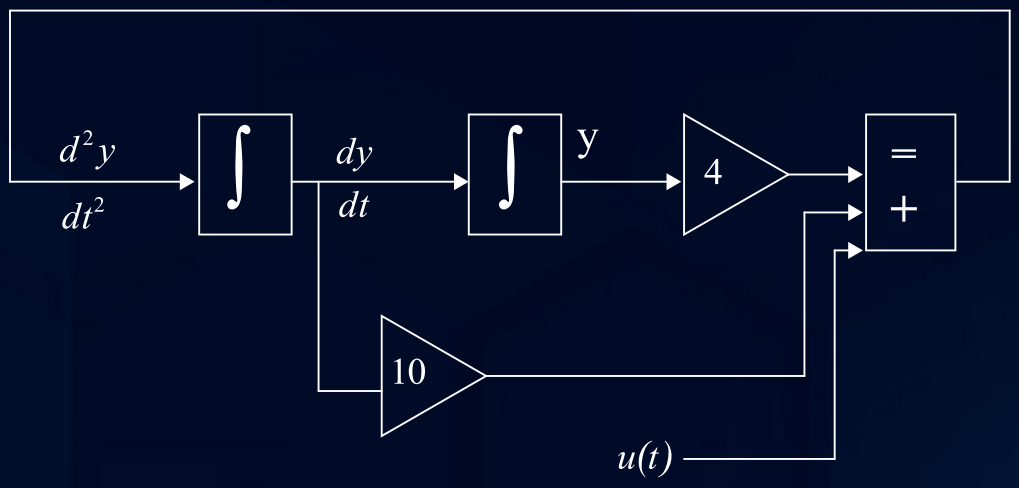
SISTEMAS, MODELOS y SEÑALES

Comprensiones desde la investigación formativa





VÍCTOR MIGUEL ÁNGEL BURBANO PANTOJA

Licenciado en Matemáticas de la Universidad de Nariño. Especialista en Computación. Especialista en Pedagogía del Aprendizaje. Magíster en Ciencias-Estadística, Universidad Nacional de Colombia. Doctor en Ciencias de la Educación, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia (UPTC). Profesor titular, par evaluador Minciencias e investigador de la Escuela de Matemáticas y Estadística de la UPTC, líder del Grupo Interdisciplinario en Ciencias (GICI).

https://orcid.org/0000-0002-3561-1886

victor.burbano@uptc.edu.co

$$\frac{d^2y}{dt^2} = u(t) - 10\frac{dy}{dt} - 4y$$

Víctor Miguel Ángel Burbano Pantoja | Margoth Adriana Valdivieso Miranda
Ángela Vereth Burbano Valdivieso

INVESTIGACIÓN
CIENCIAS NATURALES





SISTEMAS, MODELOS y SEÑALES

Comprensiones desde la investigación formativa

Víctor Miguel Ángel Burbano Pantoja
Margoth Adriana Valdivieso Miranda
Ángela Yereth Burbano Valdivieso



Uptc®
Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia
VIGILADA MINEDUCACIÓN

EDITORIAL UPTC

SISTEMAS, MODELOS y SEÑALES

Comprensiones desde la investigación formativa

Víctor Miguel Ángel Burbano Pantoja
Margoth Adriana Valdivieso Miranda
Ángela Yereth Burbano Valdivieso

Enfoque: Investigación
Área OCDE: Ciencias Naturales
Disciplina: Matemáticas Aplicadas
Colección N°. 368

Sistemas, modelos y señales. Comprensiones desde la investigación formativa
Systems, Models and Signals. Understandings from Formative Research

Primera Edición, 2026
Versión digital (PDF)

© Víctor Miguel Ángel Burbano Pantoja, 2026
© Margoth Adriana Valdivieso Miranda, 2026
© Ángela Yereth Burbano Valdivieso, 2026
© Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, 2026

ISBN (PDF) 978-628-7863-96-5

Proceso de arbitraje doble ciego
Recepción: septiembre de 2025
Aprobación: julio de 2026

Hecho en Colombia - Made in Colombia

Sistemas, modelos y señales. Comprensiones desde la investigación formativa/ Systems, Models and Signals. Understandings from Formative Research / Burbano Pantoja, Víctor Miguel Ángel; Valdivieso Miranda, Margoth Adriana; Burbano Valdivieso, Ángela Yereth. Tunja: Editorial UPTC, 2026. 190 p.

ISBN (PDF) 978-628-7863-96-5

Incluye referencias bibliográficas

1.Sistemas. 2. Modelos. 3. Señales. 4. Aplicaciones. 5. Ecuaciones diferenciales. 6. Taxonomía SOLO. 7. Investigación formativa.

(Dewey 511.8/21) (THEMA PBW Matemáticas aplicadas)

Rector UPTC
Enrique Vera López

Comité Editorial

Carlos Mauricio Moreno Téllez
Vicerrector de Investigación y Extensión

Yolanda Torres Pérez
Directora de Investigaciones

Óscar Pulido Cortés
Delegado Vicerrectoría Académica

Martín Orlando Pulido Medellín
Representante Área Ciencias Agrícolas

Yolima Bolívar Suárez
Representante Área Ciencias Médicas y de la Salud

Nelsy Rocío González Gutiérrez
Representante Área Ciencias Naturales

Olga Yanet Acuña Rodríguez
Representante Área Ciencias Sociales

Juan Guillermo Díaz Bernal
Representante Área Humanidades

Pilar Jovanna Holguín Tovar
Representante Área Artes

Edgar Nelson López López
Representante Área Ingeniería y Tecnología

Juan Sebastián González Sanabria
Representante Grupos de Investigación

Editora
Bertha Ramos Holguín

Corrección de Estilo
Claudia Amarillo Forero

Asesor de arte e imagen
Pedro Alexander Sosa Gutiérrez

Imagen de carátula
Imagén de fondo tomada de Vecteecy.com

Diseño
Victor Miguel Ángel Burbano Pantoja

Diagramación
Aura Patricia Sarmiento Hernández

Libro de investigación resultado del proyecto "Simulación con modelos aleatorios y no aleatorios" con código SGI 880

Citar este libro / Cite this book
Burbano Pantoja, V., Valdivieso Miranda, M., & Burbano Valdivieso, Á. (2026). *Sistemas, modelos y señales. Comprensiones desde la investigación formativa.* Editorial UPTC.
https://doi.org/10.19053/uptc.9786287863965

Libro financiado por la Vicerrectoría de Investigación y Extensión - Dirección de Investigaciones de la UPTC. Se permite la reproducción parcial o total, con la autorización expresa de los titulares del derecho de autor. Este libro es registrado en Depósito Legal, según lo establecido en la Ley 44 de 1993, el Decreto 460 de 16 de marzo de 1995, el Decreto 2150 de 1995 y el Decreto 358 de 2000.

Editorial UPTC
La Colina, Bloque 7, Casa 5
Avenida Central del Norte No. 39-115, Tunja, Boyacá
comite.editorial@uptc.edu.co
https://editorial.uptc.edu.co

RESUMEN

A lo largo de la historia, incesantemente el ser humano ha buscado herramientas teórico-conceptuales destinadas a la comprensión de su realidad, la cual puede representarse mediante sistemas, modelos y señales a fin de proponer soluciones a los diferentes problemas que se han suscitado en esa realidad. Entre las herramientas destinadas al modelaje de fenómenos reales están las matemáticas en general, la física, la ingeniería, la astronomía, las ciencias naturales y, en particular, las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO).

El propósito de este trabajo investigativo fue abordar el modelaje de algunos sistemas reales de tiempo continuo por medio de diferentes formas de representación; entre ellas, las EDO, la transformada laplaciana y las denominadas "ecuaciones de estado". Mediante la implementación de una secuencia didáctica se comprobó que estas herramientas analíticas permiten incrementar los niveles de comprensión del estudiantado, explorados desde la taxonomía SOLO en torno al modelamiento de algunos sistemas reales, como los eléctricos, mecánicos, térmicos e hidráulicos de parámetros concentrados.

Desde una mirada docente, se recurrió a elementos de la transposición didáctica para transformar el saber sabio sobre el modelaje de sistemas en saber para ser aprendido, de modo que, por medio de situaciones concretas, el estudiantado transite de forma progresiva del nivel uniestructural hacia niveles más altos de comprensión de los conceptos involucrados en la representación de diversos tipos de sistemas.

La metodología utilizada fue de corte mixto, la cual incluye la investigación documental, el análisis textual y el método inductivo-deductivo como parte de los métodos cuantitativos.

Este trabajo está organizado en cinco capítulos: en el primero, se presentan los elementos teórico-conceptuales y metodológicos de la investigación; en el segundo, se explicitan los aspectos conceptuales sobre sistemas, señales y modelos; en el tercero, se indican ejemplos de modelaje de sistemas mediante EDO; en el cuarto, se aborda el dominio de Laplace y las ecuaciones de estado; y en el quinto se presentan los hallazgos, conclusiones y recomendaciones de este estudio.

El principal aporte del libro es de tipo metodológico y se sustenta en elementos de investigación formativa, ya que articula algunos modelos provenientes del campo de las EDO con su aplicación en contextos de la ingeniería mediante estrategias didácticas orientadas a fortalecer su comprensión en los estudiantes. En suma, esta obra ilustra la manera en que las metodologías de investigación en educación pueden emplearse en el ámbito de la ingeniería, a través de una articulación coherente entre el conocimiento matemático disciplinar y su aplicación en contextos específicos.

Del proceso investigativo realizado se concluye que la aplicación de la secuencia didáctica ha generado porcentajes de mejora superiores al 23 % en la comprensión estudiantil sobre aspectos referidos al modelaje de sistemas reales mediante EDO y otras herramientas conceptuales.

Palabras clave: sistemas, modelos, señales, comprensión, ecuaciones diferenciales-aplicaciones, transposición didáctica, transformada de

Laplace, ecuaciones de estado, taxonomía SOLO, investigación formativa.

ABSTRACT

Throughout history, humankind has incessantly sought theoretical and conceptual tools for understanding their reality, which can be represented through systems, models, and signals, in order to propose solutions to the various problems that have arisen in that reality. The tools used to model real-life phenomena include mathematics, physics, engineering, astronomy and the natural sciences, as well as Ordinary Differential Equations (ODEs).

The purpose of this research work was to approach the modeling of some real-life continuous-time systems through different forms of representation, including ODEs, the Laplacian transform, and the so-called “equations of state”. Through the implementation of a teaching sequence, it was demonstrated that these analytical tools allow for increasing students' understanding, explored from the SOLO taxonomy regarding the modeling of some real-life systems, including lumped-parameter electrical, mechanical, thermal, and hydraulic systems.

From a teaching perspective, elements of didactic transposition were used to transform conventional wisdom about systems modeling into learned knowledge. This approach, through concrete situations, progressively moves students from the unistructural level to higher levels of understanding of the concepts involved in the representation of various types of systems.

The methodology used was a mixed approach, including documentary research, textual analysis, and the inductive-deductive method as part of the quantitative methods. This work is organized into five chapters: the first focuses on the theoretical-conceptual and methodological elements of the research; the second on conceptual aspects of systems, signals, and models; the third on examples of systems modeling using ODEs; the fourth on the Laplace domain and equations of state; and the fifth presents the findings, conclusions, and recommendations.

The book's main contribution is methodological and grounded in formative research, as it integrates models from the field of differential equations (DEs) with their application in engineering contexts through didactic strategies aimed at strengthening students' understanding. The work exemplifies how educational research methodologies can be applied to engineering, achieving a coherent connection between disciplinary mathematical knowledge and its application in specific contexts.

The research process revealed that applying the didactic sequence improved student understanding of aspect related to modelling real systems using ODE and other conceptual tools by more than 23 %.

Keywords: systems, models, signals, understanding, differential equations-applications, didactic transposition, Laplace transform, equations of state, SOLO taxonomy, formative research.

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN ……..…..……..……..……..……..…. 13

1. ELEMENTOS TEÓRICO-CONCEPTUALES Y METODOLÓGICOS 18
1.1 Bases teórico-conceptuales……..…..……..……..…… 18
1.2 Elementos de tipo metodológico…..…..……..…….. 28

2. ASPECTOS CONCEPTUALES SOBRE SISTEMAS, SEÑALES Y MODELOS 40
2.1 Conceptos sobre sistemas …..…..……..…….. 40
2.2 Los modelos y los procesos de indagación ...…….. 47
2.3 Variables en el modelaje de un sistema……... 52
2.4 Señales y sistemas dinámicos…. 64

3. EJEMPLOS DE MODELAJE DE SISTEMAS MEDIANTE EDO 73
3.1 Modelaje de sistemas lineales de primer orden…….. 73
3.2 Sistemas lineales de segundo orden ……. 87
3.3 Un sistema de segundo orden no lineal…… 96
3.4 Sistemas eléctricos…….. 100
3.5 Algunos sistemas hidráulicos y térmicos……. 109

4. EL DOMINIO DE LAPLACE COMO HERRAMIENTA DE MODELAJE 117
4.1 Transformada y dominio de Laplace…… 117
4.2 La función de transferencia…. 129
4.3 Aplicación de las EDO en circuitos R-L acoplados……. 134
4.4 Diversas respuestas en el modelaje de sistemas……... 141
4.5 Ecuaciones de estado y sus variables……... 157

5. HALLAZGOS, CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES 165
5.1 Hallazgos principales…… 165
5.2 Conclusiones con recomendaciones…. 178

REFERENCIAS 181

INTRODUCCIÓN

Desde tiempos antiquísimos, el ser humano ha tratado de encontrar explicaciones para la ocurrencia de diversos tipos de fenómenos naturales y sociales, fenómenos que paulatinamente cambiaron su manera de pensar, actuar, transformar y producir bienes que pudieran mejorar sus modos de vivir y afrontar su realidad circundante. En este sentido, a lo largo de la historia se han generado y aplicado diferentes herramientas teórico-conceptuales para identificar las posibles causas que desencadenaron la ocurrencia de fenómenos específicos como la lluvia, los rayos, el movimiento de los cuerpos y el funcionamiento de determinados sistemas, entre otros.

Tales herramientas involucran conceptos asociados con el razonamiento lógico, las matemáticas, la física, la astronomía, la química, la ingeniería, la biología, la medicina, las ciencias naturales, sociales y humanas, solo por mencionar algunas. Como parte de las matemáticas, las ecuaciones diferenciales desempeñan un papel importante para modelar diversos sistemas reales (Vidal & Estruch, 2020). En la actualidad existe un marcado interés por investigar acerca del modelaje de sistemas a través de diversas herramientas conceptuales, entre las cuales están la programación lineal (PL), las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO), la transformada de Laplace (TDL), las ecuaciones de estado (EE) y los métodos de simulación (MS).

En particular, desde los tiempos de Arquímedes, la mecánica se utilizó en el modelaje de diversos tipos de sistemas, se consolidó como una de las

ciencias físicas más antiguas con una evolución progresiva desde la exposición de los principios referidos a las palancas, el empuje y la estática, hasta la deducción de leyes como las de Newton. Estas leyes, generadas entre los siglos XVI y XVII, están basadas en campos vectoriales focalizados en la interacción de fuerzas en la mecánica clásica o la mecánica celeste de Copérnico y Galileo (Nápoles & Negrón, 2002; Rolong, 2022).

En este contexto, el vocablo ecuación-diferencial fue expuesto por Leibniz en 1676 para indicar que se trataba de una ecuación que contenía las derivadas (variaciones) de dos variables continuas; una de ellas llamada variable dependiente y la otra denominada variable independiente (Simmons & Robertson, 1998). Posteriormente, los Bernoulli aplicaron este tipo de ecuaciones para modelar diferentes fenómenos y sistemas mecánicos, hidráulicos y térmicos, asimismo, Euler sistematizó los avances logrados hasta entonces, los cuales fueron complementados posteriormente por Lagrange, Legendre, Jacobi, Poincaré, Liapunov, Cauchy, Runge-Kutta, entre otros.

Actualmente, los sistemas eléctricos y otros análogos de parámetros concentrados son susceptibles de ser modelados mediante las EDO a fin de establecer relaciones entre las variables de entrada, proceso y salida, sujetas a determinadas condiciones iniciales; además, las EDO se aplican en casi todos los campos del saber tanto a través de modelos analíticos como de simulación (Rodríguez & Quiroz, 2016; Burbano et al., 2014) y de inteligencia artificial.

Las ecuaciones diferenciales, ya sean ordinarias o en derivadas parciales, se generaron de la necesidad de modelar problemas en el ámbito de la ingeniería, la física, química, economía, biología, demografía, termodinámica y comunicaciones, entre otras ciencias. En ellas, diferentes procesos caracterizados por ser complejos eran susceptibles de descomponerse en varias fases o etapas para estudiarse desde una óptica sistémica por medio de modelos continuos que relacionaban la interacción de variables de entrada, proceso y salida, bien sea de forma analítica mediante ecuaciones, o de manera gráfica por medio de diagramas de bloque, con el propósito de medir su efecto sobre los resultados del sistema (Nagle et al., 2001; Zill, 2002).

Los modelos soportados en las EDO tienen una infinidad de aplicaciones en distintos contextos, que pueden ser investigadas. Para esto, los docentes, estudiantes, profesionales y científicos deben adquirir los elementos conceptuales requeridos para su entendimiento y uso en la explicación de relaciones causa-efecto dentro de un sistema especificado (Martínez, Fernández y Rico, 2019). Por otra parte, la comprensión de los conceptos asociados con el modelaje de los sistemas por medio de señales —las cuales corresponden a funciones que dependen del tiempo que se denotan con $x(t)$, $y(t)$, $u(t)$, entre otras (Morón, 2020)— es indispensable para entender que su variabilidad (derivada con respecto al tiempo) también ha de analizarse dentro de un sistema en estudio (Villa, 2011).

Además, cuando se indaga a los estudiantes universitarios sobre el modelamiento de sistemas mecánicos, eléctricos, hidráulicos, térmicos u

otros mediante las EDO, ellos manifiestan que las aplicaciones de las EDO son diversas y requieren del manejo fluido del cálculo diferencial, integral y de distintos métodos para solucionar una EDO específica y poderla aplicar en distintos escenarios de la vida real; lo cual no es tan sencillo (Cervantes et al., 2020). Esta percepción invita a que los estudiantes universitarios, docentes e investigadores busquen alternativas para mejorar los procesos de comprensión y análisis de sistemas presentes en escenarios reales, y adopten diferentes marcos teórico-conceptuales.

En este trabajo, los autores recurren al uso de la trasposición didáctica para generar un conjunto de situaciones alternativas de aprendizaje que incluyen el modelamiento de algunos sistemas específicos mediante las EDO, los diagramas de bloque, las funciones de transferencia y distintos tipos de señales; tales situaciones incluyen ejemplos de aplicación que posibilitan acrecentar los niveles de comprensión del lector sobre el modelaje de sistemas.

En la elaboración de este trabajo investigativo se recurrió al uso de una metodología con enfoque mixto. En la primera parte se desarrollan aspectos de la investigación cualitativa centrada en el análisis de contenido y de información textual fundamentado en técnicas de investigación documental (Ávila, 2015; Uribe, 2005). Luego, se acude a las técnicas cuantitativas para realizar un estudio de los presaberes del estudiantado con el fin de diseñar y explicitar las actividades conformadas por ejemplos específicos de aplicación sobre el modelaje de diferentes sistemas reales. Tales actividades fueron organizadas en una

secuencia didáctica, la cual fue aplicada a un grupo focal de estudiantes universitarios para finalmente valorar su efectividad.

Esta obra está estructurada en cinco capítulos, así: en el primero, se presentan los fundamentos teórico-conceptuales y metodológicos del proceso investigativo implementado; en el segundo, se explicitan aspectos conceptuales referidos a sistemas, modelos y señales; en el tercer capítulo se indican modelos basados en EDO asociados a los sistemas eléctricos, hidráulicos y térmicos, entre otros; en el cuarto, se utilizan la TDL y su inversa como herramientas de modelaje para obtener señales de salida o respuestas en sistemas determinísticos y para generar funciones de transferencia; asimismo, se incluyen las ecuaciones de estado de un sistema destinadas a modelar un sistema de tiempo continuo, y en el quinto, se exponen algunas consideraciones finales y se indican las conclusiones.

Este trabajo, cuyos autores son docentes investigadores, es parte del proyecto de investigación con SGI 880 (Simulación con modelos aleatorios y no aleatorios), desarrollado mediante convocatoria VIE de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia (UPTC), y avalado por el respectivo Comité de Ética de esta universidad. La obra alude a varios modelos deterministas (no aleatorios) basados en la aplicación de las EDO tanto homogéneas como no homogéneas en el contexto del modelaje de sistemas.

1

ELEMENTOS TEÓRICO-CONCEPTUALES Y METODOLÓGICOS DEL TRABAJO DE INVESTIGACIÓN

En este capítulo se indican los aspectos teórico-conceptuales y de carácter metodológico que constituyeron el fundamento del trabajo investigativo que se recoge en los elementos que se exponen a lo largo de esta obra, la cual incluye actividades de trasposición del saber científico referido a sistemas de tiempo continuo, modelos y señales hacia el saber para ser aprendido en el entorno universitario. En primer lugar, se abordan los elementos teórico-conceptuales relacionados con el objeto de estudio y con algunas estrategias didácticas implicadas en el modelaje de sistemas. En segundo lugar, se exponen los aspectos de tipo metodológico que posibilitaron elaborar una trayectoria para la consolidación del documento final del presente libro.

1.1 Bases teórico-conceptuales

Durante el proceso de formación profesional en diversas titulaciones y como parte de los diversos microcurrículos, las matemáticas tienen un rol trascendental en el desarrollo del pensamiento y del razonamiento lógico-matemático de los futuros profesionales, especialmente en el ciclo de formación en ciencias básicas. En este escenario, en los procesos de enseñanza y aprendizaje (E-A) de contenidos matemáticos asociados al modelaje de sistemas por medio de las EDO, se genera una interacción directa y fuerte entre el profesor, el saber disciplinar y el estudiante como