Jean **Franchini**
Jean-Claude **Jacquens**

MATHS

Cours
Exercices et travaux dirigés corrigés

PSI-PSI*

NOUVEAUX PROGRAMMES

ellipses

MATHS

Cours
Exercices et travaux dirigés corrigés

PSI-PSI*

MATHS

Cours
Exercices et travaux dirigés corrigés

PSI-PSI*

NOUVEAUX PROGRAMMES

Jean **Franchini**

Professeur honoraire agrégé de mathématiques au lycée Chaptal (Paris)
en classes préparatoires scientifiques

Jean-Claude **Jacquens**

Professeur honoraire agrégé de mathématiques au lycée Charlemagne (Paris)
en classes préparatoires scientifiques

ellipses

Retrouvez les publications des auteurs sur le site des éditions Ellipses :

ISBN 9782340-066175
© Ellipses Édition Marketing S.A., 2022
8/10 rue la Quintinie 75015 Paris

DANGER
LE
PHOTOCOPILLAGE
TUE LE LIVRE

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5.2° et 3°a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

Ce livre est un **manuel de mathématiques** écrit à l'intention des étudiants des classes préparatoires de seconde année PC* et PC. Il respecte exactement le programme en vigueur à partir de septembre 2022.

Les démonstrations « hors programme » sont omises et celles déclarées « non exigibles des étudiants » sont signalées. Ces dernières sont explicitées et pourront n'être abordées qu'en seconde lecture. Les exercices et les travaux dirigés sont l'occasion de développements et d'approfondissements. C'est aussi une ouverture sur les sciences physiques, les sciences de l'ingénieur et une préparation aux mathématiques qui seront enseignées dans les Écoles d'ingénieur.

Les notations sont celles indiquées dans le contrat (le programme) ou celles que la tradition mathématique a consacrées.

Faire des mathématiques consiste essentiellement à résoudre des problèmes, c'est le sel de la discipline et ce qui nous conduit à l'aimer. Il faut pour cela passer du temps à chercher, explorer des voies de garage et les reconnaître comme telles, ne pas compter son temps. Passer rapidement de la lecture de l'énoncé à celle de la solution est improductif.

Chercher est l'occasion de faire le point sur sa maîtrise du cours et de tester sa capacité à mobiliser les concepts et théorèmes adaptés au problème posé. Cela ne peut bien sûr être fait qu'à l'issue d'une appropriation du cours, laquelle nécessite le recours aux classiques crayon et papier, il s'agit d'être actif.

Les solutions ici rédigées doivent servir à confronter sa rédaction à une rédaction de « professionnel » et, parfois, à avoir le bonheur de trouver sa solution meilleure que celle du livre.

On ne fait pas de mathématiques seul et *ex nihilo*. Nous saluons nos prédécesseurs universitaires et professeurs de classes préparatoires scientifiques qui œuvrent depuis longtemps à l'amélioration et l'évolution de l'enseignement des mathématiques, et ont contribué de façon induite à la réalisation de cet ouvrage.

Nous remercions les éditions Ellipses pour la confiance qu'elles nous ont faite et la liberté des choix qu'elles nous ont laissé assumer.

Table des matières

1. COMPLÉMENTS D'ALGÈBRE LINÉAIRE 1

I. Produit et somme 1
A. Produit 1
B. Sommes 2
C. Décomposition en somme directe 4

II. Matrices et endomorphismes 5
A. Blocs 5
B. Polynômes d'endomorphisme 8
C. Trace 11
D. Interpolation de Lagrange 12

Exercices 14

Travaux dirigés 32
Noyaux itérés 32
Commutateurs 35
Automorphismes de $\mathcal{L}(E)$ 36
Splines cubiques 39

2. RÉDUCTION 41

I. Éléments propres 41
A. Cas d'un endomorphisme 41
B. Cas d'une matrice 43
C. Polynôme caractéristique 44

II. Réduction en dimension finie 48
A. Endomorphisme diagonalisable 48
B. Matrice diagonalisable 50
C. Utilisations de la diagonalisation 51
D. Trigonalisation 52

Exercices 54

Travaux dirigés 65
Convergence de (A^m) 65
Projecteurs spectraux 66
Problème de Dirichlet discret 68
Endomorphismes de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ conservant le rang (classes *) 71
Produit tensoriel 75

3. ESPACES VECTORIELS NORMÉS 77

I. Normes, distances et convergences 77
A. Définitions 77
B. Exemples fondamentaux 79
C. Applications lipschitziennes 81
D. Suites 82
E. Comparaison des normes 84

II. Topologie et fonctions 85
A. Point intérieur, partie ouverte 85
B. Point adhérent, partie fermée 86
C. Topologie et normes équivalentes 87
D. Limite et continuité 87

III. Cas de la dimension finie 91
A. Équivalence des normes 91
B. Suites 91
C. Applications linéaires ou multilinéaires 92

Exercices 93

Travaux dirigés 102
Intersection de boules fermées 102
Distance d'un point à une partie 103
Commutant d'une matrice 104

4. SUITES ET SÉRIES 107

I. Séries numériques 107
A. Comparaison à une intégrale 107
B. Règle de d'Alembert 108
C. Formule de Stirling 109
D. Théorème spécial des séries alternées 110
E. Produit de Cauchy 112

II. Suites et séries de fonctions 113
A. Modes de convergence 113
B. Régularité de la limite 118

III. Séries entières 122
A. Rayon de convergence 122
B. Régularité de la somme 125
C. Fonctions développables en série entière 126

Exercices **128**

Travaux dirigés **150**
Sommation de relations de comparaison 150
Convergence monotone 153
Théorème de Bernstein 154
Comportement aux bornes de l'intervalle de convergence . . . 156

5. INTÉGRATION **159**

I. Fonctions continues par morceaux **159**
A. Généralités 159
B. Intégrale sur un segment 160

II. Intégrales généralisées 161
A. Convergence, absolue convergence 161
B. Intégrabilité 163
C. Calcul effectif 165

III. Suites et séries de fonctions intégrables **166**
A. Théorème de convergence dominée 166
B. Intégration terme à terme 167
C. Utilisation des deux théorèmes dans le cas positif 168

IV. Intégrales à paramètre **168**
A. Continuité 168
B. Classe $\mathcal{C}^k$ 169
C. Exemple de la fonction Γ 170

Exercices **171**

Travaux dirigés **189**
Transformation de Laplace 189
Application de la transformation de Laplace à un système différentiel 192
Formule de Stirling 193
Calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \Big(\frac{\sin(t)}{t}\Big)^n dt$ 194
Fonction définie par une intégrale 196
Intégration des relations de comparaison 198

6. ESPACES PRÉHILBERTIENS **201**

I. Structure préhilbertienne **201**
A. Produit scalaire 201
B. Orthogonalité 203
C. Bases orthonormées d'un espace euclidien 206
D. Projection orthogonale 207
E. Formes linéaires et hyperplans 209

II. Isométries d'un espace euclidien **210**
A. Isométries et groupe orthogonal 210
B. Matrices orthogonales 211
C. Espace euclidien orienté de dimension 2 ou 3 212

D. Groupe $O(2)$ 215
E. Groupe $SO(3)$ 216

III. Endomorphismes autoadjoints 217
A. Généralités 217
B. Stabilités 218
C. Théorème spectral 218
D. Endomorphismes autoadjoints positifs 220

Exercices 220

Travaux dirigés 236
Caractérisations des espaces euclidiens 236
Matrices symétriques positives 238
Polynômes orthogonaux ; généralités 240
Polynômes de Legendre 244
Polynômes de Tchebychev de première espèce 247
Déterminant de Gram 249
Optimisation d'une forme quadratique 252
Endomorphismes antisymétriques 254

7. PROBABILITÉS 257

I. Espaces probabilisés 257
A. Ensembles dénombrables, familles sommables 257
B. Espaces probabilisés 259
C. Conditionnement et indépendance 262

II. Variables aléatoires discrètes 264
A. Variable discrète et loi 264
B. Couple de variables aléatoires 265
C. Lois discrètes usuelles 268
D. Moments d'une variable aléatoire 271
E. Fonctions génératrices 278

Exercices 280

Travaux dirigés 289
Autour des records 289
Somme de variables aléatoires 293

8. CALCUL DIFFÉRENTIEL 297

I. Équations différentielles linéaires scalaires 297
A. Vocabulaire 297
B. Théorème de Cauchy linéaire 297
C. Ensemble des solutions de l'équation homogène 298
D. Méthodes particulières 298

II. Dérivabilité des fonctions vectorielles 299
A. Généralités 300
B. Opérations 301
C. Classe $\mathcal{C}^k$ 303

III. Fonctions de plusieurs variables 305
A. Ordre 1 305
B. Ordre 2 311

Exercices 315

Travaux dirigés 327
Lemme de Gronwall ; applications 327
Wronskien et entrelacement de Sturm 329
Compacts admissibles de $\mathbb{C}$ 332
Approximation de la dérivée n-ième 334
Équations aux dérivées partielles 338
Équation de la chaleur 341

Annexe : structures et morphismes 345

Index 349

Index des notations

$\mathbb{N}$: ensemble des entiers naturels.

$\mathbb{N}^*$: ensemble des entiers naturels non nuls.

$\mathbb{Z}$: ensemble des entiers rationnels.

$\mathbb{Q}$: ensemble des nombres rationnels.

$\mathbb{K}$: l'un des ensembles $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ des nombres réels ou complexes.

max : maximum.

min : minimum.

sup : borne supérieure.

inf : borne inférieure.

ie. : c'est-à-dire.

cf. : voir.

$\mathbb{K}[X]$: algèbre des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

$\mathbb{K}_n[X]$: espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

(u_n) : suite de terme général u_n.

$\sum u_n$: série de terme général u_n.

$\mathcal{F}\big(E,F\big)$: ensemble des applications de E dans F.

$\mathcal{C}(E,F)$: ensemble des applications continues de E dans F.

$\mathcal{CM}(I,E)$: ensemble des applications continues par morceaux de $\mathcal{F}\big(I,E\big)$).

$\mathcal{B}(I,\mathbb{K})$: ensemble des applications bornées sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

$\mathcal{C}^kM(I,E)$: ensemble des applications de classe C^k par morceaux de $\mathcal{F}\big(I,E\big)$.

$\mathcal{C}^k(I,E)$: ensemble des applications de classe C^k sur I à valeurs dans E.

$\mathcal{C}^\infty(I,E)$: ensemble des applications de classe C^∞ sur I à valeurs dans E.

$\mathcal{L}^1(I,\mathbb{K})$: ensemble des fonctions de $CM(I,\mathbb{K})$ intégrables sur I.

$\mathcal{L}(E,F)$: espace vectoriel des applications linéaires de E dans F.

$\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$: espace vectoriel des matrices (n,p) à coefficients dans $\mathbb{K}$.

$\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$: algèbre des matrices carrées (n,n).

$O(E)$: groupe orthogonal de E.

$O(n)$: groupe des matrices orthogonales de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

$SO(n)$: groupe spécial orthogonal.

$\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$: ensemble des matrices diagonales de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.
$S_n(\mathbb{R})$: ensemble des matrices symétriques de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.
$\mathcal{T}_n(\mathbb{K})$: ensemble des matrices triangulaires supérieures de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.
$\mathcal{TS}_n^{++}(\mathbb{R})$: ensemble des matrices de $\mathcal{T}_n(\mathbb{R})$ à éléments diagonaux dans $\mathbb{R}_+^*$.
$\mathrm{GL}(E)$: groupe linéaire de E.
$\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$: groupe multiplicatif des matrices inversibles de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.
$\lfloor x \rfloor$: partie entière du réel x.
A^T : matrice transposée de la matrice A.
$\mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$: matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les λ_i.
$(E_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$: base canonique de $\mathbb{R}^n$.
$\delta_{i,j}$: symbole de Krönecker. $\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$ et 0 sinon.
$(M_{i,j}) = (E^{i,j})$: base canonique de $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Ker : noyau.
Im : image.
det : déterminant.
rg : rang.
tr : trace.
Sp : spectre.
$\mathrm{Vect}(A)$: sous-espace vectoriel engendré par A.
Card : cardinal.
$d(x, F)$: distance du vecteur x au sous-espace vectoriel F.
$[\![., .]\!], [\![., .[\![,]\!., .]\!],]\!., .[\![$: intervalles dans $\mathbb{Z}$.
$M_e(u)$: matrice de l'endomorphisme u dans la base e.
I_E : application identique dans E.
$f\big|_A$: restriction de l'application f à la partie A.
$\chi_A : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ la fonction indicatrice de A

Les énoncés et les définitions sont précédés d'un trait vertical et les hypothèses sont celles du programme.
Le signe □ matérialise la fin d'une démonstration.

1. Compléments d'algèbre linéaire

Ce chapitre suppose acquises plusieurs notions du cours d'algèbre linéaire de première année : espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels, dimension, applications linéaires et matrices. Seules les notions spécifiquement au programme de seconde année sont abordées en cours, exercices et travaux dirigés permettront néanmoins une révision complète du programme de première année.

$\mathbb{K}$ désigne l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E et F sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

I. Produit et somme

A. Produit

Si $E_1, \dots, E_p$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels alors on vérifie que $E_1 \times \cdots \times E_p$ muni des lois définies par $\begin{cases} (x_1, \dots, x_p) + (y_1, \dots, y_p) = (x_1 + y_1, \dots, x_p + y_p) \\ \lambda(x_1, \dots, x_p) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_p) \end{cases}$ est aussi un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
q est un élément de $\mathbb{N}^\star$, $q \geqslant 2$, $E_1, \dots, E_q$ sont des sous-espaces vectoriels de E.

Exemple
Si $(n_1, \dots, n_p) \in \mathbb{N}^p$ alors $\mathbb{K}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{K}^{n_p} = \mathbb{K}^{n_1 + \cdots + n_p}$.

Théorème

> *Si $E_1, \dots, E_p$ sont de dimension finie alors $E_1 \times \cdots \times E_p$ est aussi de dimension finie et* $\dim(E_1 \times \cdots \times E_p) = \sum_{i=1}^{p} \dim(E_i)$.

Démonstration
Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E alors $\varphi : \begin{pmatrix} \mathbb{K}^n & \to & E \\ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) & \mapsto & \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \end{pmatrix}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels dit associé à la base.
Soient $e_1, \dots, e_p$ des bases respectives de $E_1, \dots, E_p$ et $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ les isomorphismes associés.
Alors $\Phi : \begin{pmatrix} \mathbb{K}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{K}^{n_p} & \to & E_1 \times \cdots \times E_p \\ (\Lambda_1, \dots, \Lambda_p) & \mapsto & (\varphi_1(\Lambda_1), \dots, \varphi_p(\Lambda_p)) \end{pmatrix}$ est, par construction, un isomorphisme si l'on note $n_1, \dots, n_p$ les dimensions respectives de $E_1, \dots, E_p$.

Par suite $\dim(E_1 \times \cdots \times E_p) = \dim(\mathbb{K}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{K}^{n_p}) = \dim(\mathbb{K}^{n_1+\cdots+n_p})$ soit $\dim(E_1 \times \cdots \times E_p) = \sum_{i=1}^{p} \dim(E_i)$. □

B. Sommes

On note $E_1, \ldots, E_p$ des sous-espaces vectoriels du même espace vectoriel E.

1. Définitions

Définition

On note $\sum_{i=1}^{p} E_i$ *l'ensemble* $\left\{ \sum_{i=1}^{p} x_i \mid (x_1, \ldots, x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p \right\}$.

Remarques

1. L'application Ψ de $E_1 \times \cdots \times E_p$ dans E définie par $\Psi(x_1, \ldots, x_p) = \sum_{i=1}^{p} x_i$ est linéaire, son image est $\sum_{i=1}^{p} E_i$, donc un sous-espace vectoriel de E.

2. Si on note Φ l'application de $E_1 \times \cdots \times E_p$ dans $\sum_{i=1}^{p} E_i$ définie par :

$\Phi(x_1, \ldots, x_p) = \sum_{i=1}^{p} x_i$, Φ est linéaire surjective.

3. $\sum_{i=1}^{p} E_i$ est le sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}\left(\bigcup_{i=1}^{p} E_i \right)$ engendré par $\bigcup_{i=1}^{p} E_i$ car c'est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant cette partie.

Exemple

Si $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_0[X] \subset \mathbb{K}_1[X] \subset \cdots \subset \mathbb{K}_n[X]$ d'où $\sum_{i=0}^{n} \mathbb{K}_i[X] = \mathbb{K}_n[X]$.

Définition

On dit que $\sum_{i=1}^{p} E_i$ *est une somme directe, et on la note alors* $\bigoplus_{i=1}^{p} E_i$, *si l'application* $\Phi : E_1 \times \cdots \times E_p \to \sum_{i=1}^{p} E_i$, $(x_1, \ldots, x_p) \mapsto \sum_{i=1}^{p} x_i$ *est un isomorphisme de* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels.*

Théorème

Il y a équivalence entre :

(i) $\sum_{i=1}^{p} E_i$ *est directe ;*

(ii) *La seule décomposition de* 0_E *dans* $\sum_{i=1}^{p} E_i$ *est* $0_E = \sum_{i=1}^{p} 0_{E_i}$;

(iii) $\forall x \in \sum_{i=1}^{p} E_i,\ \exists!(x_1,\dots,x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p,\ x = \sum_{i=1}^{p} x_i$;

(iv) $\forall k \in [\![1,p[\![,\ \left(\sum_{i=1}^{k} E_i\right) \cap E_{k+1} = \{0_E\}$.

Démonstration

• Comme Φ est linéaire surjective et comme la condition (ii) exprime son injectivité on a immédiatement l'équivalence entre (i) et (ii).

• De même (iii) signifie que Φ est bijective, d'où (i) $\iff$ (iii).

• Supposons (i), choisissons k dans $[\![1,p[\![$ puis x dans $\left(\sum_{i=1}^{k} E_i\right) \cap E_{k+1}$, écrivons $x = \sum_{i=1}^{k} x_i$ où $(x_1,\dots,x_k) \in E_1 \times \cdots \times E_k$.
On a $x = \Phi(x_1,\dots,x_k,0_{E_{k+1}},\dots,0_{E_p}) = \Phi(0_{E_1},\dots,0_{E_k},x,0_{E_{k+2}},\dots,0_{E_p})$, d'où $x = 0_{E_{k+1}} = 0_E$ par injectivité de Φ.

• Supposons (iv) et $(x_1,\dots,x_p)$ dans $\mathrm{Ker}(\Phi) \setminus \{0_E\}$.
Avec $k' = \max\{i \in [\![1,p]\!] \mid x_i \neq 0_E\}$ on a $k' > 1$ et, en posant $k = k' - 1$, $k \in [\![1,p[\![$ et aussi $x_{k+1} = \sum_{i=1}^{k}(-x_i) \in \left(\sum_{i=1}^{k} E_i\right) \cap E_{k+1} = \{0_E\}$: absurde. Donc Φ est injective et (iv) $\Rightarrow$ (i). □

2. Supplémentaires

Définition

Deux sous-espaces vectoriels de V et W de E sont dits supplémentaires si $E = V \oplus W$.

Remarque

V et W sont supplémentaires si, et seulement si, tout x de E s'écrit de façon unique $x = v + w$ où $(v,w) \in V \times W$ ou encore si, et seulement si, l'application $\Phi : V \times W \to E,\ (v,w) \mapsto v + w$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, c'est-à-dire si, et seulement si, $V \cap W = \{0_E\}$.

Exemple

Soit P élément de $\mathbb{K}[X]$ de degré $n+1$ où $n \in \mathbb{N}$ et (P) l'ensemble de ses multiples, $(P) = \{AP \mid A \in \mathbb{K}[X]\}$, alors $\mathbb{K}_n[X]$ et (P) sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{K}[X]$.
En effet, ce sont facilement deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}[X]$ et le théorème de division euclidienne montre que tout élément A de $\mathbb{K}[X]$ s'écrit de façon unique $A = S + R$ où $S \in (P)$ et $R \in \mathbb{K}_n[X]$.

3. Cas de la dimension finie

Théorème

Si E est de dimension finie alors $\dim\left(\sum_{i=1}^{p} E_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \dim(E_i)$ *et il y a égalité si, et seulement si,* $\sum_{i=1}^{p} E_i$ *est directe.*

Démonstration

Comme $\Phi : E_1 \times \ldots \times E_p \to \sum_{i=1}^{p} E_i,\ (x_1, \ldots, x_q) \mapsto \sum_{i=1}^{q} x_i$ est linéaire surjective on a l'inégalité. La somme est directe si, et seulement si, Φ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels *ie.* si, et seulement si, $E_1 \times \ldots \times E_q$ et $\sum_{i=1}^{q} E_i$ sont de même dimension, d'où le résultat. □

Dans le cas $q = 2$ on obtient immédiatement le

Corollaire

> *En dimension finie n, si V est un sous-espace vectoriel de dimension p alors tout supplémentaire est de dimension $n - p$.*
> *Si W est un sous-espace vectoriel de dimension $n-p$ alors il est supplémentaire de V si, et seulement si, $V \cap W = \{0_E\}$.*

C. Décomposition en somme directe

Ici E est de dimension $n \geqslant 1$.

Théorème et définitions

> *Si $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$ et si, pour tout i de $[\![1, p]\!]$, e_i désigne une **base** de E_i, alors la famille e obtenue en réunissant les e_i est une base de E, elle est dite **adaptée** à la décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$.*
> *Si F est un sous-espace vectoriel de E, une base est dite adaptée à F si ses premiers éléments constituent une base de F.*

Démonstration

e étant de cardinal $n = \sum_{i=1}^{p} \dim(E_i)$, il suffit de montrer qu'elle est génératrice de E. Si $x \in E,\ x = \sum_{i=1}^{p} x_i$ où $(x_1, \ldots, x_p) \in E_1 \times \ldots \times E_p$, on a, pour tout $i \in [\![1, p]\!],\ x_i \in E_i = \mathrm{Vect}(e_i)$ et donc, par sommation, $x \in \mathrm{Vect}(e)$, ce qui termine la preuve. □

Exemple

Avec ces notations, si $\forall i \in [\![1, p]\!],\ \dim(E_i) = n_i$ la matrice notée P_i relativement à e du projecteur p_i sur E_i de direction $\bigoplus_{j \neq i} E_j$ est diagonale par blocs égale à $\mathrm{Diag}(0_{n_1}, \ldots, 0_{n_{i-1}}, I_{n_i}, 0_{n_{i+1}}, \ldots, 0_{n_p})$ et on a les égalités équivalentes :

$$\sum_{i=1}^{p} p_i = I_E \text{ et } \sum_{i=1}^{p} P_i = I_n.$$

De même si $(e_1, \ldots, e_p)$ est une partition de la base e de E il vient la

Propriété

> *Si, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$ on pose $E_i = \mathrm{Vect}(e_i)$ alors $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$ et e est adaptée à cette décomposition.*

II. Matrices et endomorphismes

A. Blocs

1. Généralités

Un calcul fastidieux mais sans mystère montre le

Théorème

Si $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $M' = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{p,q}\mathbb{K})$ *où* $A \in \mathfrak{M}_{r,s}(\mathbb{K})$ *et* $A' \in \mathfrak{M}_{s,t}(\mathbb{K})$ *alors* $MM' = \begin{pmatrix} AA' + BC' & AB' + BD' \\ CA' + DC' & CB' + DD' \end{pmatrix}$.

Remarque

Dès que $n = p$ on impose $r = s$ afin que les blocs diagonaux soient des blocs carrés.

Corollaire

Le produit, lorsqu'il existe, de deux matrices carrées triangulaires supérieures (resp. inférieures) est une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure).

Démonstration

Par transposition il suffit de traiter le cas des matrices triangulaires supérieures. On raisonne par récurrence sur le nombre n de lignes et de colonnes, le cas $n = 1$ étant immédiat.
Si le résultat est prouvé pour des éléments de $\mathcal{T}_n(\mathbb{K})$ et si $(A, B) \in \left(\mathcal{T}_{n+1}(\mathbb{K})\right)^2$, on écrit $A = \begin{pmatrix} \alpha & U \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \beta & V \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}$ où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ et $(A_1, B_1) \in \left(\mathcal{T}_n(\mathbb{K})\right)^2$, alors $AB = \begin{pmatrix} \alpha\beta & \alpha V + UB_1 \\ 0 & A_1B_1 \end{pmatrix} \in \mathcal{T}_{n+1}(\mathbb{K})$ par hypothèse de récurrence. □

Dans le même genre d'idée on va montrer le

Théorème

Si $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ *alors* M *est inversible si, et seulement si,* A et D *le sont. Si c'est le cas alors* $M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix}$.

Démonstration

Posons $M' = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$, alors on a $MM' = \begin{pmatrix} AA' + BC' & AB' + BD' \\ DC' & DD' \end{pmatrix}$ et donc $MM' = I_n$ a lieu si, et seulement si, $\begin{cases} DD' = I_{n-r} \\ DC' = 0 \\ AA' + BC' = I_r \\ AB' + BD' = 0 \end{cases}$
Ce système se résout facilement en D inversible et $D' = D^{-1},\ C' = 0,\ A$ inversible et $A' = A^{-1}$ et enfin $B' = -A^{-1}BD^{-1}$, ce qui établit le théorème. □

2. Stabilité

F désigne un sous-espace vectoriel de E et u un endomorphisme de E.

2.1. Définition

1. *F est dit stable par u si $u(F) \subset F$ ie. si, pour tout x dans F, $u(x) \in F$.*

2. *Dans ce cas on appelle* ***endomorphisme induit*** *par u sur F l'endomorphisme de F qui à tout x associe $u(x)$.*

Remarques

1. Ne pas confondre l'endomorphisme induit qui est élément de $\mathcal{L}(F)$ et la restriction $u\big|_F$ qui est élément de $\mathcal{L}(F, E)$.

2. F est stable par u si, et seulement si, pour toute projection p sur F on a $p \circ u\big|_F = u\big|_F$ ou encore $p \circ u \circ p = u \circ p$.

3. Si $\widetilde{u}$ est l'endomorphisme induit par u sur F alors $\mathrm{Ker}(\widetilde{u}) = \mathrm{Ker}(u) \cap F$ et $\mathrm{Im}(\widetilde{u}) = u(F)$.

Exemple

Soient $E = \mathbb{K}[X]$ et $\Delta : P(X) \mapsto P(X+1) - P(X)$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, Δ induit un endomorphisme Δ_n de $\mathbb{K}_{n+1}[X]$.
Si $P \in \mathrm{Ker}(\Delta)$ alors $x \mapsto P(x) - P(0)$ est 1-périodique, nulle en 0 donc sur $\mathbb{Z}$ infini d'où $P(X) = P(0)$. Comme réciproquement $\mathbb{K}_0[X] \subset \mathrm{Ker}(\Delta)$ cela montre que $\mathbb{K}_0[X] = \mathrm{Ker}(\Delta) = \mathrm{Ker}(\Delta_n)$ lequel est donc de dimension 1.
De plus $\mathrm{Im}(\Delta_n) \subset \mathbb{K}_n[X]$ et le théorème de rang montre que ces deux espaces vectoriels ont même dimension, d'où $\mathrm{Im}(\Delta_n) = \mathbb{K}_n[X]$.

Propriété

Si v est un endomorphisme de E qui commute avec u alors $\mathrm{Ker}(v)$ est stable par u.

Démonstration

Si $z \in \mathrm{Ker}(v)$, $v\big[u(z)\big] = u\big[v(z)\big] = 0$ donc $u(z) \in \mathrm{Ker}(v)$. □

2.2. Utilisation des blocs

On suppose E de dimension finie.

Théorème

F est stable par u si, et seulement si, relativement à une base adaptée à F, la matrice de u est triangulaire supérieure par blocs.

Démonstration

Soit $e = (e_1, \ldots, e_n)$ base adaptée à F avec $b = (e_1, \ldots, e_p)$ base de F.
F est stable par u si, et seulement si, pour tout i de $[\![1, p]\!]$, $u(e_i) \in F$ ou encore $u(e_i) \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$, ce qui revient à dire que la matrice de u relativement à e est triangulaire supérieure par blocs, $\begin{pmatrix} A & B \\ 0_{n-p,p} & C \end{pmatrix}$. □

Remarque

Si c'est vrai pour une base adaptée alors c'est vrai pour toute base adaptée.

On suppose alors $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$ et, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, on pose $\dim(E_i) = n_i \in \mathbb{N}^\star$.

On démontre de la même façon le théorème suivant :

Théorème

Chacun des E_i est stable par u si, et seulement si, il existe une base adaptée à la décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$ relativement à laquelle la matrice M de u est diagonale par blocs, $M = \mathrm{Diag}(M_1, \ldots, M_p)$ où : $\forall i \in [\![1, p]\!],\ M_i \in \mathfrak{M}_{n_i}(\mathbb{K})$.

Remarques

1. On peut, dans cet énoncé, remplacer « il existe une base adaptée » par « pour toute base adaptée ».

2. Dans le cas où chacun des E_i est une droite dirigée par e_i on obtient :
$M_{\mathcal{E}}(u)$ est diagonale si, et seulement si, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la droite E_i est stable par u *ie.* u induit une homothétie sur chaque E_i.

3. Déterminants de triangulaires par blocs

Théorème

Soit $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ où $A \in \mathfrak{M}_p(\mathbb{K}), B \in \mathfrak{M}_q(\mathbb{K})$, $C \in \mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{K}), p + q = n$. Alors $\det(M) = \det(A) \times \det(B)$.

Démonstration

Comme $M = A'C'B'$ où $A' = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix}$, $C' = \begin{pmatrix} I_p & C \\ 0 & I_q \end{pmatrix}$, $B' = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ par multiplication par blocs, on a : $\det(M) = \det(A') \times \det(C') \times \det(B')$.

Comme $\det(C') = 1$ car C' est triangulaire supérieure il suffit de montrer que $\det(A') = \det(A)$ et $\det(B') = \det(B)$ pour pouvoir conclure.

On développe $\det(A')$ selon sa dernière colonne : $\det(A') = \det \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_{q-1} \end{pmatrix}$, en itérant on a $\det(A') = \det(A)$.
En développant $\det(B')$ p fois selon sa première colonne on a $\det(B') = \det(B)$. □

Remarques

1. Cela vaut aussi, par transposition, pour une matrice triangulaire inférieure par blocs.

2. Pour calculer le déterminant d'une matrice, on pourra se ramener au cas d'application de ce théorème en « faisant apparaître des zéros » à l'aide d'opérations élémentaires.

Une récurrence immédiate permet d'établir le

Corollaire 1

Si A est diagonale par blocs, $A = \mathrm{Diag}(A_1, \ldots, A_p)$, alors :
$$\det(A) = \det(A_1) \times \cdots \times \det(A_p).$$

Corollaire 2 - pivot par blocs

Si $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ où $A \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ et $D \in \mathfrak{M}_{n-p}(\mathbb{K})$ alors $\det(M) = \det(A) \times \det(D - CA^{-1}B)$.

Démonstration
Par blocs $M \times \begin{pmatrix} I_p & -A^{-1}B \\ 0 & I_{n-p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$ d'où le résultat en passant au déterminant et en appliquant le théorème à chacune des deux matrices triangulaire par blocs. □

B. Polynômes d'endomorphisme

1. Définitions

u désigne un endomorphisme de E.

Définition

Si $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$, on note $P(u)$ l'endomorphisme $\sum_{k=0}^{p} a_k u^k$ où, en utilisant la structure de $\mathbb{K}$-algèbre de $\mathcal{L}(E)$, u^k désigne l'itéré k-ième de u, en particulier $u^0 = I_E$.
De même si $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ on note $P(M)$ la matrice $\sum_{k=0}^{p} a_k M^k$ où $M^0 = I_n$.

Exemples
Pour $P = X^0,\ X,\ X^2$, on obtient successivement $P(u) = I_E,\ u,\ u^2$.

Théorème

L'application de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathcal{L}(E)$ qui à tout P associe $P(u)$ est un morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres.

Démonstration

- La définition de $P(u)$ montre immédiatement la linéarité de $P \mapsto P(u)$.
- On a déjà vu que l'image de l'unité X^0 de $\mathbb{K}[X]$ est l'unité I_E de $\mathcal{L}(E)$.
- Si P et Q sont dans $\mathbb{K}[X]$, $P = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^K$ et $Q = \sum_{k=0}^{\infty} b_k X^k$ avec les a_k et les b_k nuls à partir d'un certain rang, on a $PQ = \sum_{k=0}^{\infty} c_k X^k$ où, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $c_k = \sum_{p+q=k} a_p b_q$.

Alors $(PQ)(u) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k u^k$ et $\big[P(u)\big] \circ \big[Q(u)\big] = \Big(\sum_{p=0}^{\infty} a_p u^p\Big) \circ \Big(\sum_{q=0}^{\infty} b_q u^q\Big)$ d'où

$\big[P(u)\big] \circ \big[Q(u)\big] = \sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} a_p b_q u^{p+q} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k u^k = (PQ)(u)$. □

Remarque
Si $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ on définit de même $P(A)$ et alors $P \mapsto P(A)$ est un morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres entre $\mathbb{K}[X]$ et $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

Corollaire 1

Si P et Q sont deux polynômes alors $P(u)$ et $Q(u)$ commutent.

Démonstration

$\mathbb{K}[X]$ étant commutative, $\big[P(u)\big]\circ\big[Q(u)\big]=(PQ)(u)=(QP)(u)=\big[Q(u)\big]\circ\big[P(u)\big]$. □

Corollaire 2

Si P est un polynôme alors $\operatorname{Ker}\big[P(u)\big]$ *est stable par u.*

Démonstration

En posant $v=P(u)$ on a $v\in\mathcal{L}(E)$ et $u\circ v=v\circ u$ d'où le résultat car $\operatorname{Ker}(v)$ est stable par u. □

2. Cas d'une matrice triangulaire supérieure par blocs

Théorème

Si M est triangulaire supérieure par blocs, $M=\begin{pmatrix}A & \star\\ 0 & B\end{pmatrix}$, alors, pour tout polynôme P on a $P(M)=\begin{pmatrix}P(A) & \star\\ 0 & P(B)\end{pmatrix}$.

Démonstration

Par linéarité de $P\mapsto P(M)-\begin{pmatrix}P(A) & \star\\ 0 & P(B)\end{pmatrix}$, il suffit de le montrer quand $P=X^k$ où k décrit $\mathbb{N}$. On l'obtient alors très facilement par récurrence à l'aide des produits par blocs et les résultats classiques sur les produits de matrices triangulaires supérieures. □

On en déduit par récurrence le

Corollaire

Si M est diagonale par blocs, $M=\operatorname{Diag}(M_1,\dots,M_k)$, alors pour tout $P\in\mathbb{K}[X]$, on a $P(M)=\operatorname{Diag}\big(P(M_1),\dots,P(M_k)\big)$.

3. Polynômes annulateurs

3.1. Définitions

Théorème et définitions

1. *Le noyau du morphisme $P\mapsto P(u)$ est appelé ensemble des* ***polynômes annulateurs de*** *u, son image, notée $\mathbb{K}[u]$, est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ appelée* ***algèbre des polynômes en*** *u.*

2. *Si E est de dimension finie il existe un polynôme annulateur non nul.*

Démonstration

1. L'image d'un morphisme d'algèbres est une sous-algèbre de l'algèbre d'arrivée.

2. Comme $\mathbb{K}[X]$ est de dimension infinie contrairement à $\mathcal{L}(E)$, le morphisme ne peut pas être injectif. □

Remarques

1. Ces définitions et propriétés s'étendent sans peine aux matrices.

2. $X-\lambda$ est annulateur de u si, et seulement si, $u=\lambda I_E$.

3. X^2-X (resp. X^2-1) est annulateur de u si, et seulement si, u est un projecteur (resp. une symétrie).

3.2. Calcul des puissances

On suppose connu P polynôme annulateur non nul de $M\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Si $k\in\mathbb{N}$, la division euclidienne de X^k par P s'écrit $X^k=PQ_k+R_k$ où $\deg(R_k)<\deg(P)$.
Alors $M^k=P(M)Q_k(M)+R_k(M)=R_k(M)$.
Cette méthode n'a d'intérêt que si P est de degré *raisonnable* et si $k\geqslant\deg(P)$.

Exemple
Si $M=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$ on a $M^2=\begin{pmatrix}6&5&5\\5&6&5\\5&5&6\end{pmatrix}=5M-4I_3$.
$P=X^2-5X+4$ est un bon candidat et $P=(X-1)(X-4)$.
$X^k=PQ_k+\alpha_k(X-1)+\beta_k(X-4)$ si $k\in\mathbb{N}$ car $\big((X-1),(X-4)\big)$ est une base de $\mathbb{K}_1[X]$. En substituant 1 et 4 à X on obtient immédiatement $1=-3\beta_k$ et $4^k=3\alpha_k$ d'où $M^k=\alpha_k(M-I_3)+\beta_k(M-4I_3)=\dfrac{1}{3}\big[4^k(A-I_3)-(A-4I_3)\big]$ *ie.*
$M^k=\begin{pmatrix}a_k&b_k&b_k\\b_k&a_k&b_k\\b_k&b_k&a_k\end{pmatrix}$ où $a_k=\dfrac{4^k+2}{3}$ et $b_k=\dfrac{4^k-1}{3}$.

Plus généralement si $A\in\mathbb{R}[X]$ a division euclidienne de A par P fournit l'égalité $(\star)\quad A=PQ+a(X-1)+b(X-4)$ car $\big((X-1),(X-4)\big)$ est une base de $\mathbb{R}_1[X]$.
En remplaçant X par 4 puis par 1 dan $(\star)$ on obtient $3a=A(4)$ et $3b=-A(1)$.
En remplaçant alors X par M on obtient $A(M)=\dfrac{A(4)[M-I_3]+A(1)[4I_3-M]}{3}$.

3.3. Calcul d'inverse

Théorème

Soit $M\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.
1. *Si $M\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ alors $M^{-1}\in\mathbb{K}[M]$.*
2. $M\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})\iff\exists P\in\mathbb{K}[X],\ P(0)\neq0$ et $P(M)=0_n$.

Démonstration
1. L'application $\begin{pmatrix}\mathbb{K}[M]&\to&\mathbb{K}[M]\\N&\mapsto&MN\end{pmatrix}$ est un endomorphisme injectif de $\mathbb{K}[M]$ car M est inversible et $\mathbb{K}[M]$ est de dimension finie. Il est donc bijectif et, en notant N_0 l'antécédent de I_n, on a $MN_0=I_n$ soit $N_0=M^{-1}\in\mathbb{K}[M]$.
2. Si $M\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ soit $A\in\mathbb{K}[X]$ tel que $M^{-1}=A(M)$. On a $MA(M)=I_n$ et donc $P(X)=1-XA(X)$ convient.
Réciproquement si $P(X)=a_pX^p+\cdots+a_0$, $P(M)=0_n$ et $a_0\neq0$ alors, en factorisant, on a $M\times\dfrac{a_pM^{p-1}+\cdots+a_1M^0}{-a_0}=I_n$, ce qui montre que M est inversible et donne une expression de son inverse comme polynôme en M. □

Exemple
On reprend l'exemple précédent, $P(M)=0$ s'écrit aussi
$M\times\left[\dfrac{1}{4}(M-5I_3)\right]=I_3$ et montre que M est une matrice inversible avec $M^{-1}=\dfrac{1}{4}(M-5I_3)$.

C. Trace

Définition

Si $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est de coefficient générique $A_{i,j}$ on appelle trace de A, et l'on note $\mathrm{tr}(A)$, *le scalaire* $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} A_{i,i}$.

Remarque

L'application qui à A associe sa trace est linéaire et $\mathrm{tr}(A^T) = \mathrm{tr}(A)$.

Théorème

Si $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathfrak{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ alors $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

Démonstration

On a $\mathrm{tr}(AB) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(AB)_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} A_{i,k}B_{k,i} = \sum_{k=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} B_{k,i}A_{i,k}$ en permutant les symboles $\sum$ et en utilisant la commutativité de $\mathbb{K}$.

De même $\mathrm{tr}(BA) = \displaystyle\sum_{k=1}^{p}(BA)_{k,k} = \sum_{k=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} B_{k,i}A_{i,k}$ d'où l'égalité. □

Remarque

On se gardera de penser que l'on a toujours $\mathrm{tr}(ABC) = \mathrm{tr}(BAC)$ comme le prouve l'exemple où $A = E^{1,2}$, $B = E^{2,1}$ et $C = E^{1,1}$ car $ABC = E^{1,2}E^{2,1}E^{1,1} = E^{1,1}$ est de trace 1 alors que $BAC = E^{2,1}E^{1,2}E^{1,1} = 0_n$ est de trace nulle. On a noté $E^{i,j}$ la matrice élémentaire i, j dont tous les coefficient sont nuls à l'exception du coefficient i, j qui est égal à 1.

On va par contre prouver le

Corollaire

Si $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ alors $\mathrm{tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{tr}(A)$, *autrement dit deux matrices semblables ont même trace.*

Démonstration

Posons $X = P^{-1}A$ et $Y = P$, alors $\mathrm{tr}(XY) = \mathrm{tr}(YX)$ ou encore
$\mathrm{tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{tr}(PP^{-1}A) = \mathrm{tr}(A)$. □

Cela permet de donner la

Définition

Si u est un endomorphisme de E espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$, on appelle trace de u et on note $\mathrm{tr}(u)$ *la trace d'une matrice de u relativement à une base e de E, étant entendu que cela ne dépend pas du choix de e.*

Théorème

Si E est de dimension finie et si p est un projecteur, alors $\mathrm{tr}(p) = \mathrm{rg}(p)$.

Démonstration

Dans une base adaptée à la décomposition $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$, p admet une matrice diagonale par blocs $P = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{pmatrix}$ où $r = \dim\big[\mathrm{Im}(p)\big] = \mathrm{rg}(p)$ et le résultat est immédiat. □

2 Cela n'est pas caractéristique des projecteurs car, avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, on a $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{rg}(A) = 2$ mais A n'est pas projecteur de rang 2 car $A \neq I_2$.

Remarque
Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $E^{i,i}$ est la matrice d'un projecteur de rang 1 car $(E^{i,i})^2 = E^{i,i}$ et $\mathrm{tr}(E^{i,i}) = 1$.

D. Interpolation de Lagrange

On suppose $n \geqslant 1$ et $x_1, \ldots, x_n$ désignent des scalaires deux à deux distincts.

1. Problème de l'interpolation

Théorème

Si $(y_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{K}^n$ alors il existe dans $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ un unique élément P vérifiant : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $P(x_i) = y_i$.

Démonstration

L'application $\Phi : \mathbb{K}_{n-1}[X] \to \mathbb{K}^n$, $P \mapsto \big(P(x_i)\big)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est linéaire entre deux espaces vectoriels de même dimension finie, à savoir n. Tout revient à montrer que c'est une bijection et, pour cela il suffit d'établir son injectivité.
Si $P \in \mathrm{Ker}(\Phi)$ alors P possède n zéros et est de degré au plus $n-1$, donc est nul.
Par suite Φ est un isomorphisme. □

Remarque
Si $P = \sum_{j=0}^{n-1} a_j X^j$ alors le système précédent (Σ) : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $P(x_i) = y_i$ est un système linéaire de n équations en les n inconnues $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$, la i-ème ligne étant $\sum_{j=0}^{n-1} a_j x_i^j = y_i$ ou encore (voir Vandermonde) $\sum_{j=1}^{n} a_j x_i^{j-1} = y_i$.

2. Polynômes de Lagrange

Définition

On pose, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $L_i = \prod_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} \dfrac{X - x_j}{x_i - x_j}$.

Remarque

$\forall i \in [\![1, n]\!]$, $L_i \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ et $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $L_i(x_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Théorème

1. *$(L_1, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$.*
2. *Si $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ ses coordonnées dans cette base sont $\big(P(x_i)\big)_{1 \leqslant i \leqslant n}$.*
Autrement dit la solution du problème d'interpolation (Σ) est $\sum_{i=1}^{n} y_i L_i$.
3. $\sum_{i=1}^{n} L_i = 1$.

Démonstration

1. Comme $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ est de dimension n la liberté suffira. Si $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n$ et $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i P_i=0$ alors, en évaluant en x_j si $j\in[\![1,n]\!]$, $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\delta_{i,j}=0$ *ie.* $\lambda_j=0$, ce qui prouve la liberté.
2. De même si les coordonnées de P dans cette base sont $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ *ie.* si $P=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i L_i$, toujours en évaluant en x_j si $j\in[\![1,n]\!]$, $P(x_j)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\delta_{i,j}=\lambda_j$.
L'expression de la solution de (Σ) en découle directement.
3. On applique ce qui précède en remarquant que le polynôme 1 est la solution de (Σ) si $y_1=\cdots=y_n=1$. □

3. Matrice et déterminant de Vandermonde

3.1. Matrice

La matrice M_n de $(X^0,X^1,\dots,X^{n-1})$ dans $(L_1,\dots L_n)$ a, d'après ce qui précède, x_i^{j-1} comme coefficient générique i,j et elle est, bien sûr, inversible en tant que matrice de changement de base.
Si l'on pose $A=(a_0,\dots,a_{n-1})^T$ et $Y=(y_1,\dots y_n)^T$ alors $(\Sigma)\iff M_nA=Y$.

3.2. Déterminant

Formule

$$\left|\begin{array}{l} \\ V_n(x_1,x_2,\dots,x_n)= \\ \\ \end{array}\right| \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i).$$

Démonstration

On effectue les opérations $C_j\leftarrow C_j-x_1C_{j-1}$ pour $j=n$ puis $j=n-1,\dots,j=2$.

$$V_n(x_1,x_2,\dots,x_n)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_2-x_1 & x_2(x_2-x_1) & \dots & x_2^{n-2}(x_2-x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_n-x_1 & x_n(x_n-x_1) & \dots & x_n^{n-2}(x_n-x_1) \end{vmatrix}$$

Du théorème précédent et du résultat : $\det(M)=\det\left(M^T\right)$, on déduit que :

$V_n(x_1,x_2,\dots,x_n)=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ B & C \end{vmatrix}=\det(C)$. Comme le déterminant d'une matrice dépend linéairement des vecteurs colonnes, $\det(C)=\prod_{k=2}^{n}(x_k-x_1)V_{n-1}(x_2,\dots,x_n)$.
Comme $V_1(x_1,x_2)=(x_2-x_1)$, le résultat est prouvé par récurrence. □

Remarque

La démonstration n'utilise pas le fait que les x_i sont deux à deux distincts, le résultat est donc valable même si $\mathrm{Card}\left(\{x_1,\dots,x_n\}\right)<n$.

EXERCICES

1. Si, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note $f_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sin(t+x)$, déterminer le rang de la famille $(f_t)_{t\in\mathbb{R}}$.

---

2. Soit $f : x \mapsto \ln(1+x)$. On pose $f_0(x) = x$ et pour tout $k \geqslant 0,\ f_{k+1} = f_k \circ f$. Montrer que $(f_k)_{k\geqslant 0}$ est libre.

---

3. a) Si $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont des réels deux à deux distincts, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des réels non tous nuls, montrer que $\mathrm{Card}\left(\left\{x > 0 \mid \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x^{\alpha_i} = 0\right\}\right) < n$.

Indication : raisonner par récurrence sur n en utilisant le théorème de Rolle.

b) Soient I un intervalle et $f : I \to]0, +\infty[$ prenant une infinité de valeurs. Montrer que $(f^\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ est libre.

---

4. Soient P un polynôme de degré n et $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ des scalaires deux à deux distincts. Montrer que $\big(P(X+\alpha_j)\big)_{0\leqslant j\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

---

5. Soit E espace vectoriel réel de dimension n. Une famille $\mathcal{E}$ d'éléments de E est dite positivement génératrice si tout élément de E est combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{R}_+$ d'éléments de $\mathcal{E}$. Quel est le cardinal minimal d'une famille positivement génératrice de E ?

---

6. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ où E est de dimension finie.
Montrer : f projecteur $\iff \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(I_E - f) = \dim E$.

---

7. Soient E espace vectoriel de dimension finie n, u et v éléments de $\mathcal{L}(E)$.

Montrer : $\begin{cases} u\circ v = 0 \\ u + v \in \mathrm{GL}(E) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v) = n \\ \mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Im}(v) \\ E = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u) \end{cases}$

---

8. Montrer que tout sous-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ de $\mathbb{K}[X]$ admet une base formée de polynômes
a) de degrés deux à deux distincts. b) tous de même degré.

---

9. Si $(X_1, \ldots, X_q)$ et $(Y_1, \ldots, Y_p)$ sont des familles libres dans $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, montrer que $\big(Y_i X_j^T\big)_{\substack{1\leqslant i\leqslant p \\ 1\leqslant j\leqslant q}}$ est libre dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

10. a) Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel trouver les ensembles
$\big\{u\in\mathcal{L}(E)\ \big|\ \forall x\in E,\ \big(x,u(x)\big)\text{ est liée }\big\}$ et $\big\{u\in\mathcal{L}(E)\ \big|\ \forall v\in \mathrm{GL}(E),\ u\circ v=v\circ u\big\}$.

b) Si E est de dimension finie, trouver l'ensemble des endomorphismes de E qui ont même matrice dans toute base.

c) On suppose E de dimension $n\geqslant 2$ et $f\in\mathcal{L}(E)$. Montrer l'équivalence entre :
(i) Il existe λ scalaire non nul tel que $f=\lambda I_E$.
(ii) Pour tous g,h dans $\mathcal{L}(E)$, si $f=g\circ h$ alors $f=h\circ g$.

---

11. Montrer que pour tout Q dans $\mathbb{K}[X]$, il existe un unique élément P de $\mathbb{K}[X]$ tel que $P(X+1)-P(X)=Q(X)$ et $P(0)=0$.

---

12. Soient $E=\big\{f\in\mathcal{C}^\infty\big(\mathbb{R},\mathbb{R}\big)\ \big|\ f\text{ est 1-périodique}\big\}$ et $\Delta : f\mapsto f''$.
Déterminer $\mathrm{Ker}(\Delta)$ et montrer, si $g\in E,\ g\in\mathrm{Im}(\Delta)\iff\displaystyle\int_0^1 g=0$.
Montrer alors $E=\mathrm{Ker}(\Delta)\oplus\mathrm{Im}(\Delta)$.

---

13. Si E espace de dimension n et $A=\big\{(u,v)\in\big(\mathcal{L}(E)\big)^2\ \big|\ u\circ v=0\big\}$, déterminer $\displaystyle\sup_{(u,v)\in A}\big[\mathrm{rg}(u)+\mathrm{rg}(v)\big]$.

---

14. E, F et G sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies, $\varphi\in\mathcal{L}(E,F)$ et $\psi\in\mathcal{L}(F,G)$. V désigne un sous-espace vectoriel de F.

a) Montrer $\dim\big[\psi(V)\big]=\dim(V)-\dim\big[\mathrm{Ker}(\psi)\cap V\big]$.

b) En déduire $\mathrm{rg}(\varphi)+\mathrm{rg}(\psi)-\dim(F)\leqslant\mathrm{rg}(\psi\circ\varphi)\leqslant\min\big[\mathrm{rg}(\varphi),\mathrm{rg}(\psi)\big]$.

---

15. E et F sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies. Si f et g sont dans $\mathcal{L}(E,F)$, montrer : $\mathrm{rg}(f+g)=\mathrm{rg}(f)+\mathrm{rg}(g)\iff\begin{cases}\mathrm{Im}(f)\cap\mathrm{Im}(g)=\{0\}\\ \mathrm{Ker}(f)+\mathrm{Ker}(g)=E\end{cases}$

---

16. Soit f endomorphisme de E espace vectoriel de dimension finie tel que $f^2=\lambda f$ où $\lambda\in\mathbb{K}\setminus\{0\}$. Donner un lien entre $\mathrm{rg}(f)$ et $\mathrm{tr}(f)$.

---

17. Soient f et g endomorphismes de E, $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

a) Si $f\circ g\circ f=f$ montrer $f\circ g$ et $g\circ f$ sont des projecteurs ainsi que les égalités : $\mathrm{Ker}(g\circ f)=\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f\circ g)=\mathrm{Im}(f)$.

b) Si (i) $f\circ g\circ f=f$, (ii) $g\circ f\circ g=g$, (iii) $\mathrm{rg}(f)=\mathrm{rg}(g)$, montrer que deux quelconques des propriétés entraînent la troisième.

---

18. Si $A\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, montrer que $\mathrm{rg}(A)\leqslant 1$ si, et seulement si, il existe C dans $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et L dans $\mathfrak{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ telles que $A=CL$. Exprimer dans ce cas AC en fonction de C et de $\mathrm{tr}(A)$, calculer également A^2.

19. Soient E espace vectoriel de dimension finie $2p$, $p \geqslant 1$ et $\varphi \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il y a équivalence entre les propriétés :

(i) $\varphi^2 = 0$ et $\mathrm{rg}(\varphi) = p$,

(ii) $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Ker}(\varphi)$,

(iii) Il existe A dans $\mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ telle que, par blocs, $\begin{pmatrix} 0 & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ soit matrice de φ.

---

20. Si A et B sont dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ et vérifient : $\forall X \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}),\ AXB = 0_n$ montrer que A ou B est nulle.

---

21. Trouver l'ensemble des applications linéaires φ de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$ vérifiant :

$$\forall (A, B) \in \big(\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})\big)^2,\ \varphi(AB) = \varphi(BA)$$

---

22. Soit u endomorphisme de E, $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Montrer que $u^n = 0 \neq u^{n-1}$ si, et seulement si, $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ (0) & & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est matrice de u.

---

23. Si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, montrer l'équivalence entre :

(i) Les coefficients de A et A^{-1} sont dans $\mathbb{R}_+$,

(ii) A est à coefficients dans $\mathbb{R}_+$, chaque ligne et chaque colonne de A contient un et un seul terme non nul.

---

24. Si $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ on définit $A \geqslant 0$ par : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!],\ A_{i,j} \geqslant 0$.
Montrer : $\big(A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \text{ et } A^{-1} \geqslant 0\big) \iff \big(\forall C \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ AC \geqslant 0 \Rightarrow C \geqslant 0\big)$.

---

25. Existe-t-il A dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{K})$ telle que $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$?

---

26. a) Si A et B sont dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, résoudre, dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, $X + \big[\mathrm{tr}(X)\big]A = B$.
b) Idem avec $X + X^T = \big[\mathrm{tr}(X)\big]A$.

---

27. Si $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ B \in \mathfrak{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ avec AB matrice d'un projecteur de rang p, montrer $BA = I_p$.

---

28. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ de rang 1.
Trouver les sous-espaces vectoriels $\mathcal{X}$ de $\mathcal{L}(E)$ tels que : $\varphi \in \mathcal{X}$ et $\forall \psi \in \mathcal{X}, \mathrm{rg}(\psi) \leqslant 1$.

29. Calculer les déterminants suivants, qu'on notera le plus souvent $\Delta_n = \det(A)$ si $A = (a_{i,j}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$:

a) $A \in \mathfrak{M}_{n+1}(\mathbb{C})$, $(b_0, b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ avec $b_0 = 0$, $a_{i,i} = 1 - b_{i-1}$, $a_{i,i+1} = b_i$, $a_{i,i-1} = -1$, $b_0 = 0$ et $a_{i,j} = 0$ sinon.

b) $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, $a_{i,i} = 2\cos(\theta)$, $a_{i,i+1} = a_{i,i-1} = 1$ et $a_{i,j} = 0$ sinon.

c) $A \in \mathfrak{M}_{n+1}(\mathbb{R})$, $a_{i,j} = \binom{m+i+j-3}{i-1}$.

d) $\begin{vmatrix} 1 & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \ldots & \binom{n}{n} \\ 1 & \binom{n-1}{1} & \ldots & \binom{n-1}{n-1} & 0 \\ 1 & \ldots & \ldots & & \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & \binom{1}{1} & 0 & \ldots & 0 \\ a_0 & a_1 & \ldots & \ldots & a_n \end{vmatrix}$.

e) ***Déterminant de Cauchy*** $A = \left(\alpha_{i,j}\right) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, $\alpha_{i,j} = \dfrac{1}{a_i + b_j}$, $a_i + b_j \neq 0$.

f) $f(x+1) - f(x)$ si $f(x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & x \\ 1 & 2 & 0 & \ldots & \ldots & x^2 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & \ldots & x^3 \\ \vdots & & & & & \\ 1 & \binom{n+1}{1} & \binom{n+1}{2} & \ldots & \binom{n+1}{n-1} & x^{n+1} \end{vmatrix}$.

g) $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, $a_{i,i} = c_i$, $a_{i,j} = a$ si $i < j$ et $a_{i,j} = b$ si $i > j$. *On introduira* $D(x) = \det(a_{i,j} + x)$, *on montrera que* $D \in \mathbb{R}_1[X]$ *et on donnera le résultat en fonction de* $P(x) = \prod_{k=1}^{n}(c_k - x)$.

---

30. a) $P_1, \ldots, P_{n+1}$ sont $n+1$ polynômes de $\mathbb{K}_n[X]$. On note $P_i(X) = \sum_{j=0}^{n} a_{i,j} X^j$.

On pose $A = (a_{i,j-1}) \in \mathfrak{M}_{n+1}(\mathbb{K})$. Soit $V = (m_{i,j})$ où $m_{i,j} = x_j^{i-1}$ et où $x_1, \ldots, x_{n+1}$ sont 2 à 2 distincts dans $\mathbb{K}$. Soit $Y = (P_i(x_j))$.

Établir $Y = A.V$. Montrer que Y est non inversible si tous les P_i sont dans $\mathbb{K}_{n-1}[X]$.

b) Calculer $D_n = \det((i+j-1)^n)$ où $(i,j) \in [\![1, n+1]\!]^2$. On simplifiera le résultat au maximum.

c) On sait que $\cos(mx) = P_m(\cos x)$ où $P_m \in \mathbb{R}[X]$, $\deg(P_m) = m$, P_m a 2^{m-1} pour coefficient dominant.

Donner une expression sous forme de produit de $\det(M)$ où $M = (\cos((i-1)x_j))$, $(i,j) \in [\![1, n+1]\!]^2$.

---

31. Résoudre le système $M.X = Y$ où $M = (j^{i-1}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, $X^T = (x_1 \ \ldots x_n)$ et $Y^T = (1\ 0 \ldots 0)$.

32. a) Soit $(c_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ une famille finie de p réels non tous nuls et $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ une famille finie de p réels deux à deux distincts. On définit $f_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{k=1}^{p} c_k e^{a_k x}$.
Montrer que f_p a au plus $(p-1)$ zéros réels.
On pourra utiliser le théorème de Rolle.
b) $(\alpha_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ et $(\beta_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ des réels tels que : $\alpha_1 < \cdots < \alpha_n$ et $\beta_1 < \cdots < \beta_n$.
Montrer que $\det(M) > 0$ si M est la matrice $\big(\exp(\alpha_i\beta_j)\big)$.

---

33. Soit $(A, B) \in \big(\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})\big)^2$. S'il existe P dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que $A = PBP^{-1}$, montrer qu'il existe U dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que $A = UBU^{-1}$.

---

34. Soit $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 1$. On suppose que deux applications h et g sont n fois dérivables sur un intervalle I non trivial de $\mathbb{R}$ et que h ne s'annule pas sur I. Donner l'expression de la dérivée n-ième de $f = \dfrac{g}{h}$ en fonction de g, h et de leurs dérivées k-ièmes, $1 \leqslant k \leqslant n$. On mettra le résultat sous la forme $\dfrac{\Delta}{h^{n+1}}$ où Δ est le déterminant d'une matrice. *On pourra utiliser la formule de Leibniz.*

---

35. Décomposition L.U. (lower-upper)
Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que les mineurs principaux Δ_k de A sont tous non nuls. ($\Delta_k = \det(A_k)$ où A_k est la matrice extraite de A formée des k premières lignes et k premières colonnes de A). Montrer par récurrence qu'il existe un unique couple T_-, T_+ de matrices triangulaires inférieures (*resp.* supérieures) de diagonale formée de 1 telle que : $A = T_- \Delta T_+$ où $\Delta = \mathrm{Diag}\Big(\Delta_1, \dfrac{\Delta_2}{\Delta_1}, \cdots, \dfrac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}\Big)$. Proposer une application à la résolution de systèmes linéaires de Cramer.

---

36. Retrouver l'expression du déterminant de Vandermonde :

$$V_n(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \begin{vmatrix} 1 & t_1 & \ldots & t_1^{n-1} \\ 1 & t_2 & \ldots & t_2^{n-1} \\ & & \ldots & \\ 1 & t_n & \ldots & t_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} (t_j - t_i)$$ en utilisant le polynôme

$$P(X) = \prod_{i=1}^{n-1}(X - t_i) = X^{n-1} - \sum_{k=0}^{n-2} a_k X^k.$$

---

37. Si $(A, B) \in \big(\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})\big)^2$ et $t \in \mathbb{R}_+$ montrer que $\begin{vmatrix} A & -tB \\ B & A \end{vmatrix} \in \mathbb{R}_+$.

---

38. Soient $f_1, \ldots, f_q$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Montrer que $(f_1, \ldots, f_q)$ est libre si, et seulement si, il existe $(x_1, \ldots, x_q) \in \mathbb{R}^q$ tel que $\det\Big(f_i(x_j)\Big)_{1\leqslant i,j\leqslant q} \neq 0$.

---

39. Soient E un espace vectoriel de dimension quelconque, f un élément de $\mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$.
Si $P(f) = 0$ montrer $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

SOLUTIONS DES EXERCICES

1. Tout d'abord $f_0 = \sin$ et $f_{\frac{\pi}{2}} = \cos$.
Si $(t,x) \in \mathbb{R}^2$ on a $f_t(x) = \sin(t) f_{\frac{\pi}{2}}(x) + \cos(t) f_0(x)$ et, par conséquent,
$\mathrm{Vect}(f_t,\ t \in \mathbb{R}) = \mathrm{Vect}(f_0, f_{\frac{\pi}{2}})$ de dimension 2.

---

2. On a $f(\mathbb{R}_+) \subset \mathbb{R}_+$, $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ et $f(x) \underset{+\infty}{=} o(x)$, les f_k sont donc définies au moins sur $\mathbb{R}_+$ et $f_k(x) \underset{+\infty}{=} o\big(f_\ell(x)\big)$ si $k > \ell$.
Si $(f_k)_k$ est liée on peut en trouver une combinaison linéaire nulle à coefficients non tous nuls, quitte à supprimer les coefficients nuls on obtient une combinaison à coefficients tous non nuls, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_{k_i} = 0$ où $0 \leqslant k_1 < \cdots < k_n$.
Les croissances comparées donnent alors $0 \underset{+\infty}{\sim} \lambda_1 f_{k_1}(x)$. Comme $\lambda_1 \neq 0$ f_{k_1} est nécessairement localement nulle alors que $f_{k_1}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$: absurde.

---

3. a) Pour $n = 1$, $\lambda x^\alpha = 0$ n'a pas de solution dans $]0,+\infty[$ si $\lambda \neq 0$, ce qui initialise la récurrence.
Supposons la propriété établie à un rang $n \geqslant 1$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}$ deux à deux distincts, $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}$ non tous nuls et montrons $\mathrm{Card}\left(\left\{x > 0 \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x^{\alpha_i} = 0\right\}\right) < n+1$ par l'absurde. Si $a_1, \ldots, a_{n+1}$ sont dans cet ensemble avec $a_1 < \cdots < a_{n+1}$ et, par exemple, $\lambda_1 \neq 0$, $\varphi : x \mapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x^{\alpha_i - \alpha_{n+1}}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ avec $\varphi(a_1) = \cdots = \varphi(a_{n+1}) = -\lambda_{n+1}$.
Le théorème de Rolle assure l'existence de n zéros de φ' dans $]a_1, a_{n+1}[$ et donc dans $]0,+\infty[$. Or $\forall x > 0$, $\varphi'(x) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \alpha_{n+1}) \lambda_i x^{\alpha_i - \alpha_{n+1} - 1}$, les $(\alpha_i - \alpha_{n+1} - 1)$ sont deux à deux distincts et $(\alpha_1 - \alpha_{n+1})\lambda_1 \neq 0$, ce qui contredit la propriété au rang n et termine la récurrence.
b) Si $(f^\alpha)_\alpha$ est liée on peut trouver n dans $\mathbb{N}^\star$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ deux à deux distincts et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ non tous nuls tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f^{\alpha_i} = 0$. Comme f prend une infinité de valeurs, l'ensemble $\left\{x > 0 \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x^{\alpha_i} = 0\right\}$ est infini, ce qui contredit a).

4. Par Taylor, si $0 \leqslant j \leqslant n,\ P(X+\alpha_j) = \sum_{i=0}^{n} \frac{P^{(i)}(X)}{i!}\,\alpha_j^i$.

Si $\sum_{j=0}^{n} \lambda_j P(X+\alpha_j) = 0$ alors, en permutant les $\sum$, on a $\sum_{i=0}^{n} \beta_i \frac{P^{(i)}(X)}{i!} = 0$ où $\beta_i = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j \alpha_j^i$. Comme la famille des $\frac{P^{(i)}(X)}{i!}$ est libre car échelonnée en degrés, les β_i sont tous nuls *ie.* $A\Lambda = 0$ où $A = \left(\alpha_j^i\right)_{0\leqslant i,j\leqslant n}$ et $\Lambda = (\,\lambda_0 \quad \dots \quad \lambda_n\,)^T$.

Rappelons que A est inversible car matrice de Vandermonde associée à $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$, et donc $\Lambda = 0$, ce qui termine la preuve.

---

5. Si $\mathcal{E}$ est une famille positivement génératrice, comme elle est génératrice, on a $\mathrm{Card}(\mathcal{E}) \geqslant n$. Si $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ alors il s'agit d'une base et $-\sum_{i=1}^{n} e_i \notin \sum_{i=1}^{n} \mathbb{R}_+ e_i$, ce qui est absurde, donc $\mathrm{Card}(\mathcal{E}) \geqslant n+1$.

Soit alors $(e_1, \dots, e_n)$ une base, posons $e_{n+1} = -\sum_{i=1}^{n} e_i$ et $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_{n+1})$.

Si $x \in E$, et $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ avec au moins un x_i strictement négatif, choisissons i_0 tel que x_{i_0} est minimal, on a $x = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i_0}) e_i + (-x_{i_0}) e_{n+1} \in \sum_{i=1}^{n+1} \mathbb{R}_+ e_i$ car $x_i \geqslant x_{i_0}$ pour tout i et $x_{i_0} < 0$. Cette famille est donc positivement génératrice, le cardinal minimal est donc $n+1$.

---

6. Le sens direct découle du cours.
Si $\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(f - I_E) = \dim(E) = n$ alors $\dim\big[\mathrm{Ker}(f)\big] + \dim\big[\mathrm{Ker}(f - I_E)\big]$ est aussi $\big[n - \mathrm{rg}(f)\big] + \big[n - \mathrm{rg}(f - I_E)\big]$ soit n.
De plus, si $x \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(f - I_E)$ alors $f(x) = 0 = x$, $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(f - I_E) = \{0\}$ et donc $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f - I_E)$ ce qui prouve que f est un projecteur.

---

7. $u \circ v = 0 \Rightarrow \mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Ker}(u) \Rightarrow \mathrm{rg}(v) \leqslant n - \mathrm{rg}(u)$ d'où $\mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v) \leqslant n$ (1)
D'autre part $E = \mathrm{Im}(u+v) \subset \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v) \subset E$ donc $E = \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v)$ puis $\mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v) = n + \dim\big[\mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Im}(v)\big] \geqslant n$ (2) *cf.* Grassmann
(1) et (2) donnent $\mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v) = n$ et $\mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Im}(v) = \{0\}$ d'où $E = \mathrm{Im}(u) \oplus \mathrm{Im}(v)$.
$\mathrm{Im}(v)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{Ker}(u)$ et $\dim\big[\mathrm{Im}(v)\big] = \dim\big[\mathrm{Ker}(u)\big]$ d'où $\mathrm{Im}(v) = \mathrm{Ker}(u)$ et enfin $E = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$.

---

8. a) Procédons par récurrence sur n, le cas $n = 1$ étant clair. Supposons la propriété établie à un rang n et V sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ de dimension $n+1$. Soit $(P_1, \dots, P_{n+1})$ une base de V avec $\deg(P_1) \leqslant \dots \leqslant \deg(P_{n+1})$, P_i de coefficient dominant a_i.

Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on pose $Q_i = \begin{cases} P_i & \text{si } \deg(P_i) < \deg(P_{n+1}) \\ a_{n+1}P_i - a_i P_{n+1} & \text{sinon} \end{cases}$
Alors $(Q_1, \dots, Q_n, P_{n+1})$ est une base de V et : $\forall i \in [\![1,n]\!],\ \deg(Q_i) < \deg(P_{n+1})$.
Soit $W = \text{Vect}(Q_1, \dots, Q_n)$, on a $\dim(W) = n$ et on choisit une base $(R_1, \dots, R_n)$ de W vérifiant $\deg(R_1) < \dots < \deg(R_n)$ par hypothèse de récurrence.
Par construction $(R_1, \dots, R_n, P_{n+1})$ est une base de V et on a les inégalités $\deg(R_1) < \dots < \deg(R_n) < \deg(P_{n+1})$, ce qui termine la récurrence.

b) Choisissons une base $(P_1, \dots, P_n)$ de V sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ vérifiant $\deg(P_1) < \dots < \deg(P_n)$ et posons, si $i \in [\![1,n[\![$, $Q_i = P_i + P_n$, alors $(Q_1, \dots, Q_{n-1}, P_n)$ est une base de V constituée de polynômes tous de même degré.

---

9. Complétons $(X_1, \dots, X_q)$ et $(Y_1, \dots, Y_p)$ en $(X_1, \dots, X_n)$ et $(Y_1, \dots, Y_n)$ bases de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Soient A et B les éléments de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ dont les colonnes sont $Y_1, \dots, Y_n$ et $X_1, \dots, X_n$, on a, pour tout (i,j) dans $[\![1,n]\!]^2$, $Y_i X_j^T = (AE_i)(BE_j)^T$ d'où $Y_i X_j^T = A(E_i E_j^T)B^T = AE^{i,j}B^T$.
$\Phi : Z \mapsto AZB^T$ est un automorphisme de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ car A et B sont inversibles, $(Y_i X_j^T)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est donc une base de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ et, en tant que sous-famille, $\left(Y_i X_j^T\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant q}}$ est libre dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

---

10. a) Supposons que $\big(x, u(x)\big)$ soit liée pour tout x dans E, alors, si $x \neq 0$, il existe un unique scalaire λ_x tel que $u(x) = \lambda_x x$, la restriction de u à toute droite vectorielle est donc une homothétie.
Si (x,y) est une famille libre alors $z = x + y \neq 0$ et $u(z) = \lambda_z z = \lambda_z(x+y)$.
D'autre part $u(z) = u(x) + u(y) = \lambda_x x + \lambda_y y$. Par liberté de (x,y) on en déduit $\lambda_x = \lambda_z = \lambda_y$, ainsi $u \in \text{Vect}(I_E)$. La réciproque étant immédiate on a prouvé que $\big\{u \in \mathcal{L}(E) \ \big|\ \forall x \in E,\ \big(x, u(x)\big) \text{ est liée } \big\} = \text{Vect}(I_E)$.
Si, pour tout v dans $\text{GL}(E)$, $u \circ v = v \circ u$ alors, pour tout $x \neq 0$, considérons H hyperplan supplémentaire de $D = \mathbb{K}x$ et v la symétrie par rapport à D parallèlement à H. On a $(u \circ v)(x) = (v \circ u)(x)$ *ie.* $u(x)$ est point fixe de v et donc élément de D, $\big(x, u(x)\big)$ est liée. C'est encore vrai si $x = 0$ et donc $u \in \text{Vect}(I_E)$.
La réciproque étant immédiate, $\big\{u \in \mathcal{L}(E) \ \big|\ \forall v \in \text{GL}(E),\ u \circ v = v \circ u\big\} = \text{Vect}(I_E)$.

b) Soient u un tel endomorphisme et A **sa** matrice. Alors, pour tout P dans $\text{GL}_n(\mathbb{K})$, on a $A = P^{-1}AP$ *ie.* $PA = AP$ ce qui signifie que u commute avec tout élément de $\text{GL}(E)$, on retrouve encore l'ensemble $\text{Vect}(I_E)$.

c) Supposons (i) et $f = g \circ h$, alors $h = \lambda g^{-1}$ d'où $h \circ g = \lambda I_E = f$ et (ii)

Supposons (ii), alors, pour tout g dans $\text{GL}(E)$, avec $h = g^{-1} \circ f$ on a $f = g \circ h$ d'où $f = h \circ g$ *ie.* $f \circ g = g \circ f$ et, d'après a), $f \in \text{Vect}(I_E)$. Si $f = 0$ on considère g et h de matrices $E^{1,1}$ et $E^{2,1}$, on a $g \circ h$ de matrice $E^{1,1}E^{2,1} = 0$ d'où $g \circ h = f$ alors que $h \circ g$ est de matrice $E^{2,1}E^{1,1} = E^{2,1} \neq 0$. D'où (i).

11. L'application $\varphi : P \mapsto P(0)$ est une forme linéaire non nulle sur $\mathbb{K}[X]$, son noyau, $\mathcal{H}$, est un hyperplan. $X^0 \notin \mathcal{H}$ donc $\mathcal{H}$ et $\mathbb{K}_0[X]$ sont supplémentaires.
On a montré en cours que $\Delta : P(X) \mapsto P(X+1) - P(X)$ est un endomorphisme surjectif de $\mathbb{K}[X]$ dont le noyau est $\mathbb{K}_0[X]$, la restriction de Δ à $\mathcal{H}$ est donc un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels d'où la conclusion.

---

12. Si $f \in \mathrm{Ker}(\Delta)$ alors f est affine et 1-périodique, $f - f(0)$ est polynomiale nulle sur $\mathbb{Z}$ de cardinal infini, donc f est constante. La réciproque est immédiate, $\mathrm{Ker}(\Delta)$ est constitué des fonctions constantes.

Si $g \in \mathrm{Im}(\Delta)$, $g = f''$ où $f \in E$, alors f' est 1-périodique d'où $\displaystyle\int_0^1 g = 0$.

Si $g \in E$ et $\displaystyle\int_0^1 g = 0$, le cours d'analyse montre que toute primitive de g est 1--périodique, si φ est une primitive alors $\psi = \varphi - \displaystyle\int_0^1 \varphi$ aussi et $\displaystyle\int_0^1 \psi = 0$, donc toute primitive f de ψ est 1-périodique, élément de E et $\Delta(f) = g$ donc $g \in \mathrm{Im}(\Delta)$.
On a prouvé que g est élément de $\mathrm{Im}(\Delta)$ si, et seulement si, $g \in E$ et $\displaystyle\int_0^1 g = 0$.

Soit alors $f \in E$, supposons que $f = \lambda + g$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $g \in \mathrm{Im}(\Delta)$. On a $\displaystyle\int_0^1 f = \lambda$ et $g = f - \int_0^1 f$, ce qui prouve l'unicité de (λ, g).

D'autre part, pour tout f dans E, en posant $\lambda = \displaystyle\int_0^1 f$ et $g = f - \int_0^1 f$ on a $f = \lambda + g$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $g \in \mathrm{Im}(\Delta)$, tout élément de E admet donc une décomposition unique dans $\mathrm{Ker}(\Delta) + \mathrm{Im}(\Delta)$ *ie.* $E = \mathrm{Ker}(\Delta) \oplus \mathrm{Im}(\Delta)$.

---

13. Si $(u, v) \in A$ alors $\mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Ker}(u)$ d'où $\mathrm{rg}(v) \leqslant n - \mathrm{rg}(u)$ *ie.* $\mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v) \leqslant n$.
Si $(u, v) = (I_E, 0)$ alors $(u, v) \in A$ et $\mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v) = n$.
Donc $\displaystyle\sup_{(u,v)\in A} \big[\mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v)\big] = \max_{(u,v)\in A} \big[\mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v)\big] = n$.

---

14. a) Avec $\widetilde{\psi} = \psi\big|_V$ on a $\dim(V) = \mathrm{rg}(\widetilde{\psi}) + \dim\big[\mathrm{Ker}(\widetilde{\psi})\big]$ et, comme $\mathrm{Ker}(\widetilde{\psi}) = \mathrm{Ker}(\psi) \cap V$, il vient $\dim\big[\psi(V)\big] = \dim(V) - \dim\big[\mathrm{Ker}(\psi) \cap V\big]$.
b) Appliquons a) avec $V = \mathrm{Im}(\varphi)$ en remarquant que $\mathrm{Ker}(\psi) \cap \mathrm{Im}(\varphi) \subset \mathrm{Ker}(\psi)$:
(1) $\dim\big[(\psi\circ\varphi)(E)\big] = \dim\big[\varphi(E)\big] - \dim\big[\ker(\psi) \cap \mathrm{Im}(\varphi)\big] \geqslant \mathrm{rg}(\varphi) - \dim\big[\mathrm{Ker}(\psi)\big]$
soit encore $\mathrm{rg}(\psi\circ\varphi) \geqslant \mathrm{rg}(\varphi) + \mathrm{rg}(\psi) - \dim(F)$.
(1) montre également que $\mathrm{rg}(\psi\circ\varphi) \leqslant \mathrm{rg}(\varphi)$ et, comme $\mathrm{Im}(\psi\circ\varphi)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{Im}(\psi)$, on a $\mathrm{rg}(\psi\circ\varphi) \leqslant \mathrm{rg}(\psi)$, d'où l'encadrement de $\mathrm{rg}(\psi\circ\varphi)$.

---

15. On a toujours $\mathrm{Im}(f+g) \subset \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$ et donc, par la formule de Grassmann,
$\mathrm{rg}(f+g) \leqslant \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) - \dim\big[\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Im}(g)\big] \leqslant \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$.
Par suite $\mathrm{rg}(f+g) = \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$ équivaut à $\big(\mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$ est directe et $\mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Im}(f+g)\big)$.