^{re} année et 2 ^e année	
59	Réduction des endomorphismes	189
	2 ^e année	
60	Polynômes annulateurs	192
	2 ^e année	
61	Espaces préhilbertiens	194
	2 ^e année	
62	Orthogonalité	199
	2 ^e année	
63	Espaces vectoriels euclidiens	203
	2 ^e année	
64	Endomorphismes orthogonaux	204
	2 ^e année	
65	Endomorphismes symétriques	208
	2 ^e année	

Partie 5 – Géométrie

66	Espaces affines	212	74	Courbes planes paramétrées	233
	1 ^{re} année			1 ^{re} année	
67	Applications affines	214	75	Courbes planes en coordonnées polaires	236
	1 ^{re} année			1 ^{re} année	
68	Barycentres	217	76	Étude métrique des courbes planes	238
	1 ^{re} année			1 ^{re} année	
69	Calcul vectoriel	219	77	Compléments sur les courbes	240
	1 ^{re} année			2 ^e année	
70	Géométrie euclidienne du plan et de l'espace	222	78	Généralités sur les surfaces	242
	1 ^{re} année			2 ^e année	
71	Isométries du plan et de l'espace	225	79	Surfaces usuelles	244
	1 ^{re} année			2 ^e année	
72	Similitudes directes du plan	228	80	Quadriques	247
	1 ^{re} année			2 ^e année	
73	Coniques	230		Index	249
	1 ^{re} année				

Partie 1

Analyse dans $\mathbb{R}$

1. Premières propriétés

1.1 Corps ordonné

On dit que l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels est

- un **corps** pour dire qu'il est muni de deux opérations $+$ et $\times$, avec toutes les propriétés dont vous avez l'habitude ;
- un **corps ordonné** pour dire que la relation d'ordre $\leq$ est compatible avec $+$ et $\times$, c'est-à-dire :

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \forall b \in \mathbb{R} \quad \forall c \in \mathbb{R} \quad a \leq b \implies a + c \leq b + c$$

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \forall b \in \mathbb{R} \quad \forall c \geq 0 \quad a \leq b \implies ac \leq bc$$

1.2 Règles de calcul

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \quad (\text{formule du binôme})$$

$$\text{où } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$x^n - y^n = (x - y) \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-k-1} y^k.$$

1.3 Valeur absolue

- La valeur absolue d'un réel a , notée $|a|$, est définie par :

$$|a| = a \quad \text{si } a \geq 0 \quad ; \quad |a| = -a \quad \text{si } a \leq 0.$$

- **Propriétés** $\forall a \in \mathbb{R} \quad \forall b \in \mathbb{R}$

$$|a| \geq 0 \quad ; \quad |a| = 0 \iff a = 0 \quad ; \quad |ab| = |a| |b|$$

$$|a + b| \leq |a| + |b| \quad ; \quad ||a| - |b|| \leq |a - b|$$

1.4 Propriété d'Archimède

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b > 0$. Alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $bk > a$.

2. Intervalles

2.1 Définitions

Pour $a \leq b$, le segment $[a, b]$ est défini par :

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \ ; \ a \leq x \leq b\}$$

On utilise souvent la propriété :

$$c \in [a, b] \iff \exists t \in [0, 1] \quad c = ta + (1 - t)b$$

On définit de même les autres types d'intervalles :

$$]a, b[, [a, b[,]a, b],]a, +\infty[, [a, +\infty[,] - \infty, b[,] - \infty, b],] - \infty, +\infty[= \mathbb{R}.$$

2.2 Propriété caractéristique

Une partie A de $\mathbb{R}$ est un intervalle si, et seulement si :

$$\forall a \in A \quad \forall b \in A \quad a < c < b \implies c \in A.$$

2.3 Voisinage d'un point

Soit $a \in \mathbb{R}$. Une partie V de $\mathbb{R}$ est un voisinage de a si elle contient un intervalle ouvert centré sur a .

2.4 Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Tout intervalle $]a, b[$ non vide contient au moins un rationnel et un irrationnel.

On dit que $\mathbb{Q}$ et son complémentaire $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

3. Ordre dans $\mathbb{R}$

3.1 Majoration, minoration

• Définitions

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On dit que a est un majorant de A si $x \leq a$ pour tout x de A .

Si, en plus, $a \in A$, alors a est le plus grand élément de A , noté $\max A$.

Si A admet un majorant, on dit que A est majorée.

On définit de même : minorant, plus petit élément, partie minorée.

• Unicité

Si une partie non vide de $\mathbb{R}$ admet un plus grand élément, ou un plus petit élément, il est unique. Mais il peut ne pas exister.



Surveillez votre vocabulaire : **un** majorant, **le** plus grand élément.

- **Cas particulier des entiers naturels**

Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

Toute partie non vide majorée de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément.

3.2 Borne supérieure, inférieure

- **Définitions**

La borne supérieure de A est le plus petit élément (s'il existe) de l'ensemble des majorants de A .

La borne inférieure de A est le plus grand élément (s'il existe) de l'ensemble des minorants de A .

- **Caractérisation**

M est la borne supérieure de A si, et seulement si, on a, à la fois :

$\forall x \in A \quad x \leq M$, c'est-à-dire que M est un majorant ;

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in A \quad M - \varepsilon < x$, c'est-à-dire que $M - \varepsilon$ n'est pas un majorant.

m est la borne inférieure de A si, et seulement si, on a, à la fois :

$\forall x \in A \quad m \leq x$, c'est-à-dire que m est un minorant ;

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in A \quad x < m + \varepsilon$, c'est-à-dire que $m + \varepsilon$ n'est pas un minorant.

- **Remarque**

Si A admet un plus grand élément, alors c'est la borne supérieure de A .

Si A admet un plus petit élément, alors c'est la borne inférieure de A .

- **Théorème d'existence**

Toute partie non vide et majorée (resp. minorée) de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure (resp. inférieure).

3.3 Droite numérique achevée

Pour ne pas avoir de restriction dans le théorème précédent, on considère un nouvel ensemble noté $\overline{\mathbb{R}}$ obtenu à partir de $\mathbb{R}$ par l'adjonction de deux éléments notés $-\infty$ et $+\infty$.

On prolonge à $\overline{\mathbb{R}}$ la relation d'ordre en posant pour tout $a \in \mathbb{R}$:

$$-\infty < a < +\infty.$$

On définit ainsi la droite numérique achevée dont le plus grand élément est $+\infty$, le plus petit élément $-\infty$.

Et le théorème précédent se généralise :

Toute partie non vide de $\overline{\mathbb{R}}$ admet une borne supérieure et une borne inférieure dans $\overline{\mathbb{R}}$.

4. Approximations décimales

4.1 Valeurs approchées

Soit $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. On dit que b est une *valeur approchée* de a à ε près si $|a - b| < \varepsilon$, c'est-à-dire si $b \in]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$.

On parle de valeur approchée *par excès* si $b > a$ et *par défaut* si $b < a$.

4.2 Partie entière

Étant donné un nombre réel x , il existe un plus grand entier relatif, noté $E(x)$ ou $[x]$, tel que $E(x) \leq x$.

On l'appelle la partie entière de x . On a donc, par définition : $E(x) \leq x < E(x) + 1$.



Attention à ne pas confondre avec la suppression de la partie décimale quand $x < 0$; par exemple $E(-4,3) = -5$.

4.3 Valeurs décimales approchées

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Il existe un entier d unique tel que

$$d \times 10^{-n} \leq x < (d + 1) \times 10^{-n}.$$

d est la partie entière de $10^n x$.

$d \times 10^{-n}$ s'appelle la **valeur décimale approchée de x à 10^{-n} près par défaut**, et $(d + 1) \times 10^{-n}$ celle **par excès**.

1. Définitions

1.1 Fonction numérique

Définir une fonction numérique f sur une partie non vide E de $\mathbb{R}$, c'est indiquer comment faire correspondre au plus un réel y à tout x de E .

Le réel y est l'image de x par f et s'écrit $f(x)$. On note :

$$\begin{array}{ccc} f : & E & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto f(x). \end{array}$$

L'ensemble des réels qui ont effectivement une image par f est l'ensemble de définition de f . Il est noté D_f , ou D s'il n'y a pas d'ambiguïté.

1.2 Représentation graphique

Le plan étant rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la représentation graphique de f est l'ensemble $\mathcal{C}_f$ des points de coordonnées $(x, f(x))$ avec $x \in D_f$.

1.3 Images et images réciproques d'ensembles

Soit $A \subset D_f$. L'image de A par f est l'ensemble :

$$f(A) = \{f(x) ; x \in A\}.$$

Soit $B \subset \mathbb{R}$. L'image réciproque de B par f est l'ensemble :

$$f^{-1}(B) = \{x \in D_f ; f(x) \in B\}.$$



Attention à ne pas confondre avec la réciproque d'une bijection. Ici, on ne suppose rien sur f .

1.4 Restriction, prolongement

Soit f une fonction définie sur I et g une fonction définie sur J . Si $I \subset J$ et si $f(x) = g(x)$ pour tout x de I , on dit que f est une restriction de g , ou que g est un prolongement de f .

2. Premières propriétés

2.1 Parité

- f est paire si

$$\forall x \in D_f \quad (-x) \in D_f \quad \text{et} \quad f(-x) = f(x).$$

Son graphe est symétrique par rapport à (Oy) .

- f est impaire si

$$\forall x \in D_f \quad (-x) \in D_f \quad \text{et} \quad f(-x) = -f(x).$$

Son graphe est symétrique par rapport à O .

2.2 Périodicité

f est périodique, de période T (ou T -périodique), si

$$\forall x \in D_f \quad (x + T) \in D_f \quad \text{et} \quad f(x + T) = f(x).$$

Son graphe est invariant par les translations de vecteurs $kT \vec{i}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

2.3 Sens de variation

- f est croissante sur I si $I \subset D_f$ et

$$\forall x_1 \in I \quad \forall x_2 \in I \quad x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2).$$

- f est décroissante sur I si $I \subset D_f$ et

$$\forall x_1 \in I \quad \forall x_2 \in I \quad x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2).$$

- f est monotone sur I si elle est croissante sur I , ou décroissante sur I .
- Avec des inégalités strictes, on définit : f strictement croissante, strictement décroissante, strictement monotone, sur D_f .

2.4 Extremum

- f admet un maximum (resp. minimum) global en x_0 si :

$$\forall x \in D_f \quad f(x) \leq f(x_0) \quad (\text{resp. } f(x) \geq f(x_0)).$$

- f admet un maximum (resp. minimum) local en $x_0 \in D_f$, s'il existe un intervalle ouvert $I \subset D_f$, tel que :

$$\forall x \in I \quad f(x) \leq f(x_0) \quad (\text{resp. } f(x) \geq f(x_0)).$$

Un maximum ou un minimum local est dit extremum local en x_0 .

Un extremum est un maximum ou un minimum.

2.5 Fonction lipschitzienne

f est une fonction lipschitzienne de rapport k , ou k -lipschitzienne, si :

$$\forall x \in D \quad \forall y \in D \quad |f(x) - f(y)| \leq k |x - y|.$$

Lorsque $k < 1$, f est dite contractante.

3. Relation d'ordre

3.1 Comparaison de fonctions

f et g étant deux fonctions, à valeurs réelles, définies sur le même ensemble de définition D , on note $f \leq g$ (resp. $f \geq g$) si :

$$\forall x \in D \quad f(x) \leq g(x) \quad (\text{resp. } f(x) \geq g(x)).$$

Si $f \geq 0$, f est dite positive.

3.2 Majorant, minorant

Si l'ensemble des images $f(D)$ est majoré, ou minoré, ou borné, on dit que f est majorée, ou minorée, ou bornée.

Si l'image $f(I)$ de I admet une borne supérieure, ou une borne inférieure, on parle de borne supérieure, de borne inférieure, de f sur I et on note :

$$\sup_{x \in I} f(x) \quad ; \quad \inf_{x \in I} f(x).$$

3.3 Propriétés

$$\inf_{x \in I} f(x) = - \sup_{x \in I} (-f(x)).$$

Si, pour tout $x \in I$, on a $f(x) \leq g(x)$, alors $\sup_{x \in I} f(x) \leq \sup_{x \in I} g(x)$.

Si $I \subset J$, on a $\sup_{x \in I} f(x) \leq \sup_{x \in J} f(x)$.

4. Opérations sur les fonctions

4.1 Valeur absolue d'une fonction

f étant définie sur D , la fonction $|f|$ est définie sur D par $x \mapsto |f(x)|$.

On définit aussi f^+ et f^- sur D par :

$$f^+(x) = \sup(f(x), 0) \quad ; \quad f^-(x) = \sup(-f(x), 0).$$

On a alors $f = f^+ - f^-$ et $|f| = f^+ + f^-$.

4.2 Opérations algébriques

Soit f et g deux fonctions numériques et λ un réel.

La fonction λf est définie sur D_f par :

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

La fonction $f + g$ est définie sur $D_f \cap D_g$ par :

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

La fonction $f g$ est définie sur $D_f \cap D_g$ par :

$$(f g)(x) = f(x) g(x).$$

La fonction $\frac{f}{g}$ est définie sur $D_f \cap D_g \setminus \{x ; g(x) = 0\}$ par :

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

4.3 Composition

On appelle composée de f par g la fonction, notée $g \circ f$, définie sur $D_f \cap f^{-1}(D_g)$ par :

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$