

Calcul différentiel et calcul intégral

2^e édition

Noureddine El Jaouhari

Maître de conférences à l'université d'Orléans

DUNOD

Illustration de couverture : © 3DJustincase, shutterstock.com

© Dunod, Paris, 2017, 2022
11, rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-083947-6

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Table des matières

Avant-propos

VIII

Partie 1

Chapitre 1	Champs scalaires et vectoriels	1
1.	Fonctions vectorielles d'une variable	1
1.1	Dérivée d'une fonction vectorielle	2
1.2	Dérivées d'ordre supérieur d'une fonction vectorielle	2
1.3	Intégrale d'une fonction vectorielle	4
2.	Fonctions de plusieurs variables	5
2.1	Champs scalaires	5
2.2	Champs vectoriels	5
2.3	Graphe d'une fonction de plusieurs variables	7
2.4	Surfaces de niveau d'un champ scalaire	7
	Entraînez-vous	9
	Solutions	10
Chapitre 2	Dérivées partielles et différentielles	18
1.	Les dérivées partielles premières	18
2.	Les dérivées partielles d'ordre supérieur	19
3.	Règles de dérivation des fonctions composées	20
4.	Équations aux dérivées partielles	21
5.	Différentielle d'une fonction de plusieurs variables	23
5.1	Retour sur le cas d'une variable	23
5.2	Cas des fonctions de plusieurs variables	25
6.	Utilisation de la différentielle	26
7.	Formes différentielles	26
8.	Plan tangent à une surface	31
9.	Lignes de champ	32
	Entraînez-vous	34
	Solutions	38

Chapitre 3	Opérateurs différentiels	62
1.	Champ gradient	62
2.	Dérivée directionnelle	65
3.	Divergence d'un champ de vecteurs	66
3.1	Interprétation physique de la divergence	66
3.2	Propriétés de la divergence	68
4.	Rotationnel d'un champ de vecteurs	68
5.	Champs de vecteurs conservatifs	70
6.	Champs solénoïdaux	73
7.	Analogie entre champs de vecteurs et formes différentielles	75
	Entraînez-vous	78
	Solutions	80
Chapitre 4	Systèmes de coordonnées curvilignes	87
1.	Cas du plan	87
2.	Cas de l'espace	89
2.1	Coordonnées cylindriques	90
2.2	Coordonnées sphériques	92
2.3	Retour au cas général	94
2.4	Déplacements élémentaires	98
3.	Expression des opérateurs ∇ , div et rot dans les coordonnées curvilignes	99
3.1	Gradient en coordonnées curvilignes	99
3.2	Divergence en coordonnées curvilignes	101
3.3	Rotationnel en coordonnées curvilignes	104
	Entraînez-vous	107
	Solutions	109
Partie 2		
Chapitre 5	Intégrale double d'une fonction à deux variables	123
1.	Rappel du cas des fonctions d'une variable	124
2.	Intégrale double sur un rectangle	125

3.	Intégrale double sur un domaine quelconque	127
4.	Propriétés des intégrales doubles	129
5.	Calcul des aires	130
6.	Calcul des volumes	131
7.	Utilisation des intégrales doubles en physique	134
7.1	Centres d'inertie	134
7.2	Propriétés des centres d'inertie	136
7.3	Moments d'inertie	136
7.4	Théorème de Huyghens-Steiner ou théorème des axes parallèles	139
8.	Changement de variables dans une intégrale double	140
8.1	Cas important des coordonnées polaires	141
8.2	Changement de variables en coordonnées polaires	144
	Entraînez-vous	148
	Solutions	152
Chapitre 6	Intégrale curviligne	178
1.	Rappels sur les courbes paramétrées	179
2.	Longueur d'un arc de courbe	180
3.	Abscisse curviligne	183
4.	Notion d'intégrale curviligne	184
4.1	Intégrale curviligne d'une fonction dans le plan	184
4.2	Courbes opposées ou inverses	186
5.	Utilisation des intégrales curvilignes des fonctions en physique	187
5.1	Centre d'inertie	187
5.2	Moments d'inertie	188
6.	Intégrale curviligne d'une forme différentielle dans le plan	190
7.	Intégrale curviligne d'un champ de vecteurs dans le plan	194
8.	Formule de Green ou de Green-Riemann	195
8.1	Cas des formes différentielles	195
8.2	Généralisation de la formule de Green	198
8.3	Cas des champs de vecteurs	199
9.	Intégrale curviligne dans l'espace	201
	Entraînez-vous	202
	Solutions	208

Chapitre 7	Intégrale triple d'une fonction à trois variables	237
1.	Intégrale triple sur un pavé	238
2.	Intégrale triple sur un domaine borné quelconque	240
3.	Calcul de l'intégrale triple sur un domaine découpé en piles	241
4.	Calcul de l'intégrale triple sur un domaine découpé en tranches	243
5.	Propriétés des intégrales triples	247
6.	Utilisation des intégrales triples en physique	248
6.1	Centre d'inertie	248
6.2	Moments d'inertie	250
6.3	Théorème de Huyghens-Steiner ou théorème des axes parallèles	253
7.	Changement de variables dans une intégrale triple	254
7.1	Cas général	254
7.2	Cas des coordonnées cylindriques	254
7.3	Cas des coordonnées sphériques	255
	Entraînez-vous	257
	Solutions	259
Chapitre 8	Intégrales de surface	278
1.	Surfaces paramétriques	279
1.1	Courbes coordonnées et vecteurs tangents	281
1.2	Reparamétrage (ou changement de paramètres) d'une surface	284
1.3	Surfaces de révolution	285
2.	Aire d'une surface paramétrée	290
3.	Intégrales de surface d'une fonction scalaire	295
4.	Utilisation des intégrales de surface des fonctions en physique	298
5.	Calcul des aires et volumes des surfaces et solides de révolution	300
5.1	Premier théorème de Guldin	300
5.2	Second théorème de Guldin	302
6.	Intégrales de surface d'un champ de vecteurs	303
7.	Formules d'intégration de l'analyse vectorielle	306
7.1	Formule de Green-Ostrogradsky	307
7.2	Formule de Stokes	309

8. Utilisation des formules d'intégration en physique	310
8.1 Théorème de Gauss	310
8.2 Équation de continuité	312
Entraînez-vous	313
Solutions	317
Annexes	350
1. Formulaire de trigonométrie	350
2. Formulaire de trigonométrie hyperbolique	351
3. Fonctions trigonométriques inverses	352
4. Fonctions hyperboliques inverses	353
5. Relations dans un triangle quelconque	353
6. Algèbre vectorielle	354
6.1 Vecteurs	354
6.2 Produit scalaire	355
6.3 Produit vectoriel	355
6.4 Produit mixte	356
7. Dérivation et intégration	357
Index	358

Avant-propos

Le présent ouvrage est issu d'un enseignement donné durant plusieurs années aux étudiants de Licence 2 de physique et de mathématiques de l'université d'Orléans.

Son thème est l'**analyse vectorielle**, le calcul différentiel et le calcul intégral pour les fonctions de plusieurs variables.

L'analyse vectorielle est utilisée de manière intensive dans plusieurs branches de la physique : électromagnétisme, gravitation, mécanique des fluides, etc.

Le livre est composé de deux grandes parties : la première est consacrée à l'extension de la dérivation et de la différentiation (vues en première année pour les fonctions d'une variable) aux fonctions de plusieurs variables et à leurs diverses applications : dérivées partielles, différentielles, formes différentielles, opérateurs différentiels, etc.

Dans la seconde partie, nous introduisons les notions d'intégrales : doubles et triples, curvilignes et intégrales de surface ainsi que les divers théorèmes reliant ces notions.

Chaque chapitre débute par un rappel complet et concis de chaque notion du cours que nous illustrons, autant que possible, à l'aide de plusieurs exemples.

Nous avons mis l'accent sur la résolution des exercices (près de 170) qui constitue, comme on le sait, le moyen le plus sûr pour maîtriser les divers aspects du cours.

La transformation d'un simple polycopié distribué chaque année à mes étudiants en un ouvrage digne de ce nom doit beaucoup à la pression amicale de mon collègue et ami Nawfal El Hage Hassan, qu'il en soit vivement remercié.

Champs scalaires et vectoriels

Introduction

Une des caractéristiques du monde physique qui nous entoure est le changement, changement dans l'espace et dans le temps. En physique on s'intéresse souvent aux propriétés qui varient dans l'espace, comme la température, la pression, le potentiel, etc. Toutes ces grandeurs scalaires constituent différentes manifestations de la notion de **champ scalaire**. Il existe également des grandeurs de nature vectorielle qui varient en grandeur et en direction, comme le champ électrique E , champ magnétique B , etc. Ce sont des **champs vectoriels**.

Ce chapitre fixe le cadre qui nous permettra d'introduire les divers outils nécessaires pour développer le calcul différentiel et ensuite le calcul intégral à plusieurs variables.

Objectifs

Connaître la notion de fonction vectorielle d'une variable et les objets géométriques qui leur sont attachés.

Connaître les notions de dérivée et intégrale d'une fonction vectorielle.

Maîtriser les règles de calcul concernant les dérivées des fonctions vectorielles.

Comprendre les notions de champ scalaire et de champ vectoriel.

Assimiler la notion de ligne ou de surface de niveau d'un champ scalaire.

Plan

- 1 Fonctions vectorielles d'une variable
- 2 Fonctions de plusieurs variables

1 Fonctions vectorielles d'une variable

DÉFINITION 1.1

Toute application $x : I \rightarrow E$ d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans un espace euclidien E (nous prendrons toujours pour E le plan $\mathbb{R}^2$ ou l'espace $\mathbb{R}^3$) est appelée une **fonction vectorielle d'une variable réelle** :

$$\begin{aligned} x : I &\rightarrow E \\ t &\mapsto x(t) \end{aligned}$$

Si $E = \mathbb{R}^n$ est rapporté à sa base canonique $B = (e_1, \dots, e_n)$, nous aurons

$$\mathbf{x}(t) = x_1(t) e_1 + \dots + x_n(t) e_n = (x_1(t), \dots, x_n(t))$$

où les $x_1, \dots, x_n$ sont des fonctions définies dans I et à **valeurs réelles**, appelées **composantes** de la fonction vectorielle $\mathbf{x}$ par rapport à la base B .

Géométriquement, l'image $\mathbf{x}(I) = \{\mathbf{x}(t) ; t \in I\}$ d'une fonction vectorielle $\mathbf{x}$ est une certaine courbe (paramétrée) $\mathcal{C}$ de l'espace E (une **courbe plane** si la dimension de E est égale à 2 ou ce qu'on appelle une **courbe gauche**, si la dimension de E est égale à 3) et la fonction $\mathbf{x}$ est appelée un **paramétrage** de la courbe¹ $\mathcal{C}$.

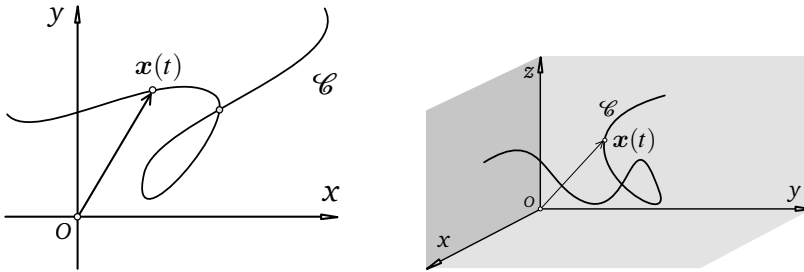


Figure 1.1

1.1 Dérivée d'une fonction vectorielle

DÉFINITION 1.2

On dit qu'une fonction vectorielle $\mathbf{x} : I \rightarrow E$ est **dérivable en un point** $t_0 \in I$, si le vecteur

$$\frac{\mathbf{x}(t_0 + h) - \mathbf{x}(t_0)}{h}$$

a une limite finie lorsque $h \rightarrow 0$; dans ce cas, la valeur de cette limite est notée $\mathbf{x}'(t_0)$ (ou $\frac{d\mathbf{x}}{dt}(t_0)$) et elle est appelée **vecteur dérivé** de $\mathbf{x}$ en t_0 .

Si la fonction vectorielle $\mathbf{x}$ est dérivable en tout point t_0 de I , on dira qu'elle est **dérivable dans I** et, dans ce cas, nous obtenons une nouvelle fonction vectorielle $\mathbf{x}' : I \rightarrow E$ appelée **dérivée** de $\mathbf{x}$ dans I .

1.2 Dérivées d'ordre supérieur d'une fonction vectorielle

On définit la dérivée seconde $\mathbf{x}''$ ou $\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}$ d'une fonction vectorielle $\mathbf{x}$ comme étant $(\mathbf{x}')'$ ou $\frac{d}{dt} \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt} \right)$ et, de façon générale, $\mathbf{x}^{(n)} = (\mathbf{x}^{(n-1)})'$ ou $\frac{d^n\mathbf{x}}{dt^n} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d^{n-1}\mathbf{x}}{dt^{n-1}} \right)$.

1. Il peut être utile de faire une distinction entre la courbe $\mathcal{C}$ et son paramétrage $\mathbf{x}$, comme en cinématique, où on distingue un **mouvement** de sa **trajectoire**.

Remarques

1. Si l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est rapporté à sa base canonique $(e_1, \dots, e_n)$, ce qui permet d'écrire :

$$\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$$

on peut vérifier sans difficulté que la fonction vectorielle $\mathbf{x} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ est dérivable dans I si, et seulement si, les n **fonctions scalaires** $x_1, \dots, x_n$ sont dérivables dans I et, dans ce cas, on aura, pour tout $t \in I$,

$$\mathbf{x}'(t) = (x'_1(t), \dots, x'_n(t))$$

2. Dans la définition de la dérivée d'une fonction vectorielle, la droite passant par le point $\mathbf{x}(t_0)$ et dirigée par le vecteur $\frac{\mathbf{x}(t_0 + h) - \mathbf{x}(t_0)}{h}$ a une position limite lorsque h tend vers 0, c'est la droite $\mathcal{T}$ passant par le point $\mathbf{x}(t_0)$ et dirigée par le vecteur $\mathbf{x}'(t_0)$, on l'appelle² **tangente à la courbe (associée à) $\mathbf{x}$ au point $\mathbf{x}(t_0)$** ; sa représentation paramétrique est donnée par :

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{x}(t_0) + t \mathbf{x}'(t_0) \quad (1.1)$$

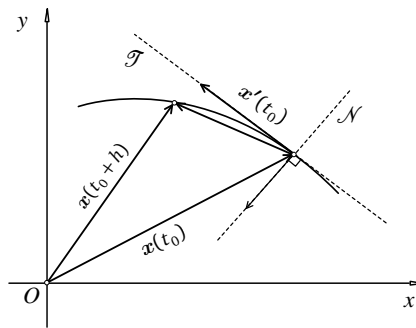


Figure 1.2 – Tangente à la courbe $\mathbf{x}$ au point $\mathbf{x}(t_0)$

Le vecteur $\mathbf{x}'(t_0)$ est appelé **vecteur tangent** à la courbe $t \mapsto \mathbf{x}(t)$ au point $\mathbf{x}(t_0)$.

En dimension 2, sous forme cartésienne, la relation (1.1), s'écrit, pour $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t))$:

$$(x - x_1(t_0)) x'_2(t_0) - (y - x_2(t_0)) x'_1(t_0) = 0 \quad (1.2)$$

3. La droite $\mathcal{N}$ perpendiculaire à la tangente à une courbe $t \mapsto \mathbf{x}(t)$ au point de tangence $\mathbf{x}(t_0)$ est appelée **normale** à la courbe, son équation paramétrique est donc

$$(x - x_1(t_0)) x'_1(t_0) + (y - x_2(t_0)) x'_2(t_0) = 0 \quad (1.3)$$

elle est dirigée par le vecteur $(-x'_2(t_0), x'_1(t_0))$.

2. On suppose, bien entendu, que $\mathbf{x}'(t_0) \neq 0$; si ce n'est pas le cas, on cherche le plus petit entier $p > 0$ pour lequel la dérivée $\mathbf{x}^{(p)}(t_0) \neq 0$ et, dans ce cas, la tangente sera dirigée par le vecteur $\mathbf{x}^{(p)}(t_0)$.

4. **Interprétation cinématique** : Si $\rho(t)$ est le **vecteur position** d'un mobile à l'instant t , le vecteur dérivé $\mathbf{v}(t) = \rho'(t)$ est le **vecteur vitesse instantanée** du mobile, alors que la dérivée seconde $\gamma(t) = \rho''(t) = \mathbf{v}'(t)$ est le **vecteur accélération**.

Proposition 1.1

Les dérivées des fonctions vectorielles possèdent les propriétés suivantes³ :

Si α est une constante et $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ des fonctions vectorielles, alors

1. $(\mathbf{x} + \alpha \mathbf{y})'(t) = \mathbf{x}'(t) + \alpha \mathbf{y}'(t)$.
2. Si $t \mapsto f(t)$ est une fonction réelle d'une variable réelle, alors
 $(f(t) \mathbf{x})'(t) = f'(t) \mathbf{x}(t) + f(t) \mathbf{x}'(t)$.
3. $(\mathbf{x}(t) \cdot \mathbf{y}(t))' = \mathbf{x}'(t) \cdot \mathbf{y}(t) + \mathbf{x}(t) \cdot \mathbf{y}'(t)$.

En particulier, si $\mathbf{x}(t)$ est un vecteur unitaire pour tout t (i.e. $\|\mathbf{x}(t)\| = 1$), alors $\mathbf{x}(t) \cdot \mathbf{x}'(t) = 0$.

4. Si $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ sont à valeurs dans $\mathbb{R}^3$, on a
 $(\mathbf{x}(t) \wedge \mathbf{y}(t))' = \mathbf{x}'(t) \wedge \mathbf{y}(t) + \mathbf{x}(t) \wedge \mathbf{y}'(t)$.

1.3 Intégrale d'une fonction vectorielle

DÉFINITION 1.3

Soient $\mathbf{x} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction vectorielle, a, b deux réels de I ; si l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est rapporté à sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $(x_1(t), \dots, x_n(t))$ sont les composantes de $\mathbf{x}(t)$ dans $\mathcal{B}$, on définit l'intégrale $\int_a^b \mathbf{x}(t) dt$ comme étant le vecteur de $\mathbb{R}^n$ de composantes $\left(\int_a^b x_1(t) dt, \dots, \int_a^b x_n(t) dt \right)$ ou

$$\int_a^b \mathbf{x}(t) dt = \left(\int_a^b x_1(t) dt \right) e_1 + \dots + \left(\int_a^b x_n(t) dt \right) e_n$$

Proposition 1.2

Si α est un réel et $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ des fonctions vectorielles, alors :

1. $\int_a^b (\mathbf{x}(t) + \alpha \mathbf{y}(t)) dt = \int_a^b \mathbf{x}(t) dt + \alpha \int_a^b \mathbf{y}(t) dt$;
2. Si $\mathbf{u}$ est un vecteur fixe (indépendant de la variable t) et si $\mathbf{x}$ est une fonction vectorielle, alors

$$\int_a^b \mathbf{u} \cdot \mathbf{x}(t) dt = \mathbf{u} \cdot \int_a^b \mathbf{x}(t) dt \quad \text{et} \quad \int_a^b \mathbf{u} \wedge \mathbf{x}(t) dt = \mathbf{u} \wedge \int_a^b \mathbf{x}(t) dt$$

3. Les deux symboles $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ et $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ représentent, respectivement, les produits scalaire et vectoriel des deux vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$.

2 Fonctions de plusieurs variables

2.1 Champs scalaires

Si $\mathcal{D}$ est une partie quelconque d'un espace euclidien E de dimension n , on appelle **champ scalaire** dans $\mathcal{D}$, une fonction f qui associe à tout point M de $\mathcal{D}$ un certain réel $f(M)$.

Dans la pratique, le point M est donné par ses coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ dans un certain repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, e_1, \dots, e_n)$ de E et, par abus de notations, on écrira $f(M) = f(x_1, \dots, x_n)$; ainsi, un champ scalaire sera simplement une fonction de n variables réelles; le plus souvent, nous prendrons $n = 2$ ou $n = 3$, ce qui nous donne des fonctions $f(x, y)$ (ou $f(x_1, x_2)$) à deux variables ou $f(x, y, z)$ (ou $f(x_1, x_2, x_3)$) à trois variables.

Remarque Pour éviter les ambiguïtés et pour que cette définition soit cohérente, nous supposons que $f(M)$ est indépendante du choix du repère orthonormé, ce qui signifie que si $\mathcal{R}' = (O', u_1, \dots, u_n)$ est un autre repère orthonormé de E et si $(x'_1, \dots, x'_n)$ sont les coordonnées de M dans $\mathcal{R}'$, alors si $f(M)$ est donnée par $g(x'_1, \dots, x'_n)$ pour une nouvelle fonction g , nous devons avoir $f(x_1, \dots, x_n) = g(x'_1, \dots, x'_n)$.

2.2 Champs vectoriels

Le terme de **champ de vecteurs** ou **champ vectoriel** f dans une partie $\mathcal{D}$ d'un espace euclidien E de dimension n , désigne une façon d'associer à tout vecteur pris dans $\mathcal{D}$ un vecteur dans E , autrement dit, c'est une application $f : \mathcal{D} \rightarrow E, x \mapsto f(x)$.

C'est donc un vecteur dont la longueur et la direction changent de point en point.

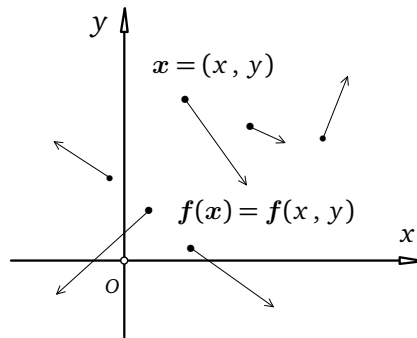


Figure 1.3 – Exemple d'un champ de vecteurs du plan

Dans la pratique, le vecteur x est donné par ses coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ dans un certain repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, e_1, \dots, e_n)$ de E et, par abus de notations, on écrira $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$.

De cette définition, il résulte que se donner un **champ de vecteurs** $\mathbf{f}$ dans une partie $\mathcal{D}$ de E , est équivalent à se donner n **champs scalaires** $f_1, f_2, \dots, f_n$ dans $\mathcal{D}$ tels que

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$$

où les f_j sont les composantes du vecteur $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ dans le repère $\mathcal{R}$.

Ainsi, un champ de vecteurs $\mathbf{f}$ du plan (resp. de l'espace) est de la forme $\mathbf{f}(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$ (resp. $\mathbf{f}(x, y, z) = (f(x, y, z), g(x, y, z), h(x, y, z))$) pour des champs scalaires f, g (et h).

Pour représenter graphiquement un champ de vecteurs plan $(x, y) \mapsto \mathbf{f}(x, y)$ (la même idée s'applique au cas tridimensionnel), on sélectionne quelques points (x, y) du plan et on dessine le vecteur $\mathbf{f}(x, y)$ issu de ce point ; il s'agit d'une tâche tout indiquée pour un ordinateur ; les programmes Scilab, Mathematica et Maple possèdent des commandes appropriées pour cela.

Remarque La remarque de la section (2.1) vaut également pour les champs de vecteurs.

Exemples

1. L'exemple le plus simple de champ vectoriel $\mathbf{f}$ du plan ou de l'espace est ce qu'on appelle un **champ uniforme**, il s'agit d'un champ de vecteurs qui a en tout point du plan ou de l'espace la même intensité, la même direction et le même sens, i.e. $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{V}$, pour un vecteur $\mathbf{V}$ fixe (ou indépendant de $\mathbf{x}$).

Par exemple, sur la surface terrestre, le champ de gravitation $\mathbf{g}$ est uniforme (voir figure 1.4).

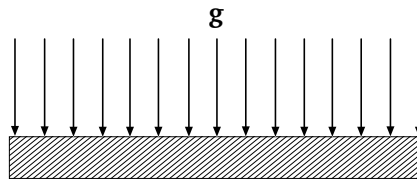


Figure 1.4 – Le champ de gravitation au voisinage de la surface terrestre

2. Nous avons de très nombreux exemples en physique : champ électrique $\mathbf{E}$, champ magnétique $\mathbf{B}$, champ des vitesses d'un solide ou fluide $\mathbf{V}$, champs de forces $\mathbf{F}$ (gravitation, etc.).

2.3 Graphe d'une fonction de plusieurs variables

DÉFINITION 1.4

Si $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de n variables, on appelle **graphe** de f , que l'on note Γ_f , le sous-ensemble de $\mathbb{R}^{n+1}$ défini par : $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in \mathcal{D}\}$. Cette définition généralise la notion de **graphe** (ou **courbe représentative**) d'une fonction à **une** variable $y = f(x)$.

Si $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction d'**une** variable x , son graphe Γ_f est donc

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in \mathcal{D}\}$$

De même, si $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de deux variables (x, y) , son graphe Γ_f est donc

$$\Gamma_f = \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in \mathcal{D}\}$$

qui représente une **surface** dans $\mathbb{R}^3$.

2.4 Surfaces de niveau d'un champ scalaire

DÉFINITION 1.5

Si $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction réelle à n variables, on appelle **surface de niveau** $c \in \mathbb{R}$, le sous-ensemble

$$N_c = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{D} \mid f(x) = c\}$$

Lorsque $n = 2$, on parle plutôt de **ligne de niveau** puisqu'il s'agit dans ce cas de courbes du plan $\mathbb{R}^2$.

Remarque Notons que la ligne de niveau N_c d'une fonction $f(x, y)$ (à deux variables) n'est autre que la projection sur le plan horizontal xOy de l'intersection $\Gamma_f \cap \{z = c\}$ du graphe Γ_f de la fonction f avec le plan horizontal d'équation $z = c$.

Exemples

1. Si $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est le champ scalaire défini par $f(x, y) = x^2 + y^2$, alors les lignes de niveau de f sont, en général, des cercles dans le plan :

$$N_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = x^2 + y^2 = c\}$$

Si $c > 0$, N_c est le cercle du plan centré à l'origine $O = (0, 0)$ et de rayon $R = \sqrt{c}$.

Si $c = 0$, la ligne de niveau $N_0 = \{(0, 0)\}$ est réduite à l'origine O .

Si $c < 0$, on a $N_c = \emptyset$.

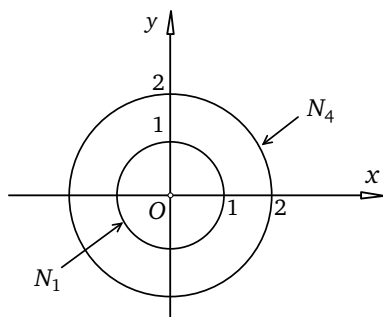


Figure 1.5 – Quelques lignes de niveau de $f(x, y) = x^2 + y^2$

2. Si f est un champ de températures (resp. de pressions), les lignes de niveau correspondantes sont appelées des **isothermes** (resp. **isobares**).
3. En cartographie, les lignes de niveau sont les courbes reliant des points ayant la même altitude.



1.1 Si $\mathbf{x}, \mathbf{y} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ sont des fonctions vectorielles dérivables, alors

1. $(\mathbf{x}(t) \cdot \mathbf{y}(t))' = \mathbf{x}'(t) \cdot \mathbf{y}(t) + \mathbf{x}(t) \cdot \mathbf{y}'(t)$.

En déduire que si $\mathbf{x}$ est une fonction vectorielle dérivable de norme (euclidienne) $\|\mathbf{x}(t)\|$ constante (i.e. indépendante de t), alors le vecteur $\mathbf{x}'(t)$ est orthogonal à $\mathbf{x}(t)$.

Montrer, d'une manière générale, que si $\mathbf{x}$ est quelconque et si $m(t) = \|\mathbf{x}(t)\|$, alors

$$\mathbf{x}(t) \cdot \mathbf{x}'(t) = m(t) m'(t)$$

2. $(\mathbf{x}(t) \wedge \mathbf{y}(t))' = \mathbf{x}'(t) \wedge \mathbf{y}(t) + \mathbf{x}(t) \wedge \mathbf{y}'(t)$.

1.2 Si $\mathbf{x} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ est une fonction vectorielle, calculer la dérivée $(\mathbf{x}(t) \cdot \mathbf{x}'(t) \wedge \mathbf{x}''(t))'$.

1.3 Si $\mathbf{u}$ est un vecteur fixe (i.e. ne dépendant pas de la variable t) et si $\mathbf{x} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ et $\mathbf{y} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ sont des fonctions vectorielles satisfaisant aux relations :

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{u} \wedge \mathbf{x}(t) \quad \text{et} \quad \mathbf{y}'(t) = \mathbf{u} \wedge \mathbf{y}(t)$$

montrer que $(\mathbf{x}(t) \wedge \mathbf{y}(t))' = \mathbf{u} \wedge (\mathbf{x}(t) \wedge \mathbf{y}(t))$.

1.4 Déterminer les équations des tangentes et normales aux courbes paramétriques suivantes aux points de paramètres donnés :

1. $\gamma(t) = \sin(2t)\mathbf{i} + \sin(3t)\mathbf{j}$, $t = \frac{\pi}{3}$, $t = \frac{\pi}{4}$, $t = \frac{\pi}{6}$;

2. $\gamma(t) = t^2\mathbf{i} + (t^3 - t)\mathbf{j}$ au point $D(1, 0)$.

1.5 On considère un mobile soumis à un champ de force central $\mathbf{F}$, i.e. $\mathbf{F} = \varphi(\|\rho\|)\rho$, pour une certaine fonction $\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ et $\rho(t)$ est le vecteur position du mobile.

Montrer que la trajectoire du mobile est plane.

1.6 Représenter dans le plan les deux sous-ensembles suivants :

1. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (a^2 - x^2)(b^2 - y^2) \geq 0\}$, avec $0 < a < b$,

2. $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - 2xy - 1 = 0\}$,

1.7 Donner le domaine de définition des champs scalaires suivants et représenter ces domaines dans le plan :

1. $f(x, y) = \ln(x - x^2 + xy)$;

2. $f(x, y) = \text{Arcsin}(xy)$.

1.8 Déterminer les lignes (ou surfaces) de niveau des champs scalaires suivants et les représenter graphiquement :

1. $f(x, y) = ax + by$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, avec $ab \neq 0$;

2. $f(x, y) = \frac{2x}{x^2 + y^2}$;

3. $f(x, y, z) = x + y + z$;

4. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$.

● Solutions



- 1.1** 1. Faisons la démonstration pour $\mathbf{x}, \mathbf{y} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ et notons par $(x_1(t), x_2(t))$ et $(y_1(t), y_2(t))$ leurs composantes dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, dont le produit scalaire est $\mathbf{x}(t) \cdot \mathbf{y}(t) = x_1(t)y_1(t) + x_2(t)y_2(t)$, d'où

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}(t) \cdot \mathbf{y}(t))' &= (x_1(t)y_1(t) + x_2(t)y_2(t))' \\ &= x_1'(t)y_1(t) + x_1(t)y_1'(t) + x_2'(t)y_2(t) + x_2(t)y_2'(t) \\ &= (x_1'(t)y_1(t) + x_2'(t)y_2(t)) + (x_1(t)y_1'(t) + x_2(t)y_2'(t)) \\ &= \mathbf{x}'(t) \cdot \mathbf{y}(t) + \mathbf{x}(t) \cdot \mathbf{y}'(t) \end{aligned}$$

En particulier, pour tout t , $\|\mathbf{x}(t)\|^2 = \mathbf{x}(t) \cdot \mathbf{x}(t)$ et comme $\|\mathbf{x}(t)\|$ est constant, il en est de même de son carré $\mathbf{x}(t) \cdot \mathbf{x}(t)$, donc $(\mathbf{x}(t) \cdot \mathbf{x}(t))' = 0$, mais

$$(\mathbf{x}(t) \cdot \mathbf{x}(t))' = \mathbf{x}'(t) \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{x}(t) \cdot \mathbf{x}'(t) = \mathbf{x}'(t) \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{x}'(t) \cdot \mathbf{x}(t) = 2 \mathbf{x}'(t) \cdot \mathbf{x}(t)$$

Ainsi, $\mathbf{x}'(t) \cdot \mathbf{x}(t) = 0$, i.e. le vecteur dérivé $\mathbf{x}'(t)$ est orthogonal à $\mathbf{x}(t)$.

Supposons, cette fois, que $m(t) = \|\mathbf{x}(t)\|$ n'est pas nécessairement constant, alors

$$\mathbf{x}(t) \cdot \mathbf{x}'(t) = (x_1(t), x_2(t)) \cdot (x_1'(t), x_2'(t)) = x_1(t)x_1'(t) + x_2(t)x_2'(t)$$

Par ailleurs, nous avons $m(t)^2 = \|\mathbf{x}(t)\|^2 = x_1^2(t) + x_2^2(t)$, d'où, par dérivation,

$$2 m(t) m'(t) = 2 x_1(t) x_1'(t) + 2 x_2(t) x_2'(t)$$

Donc, $m(t) m'(t) = x_1(t) x_1'(t) + x_2(t) x_2'(t) = \mathbf{x}(t) \cdot \mathbf{x}'(t)$.

L'extension de ce résultat à une fonction vectorielle $\mathbf{x}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ est immédiate.

- 2.** Notons par $(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ et $(y_1(t), y_2(t), y_3(t))$ les composantes respectives de $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$. Alors

$$\mathbf{x}(t) \wedge \mathbf{y}(t) = (x_2(t)y_3(t) - x_3(t)y_2(t), x_3(t)y_1(t) - x_1(t)y_3(t), x_1(t)y_2(t) - x_2(t)y_1(t))$$

D'où

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}(t) \wedge \mathbf{y}(t))' &= (x_2(t)y_3(t) - x_3(t)y_2(t), x_3(t)y_1(t) - x_1(t)y_3(t), x_1(t)y_2(t) \\ &\quad - x_2(t)y_1(t))' \\ &= (x_2'(t)y_3(t) + x_2(t)y_3'(t) - x_3'(t)y_2(t) - x_3(t)y_2'(t), \\ &\quad x_3'(t)y_1(t) + x_3(t)y_1'(t) - x_1'(t)y_3(t) - x_1(t)y_3'(t), \\ &\quad x_1'(t)y_2(t) + x_1(t)y_2'(t) - x_2'(t)y_1(t) - x_2(t)y_1'(t)) \\ &= (x_2'(t)y_3(t) - x_3'(t)y_2(t), x_3'(t)y_1(t) - x_1'(t)y_3(t), x_1'(t)y_2(t) \\ &\quad - x_2'(t)y_1(t)) \\ &\quad + (x_2(t)y_3'(t) - x_3(t)y_2'(t), x_3(t)y_1'(t) - x_1(t)y_3'(t), x_1(t)y_2'(t) \\ &\quad - x_2(t)y_1'(t)) \\ &= \mathbf{x}'(t) \wedge \mathbf{y}(t) + \mathbf{x}(t) \wedge \mathbf{y}'(t) \end{aligned}$$