

Jean Coirier
Carole Nadot-Martin

Mécanique des milieux continus

Cours et exercices corrigés

Préface de Liviu Solomon

Illustrations de Jean-Pierre Petit

4^e édition

DUNOD

CHEZ LE MÊME ÉDITEUR

- J. COIRIER, Mécanique des milieux continus, Aide-mémoire, Paris, Dunod, 2001

Illustration de couverture : © Primada -
Adobe Stock

© Dunod, 2013, 2020 pour la nouvelle présentation

© Dunod, 1997, 2001, 2007 pour les précédentes éditions

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff

www.dunod.com

EAN 978-2-10-81710-8

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Préface à la première édition

Parmi les sciences de la nature, la mécanique est la plus ancienne, car la plus simple. Les bâtisseurs de la tour de Babel, du phare d'Alexandrie, des pyramides, les navigateurs phéniciens, etc. ont eu à résoudre, souvent de façon empirique, des problèmes de mécanique. La physique, la chimie, la biologie ne sont venues que plus tard, avec des approches de plus en plus fines de la connaissance du monde matériel dans lequel nous sommes plongés et dont nous faisons nous-mêmes partie.

Avec la mécanique, l'humanité a commencé à pénétrer les mystères de la connaissance, à comprendre l'univers et à agir sur des fragments de celui-ci. La mécanique a été longtemps la seule à utiliser les moyens des mathématiques et a joué un rôle essentiel dans leur développement : Galilée, Newton, Euler, Lagrange, Cauchy ont développé l'outil mathématique, poussés par leurs recherches en tant que mécaniciens. Cela se passait à une époque où l'on ne savait encore rien de l'électromagnétisme, du tableau périodique des éléments, des microbes : Maxwell, Mendeleïeff, Pasteur n'étaient pas encore nés.

À partir de Galilée, on a assisté pendant trois siècles à une extraordinaire floraison des différentes branches de la mécanique : systèmes de points matériels, systèmes rigides, corps solides, liquides, gaz, mélanges, etc. La technique moderne, la science que l'on pratique, la vie que nous menons seraient inconcevables sans ces trois siècles de recherche en théorie des mécanismes, en élasticité, en mécanique des fluides. Le tableau a changé, me semble-t-il, après 1950 : les « disciplines de branche » continuent leur progrès, mais en même temps, il se forme une véritable « mécanique générale », visant à décrire tout ce que le mécanicien peut dire du mouvement de tout corps relevant de sa compétence.

Le livre du professeur Jean Coirier que j'ai l'honneur et le grand plaisir de présenter ici, est un livre de mécanique « générale » des milieux continus. Dans quelle mesure est-ce une nouveauté ?

Des ouvrages avec un titre semblable sont régulièrement publiés un peu partout, depuis les USA jusqu'en Nouvelle Zélande... Regardons leurs tables des matières, feuilletons-les. Nous trouverons très souvent des textes qui débutent par une partie de « généralités » sur les milieux continus, suivie de chapitres portant fréquemment sur la mécanique des fluides et sur l'élasticité. C'est un choix possible, et cela peut rendre service.

Le livre que vous avez entre les mains en diffère profondément. Ce n'est pas une succession de chapitres venant de disciplines diverses ; ici, on apprendra bel et bien la mécanique « générale » des milieux continus. Sa structure est dictée par un souci d'économie et de minimalité : on introduit à chaque étape ce qui est nécessaire, et on l'examine jusqu'à ses conséquences ultimes.

L'étude débute par le mouvement d'un milieu continu : on « identifie » les « particules », on répond aux questions : « qui est qui ? » et « qui est où ? ». Viennent ensuite les déformations, puis la cinématique du milieu continu. Ce n'est qu'après qu'intervient la masse : le milieu est en mouvement et ses particules sont porteuses de matière. Suit la théorie des contraintes (il faut « agir » sur le milieu pour le faire passer d'une configuration à une autre). Les équations de bilan sont la clé de voûte de la logique du livre : c'est de là que vont venir les équations à résoudre, ce qui sera l'affaire du mathématicien, du numéricien, du programmeur ; on ne s'en occupe pas ici, cela n'appartient pas au sujet.

La thermodynamique, avec les concepts et les bilans d'énergie et d'entropie, se chargera d'englober le tout dans une construction unitaire (construction qui, avec concision et élégance, va inclure aussi l'étude des discontinuités).

Mais où sont donc passées la mécanique des fluides, l'élasticité, la plasticité ? Il n'y en a pas et c'est très bien ainsi : nous sommes toujours en mécanique des milieux continus « quelconques ». Ce n'est qu'à la fin de l'ouvrage que ces milieux seront dotés de lois de comportement, faisant la différence entre un solide rigide, un solide élastoplastique, un liquide, un gaz, etc. Ces lois ne sont pas introduites de manière arbitraire, ce sont des conséquences des principes de la thermodynamique précédemment examinés. Les milieux hyperélastiques, les fluides stokésiens, se ramènent à des cas particuliers intéressants, et c'est dans cet esprit-là qu'ils sont examinés. La thermodynamique n'est pas un chapitre parmi d'autres, c'est elle qui organise cette mécanique « générale » en un ensemble cohérent.

Ce livre est le fruit d'un long travail de recherche et d'enseignement de l'auteur. Son contenu a été « essayé » sur de nombreuses promotions d'élèves de l'ENSMA (École nationale supérieure de mécanique et d'aérotechnique) de Poitiers, adapté année après année, enrichi de tout ce que la pratique de l'enseignement peut apporter : qui mieux qu'un enseignant pourrait savoir comment assurer l'enchaînement logique des parties, quelles sont les interrogations possibles de l'étudiant, les questions cruciales, les points délicats, les sujets à approfondir ? Le lecteur reçoit ici « un produit fini » et soigneusement testé.

Sur toute l'étendue de l'ouvrage, le lecteur aura compris, aura appris à manipuler les concepts généraux, les mécanismes sous-jacents à l'étude de n'importe lequel des milieux continus matériels mobiles que l'on pourrait imaginer. Il aura compris l'ordre logique des choses, aucun concept n'étant introduit avant que cela ne devienne inévitable - et chaque concept étant exploité jusqu'au bout.

L'appareil mathématique mis en œuvre est aussi économique que le sujet le permet. Puisque nous avons affaire à des milieux tridimensionnels, tout repose sur l'utilisation de champs de vecteurs fonctions du point et du temps, d'applications définies sur de tels champs (d'où nécessairement l'apparition des tenseurs) et d'opérations de dérivation et d'intégration mettant en jeu des champs de vecteurs et de tenseurs. Les concepts

sont expliqués au fil du texte et analysés en détail dans les annexes finales. C'est un appareil mathématique pas trop encombrant, et le lecteur n'aura pas de difficulté à l'assimiler.

L'auteur propose au lecteur de vérifier la bonne compréhension du texte à l'aide d'un choix d'exercices, présentés avec leurs corrigés.

Le livre est écrit dans un style agréable, clair et précis, et avec un humour auquel les ouvrages de mathématiques et de mécanique ne semblent pas avoir souvent recours... Il ne s'agit pas de suggérer que « la mécanique est un jeu » – elle n'en est pas un. Mais l'auteur nous montre que l'exposé de questions hautement sérieuses peut se faire sur un ton amical et agréable, un ton qui nous permet de sourire de temps à autre – au milieu d'un raisonnement qui reste, évidemment, technique et rigoureux. Les dessins à nuance humoristique qui apparaissent ici et là participent de ce même esprit.

Il n'y a pas de « voie royale » en mathématiques, en mécanique du continu non plus. Le livre a demandé un travail considérable à son auteur ; le lecteur devra fournir sa part d'effort. C'est un ouvrage parfaitement articulé, où tout est bien expliqué, en détail, exemples à l'appui. Mais c'est un texte à travailler, non à parcourir. La récompense est au bout du chemin : le lecteur sera en mesure d'aborder la littérature de recherche contemporaine, en mesure d'essayer d'y participer.

C'est un outil de travail, accessible à tout étudiant-ingénieur, à tout étudiant d'un master en mécanique. Il sera très utile aux enseignants de mécanique et des sciences de l'ingénieur : il les incitera à construire des enseignements nouveaux, « à jour ».

On ne peut pas prévoir à quoi ressemblera la mécanique des milieux continus dans un quart de siècle. Mais je suis convaincu que l'ouvrage du professeur Jean Coirier gardera toute son actualité et sa fraîcheur pendant au moins dix ou quinze ans.

Plongez-vous dans ce livre, papier et crayon à la main. Au fil de la lecture, vous découvrirez des terres nouvelles. Cet ouvrage vaut vraiment le voyage.

Liviu Solomon,

Maître de Conférences à l'université de Bucarest (de 1953 à 1971)
et Professeur à l'université de Poitiers (de 1971 à 1992).

À mes parents,

*À Monsieur le Professeur Claude Mathurin
qui m'a montré que la science pouvait être
à la fois utile et belle*

Avant-propos

Vous le savez, la mécanique est partout. Elle régit aussi bien les mouvements des galaxies que ceux des particules élémentaires. Et la mécanique des milieux dits « continus », objet de cet ouvrage, occupe sa juste place dans son domaine qui est celui de « l'échelle humaine », loin de l'infiniment petit et de l'infiniment grand. Voilà qui en fait une science a priori utile et séduisante. Et pourtant combien de livres la concernant qui sont refermés à peine entrouverts. C'est qu'elle se défend bien, la canaille, dressant son barrage d'équations devant qui veut forcer sa porte sans avoir acquis au préalable une solide culture mathématique.

« Que d'équations, que d'équations ! », pourrait-on dire en parodiant Mac-Mahon. Il y en a en effet pour tous les goûts (ou tous les dégoûts) : des petites, des moyennes et des grandes, des scalaires, des vectorielles et des tensorielles, des fondamentales et certaines dont on murmure qu'elles le seraient moins. Il n'y a qu'à se baisser pour en ramasser, mais l'inquiétant, c'est que certains ne s'en relèvent pas.

C'est pour ceux-là – et pour les autres – que ce livre a été écrit, sorte de guide à usage personnel pour se frayer un chemin dans la jungle des équations, se sentir bien dans sa peau d'étudiant en mécanique et – il n'y a pas de honte à cela – réussir ses examens.

Ce n'est en effet que lorsque l'outil est maîtrisé qu'on peut s'en servir. En mécanique, les équations ne sont pas une fin en soi, mais le fameux « sens physique », si indispensable et si fécond soit-il, risque de ne pouvoir donner sa pleine mesure s'il ne peut s'exprimer libre de toute entrave mathématique.

Le mot d'ordre de cet ouvrage voudrait être : « Démythifions ». Car s'il est des mythes utiles, il en est aussi de paralysants et c'est à ceux-là que ce livre veut faire la chasse.

Non, les tenseurs ne sont pas ces monstres, à la tête surmontée de deux barres, chargés d'interdire l'accès de la grotte de la connaissance à qui n'a pas fait (ou ne fera pas) Polytechnique. Non, les équations fondamentales de la mécanique ne sont pas aussi nombreuses que les déesses de l'Olympe. On n'en compte que cinq et elles ont entre elles un petit air de famille qui vous les rend moins farouches. Non, ces lutins farceurs que sont les dérivées particulières, les gradients, les divergences, les rotationnels... ne sont pas là pour vous compliquer l'existence, mais au contraire pour vous guider sur le chemin.

Pour vous en convaincre, nous allons prendre notre temps, ne pas craindre la répétition, essayer de détailler même ce qui peut paraître « évident » en nous fondant sur une expérience d'enseignement. Beaucoup de développements ou de commentaires qu'un lecteur averti pourra considérer comme superflus sont en fait issus de questions maintes fois posées par des étudiants lors de séances dites « de mise à niveau » au cours desquelles les masques tombent plus aisément.

Nommer, c'est commencer à connaître. Pour apprivoiser une formule, un moyen efficace est de pouvoir appeler chacun de ses termes par son nom. Nous avons essayé de mettre l'accent sur la dénomination précise des grandeurs introduites. Celui qui fait la distinction entre un taux de dilatation volumique et une dilatation volumique est déjà dans la bonne direction.

L'essentiel de notre propos est de traiter les lois et notions fondamentales valables pour un milieu continu avant qu'on n'écrive ses lois de comportement, en particulier avant qu'on ne précise s'il s'agit d'un solide ou d'un fluide.

Au chapitre 1, nous présentons donc le héros de la pièce : le milieu continu, ainsi que les deux façons les plus classiques de décrire son mouvement.

Les déformations que subit un tel milieu, entre un état dit « initial » et un état actuel qualifié de « final », font l'objet du chapitre 2.

Au chapitre 3, on s'intéresse non plus à la comparaison entre le départ et l'arrivée mais aux vitesses avec lesquelles les principales grandeurs mécaniques évoluent à chaque instant du parcours.

La masse s'introduit au chapitre 4, accompagnée de son inévitable axiome de conservation.

Le terrain est alors préparé pour l'arrivée solennelle au chapitre 5 de la loi fondamentale de la mécanique; c'est alors qu'apparaît la notion de contrainte.

Au chapitre 6, nous faisons une petite pause pour insister sur la structure commune dite « équation de bilan » qui caractérise aussi bien les lois mécaniques déjà présentées que les lois thermodynamiques à venir.

Le chapitre 7 nous fait entrer dans le monde de la thermodynamique vu au travers des lunettes du mécanicien. On y retrouve le premier et le second principes sous les formes respectives des lois de bilan d'énergie et d'entropie. A la fin de ce chapitre, un regard en arrière nous montre que, dans notre enthousiasme, nous avons introduit depuis le début de notre quête plus d'inconnues (beaucoup plus !) que d'équations. Cela n'a rien de surprenant. Il fallait bien s'attendre à devoir préciser, à un moment ou à un autre, la nature du milieu étudié c'est-à-dire à écrire des lois dites « de comportement », sujet qui sera abordé à la fin de l'ouvrage (chapitre 9).

Afin de permettre la prise en compte de phénomènes conduisant à de fortes variations des grandeurs mécaniques ou thermodynamiques sur des distances très petites (surfaces de contact, ondes de choc), il est possible de s'affranchir des hypothèses de stricte continuité faites jusqu'à présent. Le chapitre 8 présente ainsi, pour chaque loi de bilan, une relation appelée « équation aux discontinuités ».

Enfin, comme annoncé précédemment, le chapitre 9 présente quelques notions générales portant sur les lois de comportement et jette ainsi un pont ouvrant la voie vers la mécanique des solides déformables et la mécanique des fluides.

À la fin de chaque chapitre, on trouvera des exercices corrigés, de longueur variable, permettant de passer en revue de nombreux points du cours. Ils sont précédés d'un tableau récapitulatif donnant les formules jugées essentielles.

On trouvera à la fin du livre une bibliographie, une liste des notations utilisées (avec les dimensions et les unités S.I. correspondantes) et un index alphabétique détaillé.

L'espoir de l'auteur est que, lorsque les concepts de base de la mécanique des milieux continus auront été assimilés, la voie soit libre pour une étude paisible des livres de mécanique des solides et de mécanique des fluides. Alors pourront être traitées en profondeur des applications classiques ou appartenant encore au domaine de la recherche.

Mes premiers remerciements vont à ceux qui m'ont initié à la mécanique des milieux continus, soit par voie directe : MM. Claude Mathurin, Jean-Laurent Peube, Liviu Solomon..., soit par l'entremise de leurs ouvrages : MM. Paul Germain, Cemal Eringen, Jean Salençon, Clifford Truesdell... Parmi ces derniers, je distinguerai Paul Germain dont les œuvres ont marqué toute une génération d'enseignants et de chercheurs en mécanique. Le présent livre lui doit évidemment beaucoup.

M. Liviu Solomon a bien voulu préfacer cet ouvrage. Je l'en remercie du fond du cœur. Je lui sais gré également de m'avoir encouragé et prodigué ses conseils dès l'origine du projet de rédaction. Tous les mécaniciens de l'université de Poitiers – et bien d'autres – ont pu apprécier pendant de nombreuses années sa vaste culture (qui déborde largement le cadre de la mécanique) et sa disponibilité constante pour la communiquer par des ouvrages, des polycopiés et des séminaires.

La tâche de relecteur est des plus ingrates et des plus désintéressées. Je remercie tout particulièrement M. Paul-Emile Lemonnier qui a distrait une partie de sa retraite horticole pour éprouver, avec une minutie de bénédictin, la totalité du manuscrit. Je lui suis redevable de son amitié et de nombreuses remarques argumentées qui auraient mérité en elles-mêmes une publication.

M. André Dragon n'a pas compté, lui non plus, ses heures pour me permettre de profiter de sa culture de mécanicien des solides. Qu'il soit remercié pour sa compétence aiguë et son amitié à des moments difficiles du parcours.

Je remercie également les collègues qui se sont compromis dans la relecture et la critique de tel ou tel chapitre : MM. Lionel Buthaud, Alain Cimetière, Claude Do, Denys Gamby, Frédéric Pons, Alain Renaud, Jean-Pierre Romain et René Souchet. Je ne veux pas oublier non plus ceux qui m'ont consacré de leur temps pour une discussion ou une mise au point autour d'un point particulier. Mme Renée Gatignol, MM. Pascal Ardonneau, Philippe Deystuynder, Paul Germain, Alain Neme, Paul Rougée, Claude Vallée se reconnaîtront.

Comme l'habitude de publier des manuscrits s'est perdue dans la communauté scientifique, il a fallu, pour la première édition, transformer le mien en PC-Script. Cette transformation s'est opérée grâce à l'énergie opiniâtre de Mmes Jocelyne Bardeau et Françoise Tournier qui ont pris pour cela sur leur temps libre. Qu'elles soient remerciées pour leur patience infinie et pour avoir su mettre leurs compétences au diapason du travail demandé, guidées en cela par Mmes Anne Bourguignon et Joëlle Declercq des éditions Dunod.

Table des matières

PRÉFACE	V
AVANT-PROPOS	IX
CHAPITRE 1 • DESCRIPTIONS DU MOUVEMENT D'UN MILIEU CONTINU	1
1.1 Solides, fluides	1
1.2 Milieu continu	4
1.3 La théorie cinétique des gaz	6
1.4 Mouvement d'un système matériel	8
1.5 Description lagrangienne du mouvement	13
1.6 Description eulérienne du mouvement	21
Principales formules	30
EXERCICES	32
CHAPITRE 2 • DÉFORMATIONS	39
2.1 Notion intuitive de déformation	40
2.2 Gradient de la transformation	41
2.3 Transport convectif	49
2.4 Dilatations	53
2.5 Déformations	60
2.6 Déplacements	65
2.7 Décomposition du déplacement	67
2.8 Cas d'un mouvement rigidifiant	79
2.9 Déformations en petites transformations	81
2.10 États de déformation particuliers	91
2.11 Conditions de compatibilité	95
Principales formules	100
EXERCICES	102
CHAPITRE 3 • CINÉMATIQUE	108
3.1 Notion de dérivée particulaire	109
3.2 Dérivée particulaire d'une fonction de point	109

3.3	Dérivées particulières d'un vecteur, d'un vecteur-aire, d'un volume élémentaires	115
3.4	Dérivées particulières d'intégrales : circulation, flux, intégrale de volume	120
3.5	Mouvement isochore	130
3.6	Dérivation selon un champ de vitesses quelconque	134
3.7	Taux de déformation, taux de rotation	136
	Principales formules	147
	EXERCICES	150
CHAPITRE 4 • CONSERVATION DE LA MASSE		155
4.1	Conservation de la masse	155
4.2	Conservation de la masse en description eulérienne	157
4.3	Conservation de la masse en description lagrangienne	161
4.4	Cas d'un mouvement isochore	164
4.5	Application au calcul de certaines dérivées particulières	165
4.6	Cas d'un mouvement interne	168
4.7	Fonction de courant pour certains mouvements permanents	170
	Principales formules	172
	EXERCICES	174
CHAPITRE 5 • BILAN DE QUANTITÉ DE MOUVEMENT. CONTRAINTES		177
5.1	Efforts exercés sur une partie d'un système matériel	178
5.2	Torseur cinétique et torseur dynamique	181
5.3	Loi fondamentale de la dynamique	183
5.4	Existence du tenseur des contraintes de Cauchy	186
5.5	Retour sur la loi fondamentale de la dynamique	189
5.6	Conditions aux limites naturelles	194
5.7	Étude du tenseur des contraintes de Cauchy	195
5.8	Cercles de Mohr	200
5.9	Quelques états de contraintes particuliers	205
5.10	Contraintes en description lagrangienne	209
5.11	Efforts intérieurs. Théorème de l'énergie cinétique	213
5.12	Principe des puissances virtuelles	220
	Principales formules	225
	EXERCICES	228
CHAPITRE 6 • ÉQUATIONS DE BILAN		240
6.1	Flux convectif	242

6.2	Équation de bilan pour un domaine matériel (description eulérienne)	244
6.3	Équation de bilan pour un domaine animé d'un mouvement propre	250
6.4	Équation de bilan pour un domaine fixe	253
6.5	Forme locale d'une équation de bilan	255
6.6	Conditions aux limites naturelles	258
6.7	Équation de bilan en description lagrangienne	261
6.8	Tableau des correspondances	263
	Principales formules	264
CHAPITRE 7 • BILANS D'ÉNERGIE ET D'ENTROPIE		266
7.1	Bilan d'énergie (premier principe de la thermodynamique)	267
7.2	Bilan d'énergie interne	276
7.3	Énergie de déformation	279
7.4	Bilan d'énergie interne en description lagrangienne	286
7.5	Bilan d'entropie (second principe de la thermodynamique)	287
7.6	Bilan des lois de bilan	298
	Principales formules	300
	EXERCICES	302
CHAPITRE 8 • ÉQUATION AUX DISCONTINUITÉS ASSOCIÉE À UNE LOI DE BILAN		305
8.1	Domaine matériel traversé par une surface de discontinuité	307
8.2	Dérivée particulaire d'une intégrale de volume	309
8.3	Équation aux discontinuités associée à une loi de bilan	311
8.4	Application à la loi de conservation de la masse	314
8.5	Application à la loi de bilan de quantité de mouvement	316
8.6	Application à la loi de bilan d'énergie	318
8.7	Équation de Rankine-Hugoniot	322
8.8	Application au bilan d'entropie	322
8.9	Équation aux discontinuités en description lagrangienne	323
	Principales formules	327
	EXERCICE	328
CHAPITRE 9 • LOIS DE COMPORTEMENT		330
9.1	Généralités sur les lois de comportement	331
9.2	Variables d'état	338
9.3	Potentiel thermodynamique et lois d'état	340
9.4	Dissipation et lois complémentaires	351
9.5	Bilan	361

9.6 Milieux hyperélastiques	364
9.7 Fluides divariants	373
ANNEXE	386
EXERCICES	390
ANNEXE A • ALGÈBRE TENSORIELLE	402
A.1 Espaces	403
A.2 Convention de l'indice muet	404
A.3 Tenseurs	405
A.4 Produit tensoriel	413
A.5 Contraction d'un tenseur	417
A.6 Produit contracté	418
A.7 Tenseur d'orientation	424
A.8 Formulaire d'algèbre tensorielle	430
EXERCICES	432
ANNEXE B • ANALYSE TENSORIELLE	435
B.1 Gradient	436
B.2 Divergence	438
B.3 Laplacien	440
B.4 Rotationnel	441
B.5 Transformations d'intégrales	443
B.6 Formulaire d'analyse tensorielle	446
EXERCICES	450
ANNEXE C • OPÉRATEURS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES EN COORDONNÉES CURVILIGNES ORTHOGONALES	452
C.1 Système de coordonnées curvilignes orthogonales	452
C.2 Coordonnées cartésiennes	458
C.3 Coordonnées cylindriques	460
C.4 Coordonnées sphériques	462
BIBLIOGRAPHIE	465
NOTATIONS, DIMENSIONS, UNITÉS	471
INDEX	481

Chapitre 1

Descriptions du mouvement d'un milieu continu



1.1 SOLIDES, FLUIDES

1.1.1 Notions « intuitives »

Les milieux matériels dont nous souhaitons étudier les mouvements sont communément appelés « solides » et « fluides ». Ces deux notions, comme beaucoup de notions premières, ne sont pas si simples à définir. Le problème se complique encore lorsqu'on souhaite, comme tout un chacun, distinguer les liquides et les gaz à l'intérieur de la famille des fluides.

Une enquête au micro-cravate dans une rue piétonne d'une bonne ville française témoignerait sans nul doute de la perplexité de nos concitoyens sur ces sujets. Plus facile à réaliser est la consultation d'un dictionnaire. Ouvrons le Petit Robert [63] et regardons d'abord, parmi les définitions, celles relatives à l'usage courant :

Fluide : « Qui n'est ni solide, ni épais, qui coule aisément ». Mais l'huile par exemple, c'est épais ou non ? Allons voir à « solide ».

Solide : « Qui a de la consistance, qui n'est pas liquide, tout en pouvant être plus ou moins mou ». Qui n'est pas liquide, avez-vous dit ? Feuilletons jusqu'à « liquide ».

Liquide : « Tout corps qui coule ou tend à couler ». Peut-on dire que le sable sec qui coule entre les doigts est un liquide ?

Comme on le voit, la frontière est bien floue entre un corps « plus ou moins mou » et un corps qui « tend à couler ». Les choses deviennent plus sérieuses avec les définitions scientifiques qui suivent les précédentes dans le même dictionnaire.

Fluide : « Tout corps qui se laisse déformer sous l'action de forces minimales ; tout corps qui épouse la forme de son contenant ».

Solide : « Se dit d'un corps dans lequel les molécules sont très rapprochées les unes des autres et vibrent avec une très faible amplitude autour de leur position d'équilibre ; qui a de la cohésion, garde une forme relativement constante lorsqu'il n'est pas soumis à des forces extérieures ».

Liquide : « Tout corps à l'état fluide, pratiquement incompressible et formé de corpuscules (ions ou molécules) soumis à de faibles attractions ».

Sur notre lancée, regardons à « gaz » :

Gaz : « Tout corps qui se présente à l'état de fluide expansible et compressible (état gazeux) dans les conditions de température et de pression normales ».

On voit déjà se dégager quelques pistes :

- celles liées à la forme tout d'abord ; un solide a une forme propre susceptible de changer certes, mais on le reconnaît ; un fluide, quant à lui, a moins de caractère et prend la forme du récipient qui le contient ;
- celles liées aux forces à exercer pour déformer le milieu ; pour les fluides, elles sont faibles devant celles nécessaires à la déformation d'un solide ; en particulier un fluide ne peut rester insensible à une caresse tangentielle ;
- celles liées à la compressibilité ; dans la famille des fluides, les liquides semblent réfractaires à la compression, ce qui n'est pas le cas des gaz.

On progresse, mais on est encore loin du but. Les frontières ne sont toujours pas nettement marquées. Tout peintre amateur (ou professionnel) a pu constater par exemple que certaines peintures ont un comportement de solide si on les laisse reposer un certain temps. Mais une agitation énergique redonne à une peinture solidifiée son aspect liquide, ce qui permet de passer la deuxième couche. Alors une telle peinture, solide ou liquide ?

Il est grand temps d'aller chercher notre microscope et d'aller voir d'un peu plus près ce qui se passe.

1.1.2 Aspects microscopiques

C'est l'étude de la structure moléculaire d'un solide, d'un liquide ou d'un gaz qui va nous permettre d'aller un peu plus loin dans nos investigations.

Observons la taille du personnage central : la molécule. Pour le moment nous ignorons les francs-tireurs que peuvent être les ions ou les électrons libres. La taille d'une molécule varie évidemment avec le milieu considéré. Disons qu'elle est de l'ordre de 10^{-10} m, c'est-à-dire d'un angström : 1 Å, soit un dix millièmes de micron (10^{-4} µm). Si on assimile une molécule à une sphère, on peut lui attribuer par exemple, pour de l'air, un diamètre $\delta = 3,7$ Å.

Considérons un gaz appelé communément gaz parfait ou idéal. De quel volume dispose notre molécule pour évoluer dans un tel gaz ? On sait que 22,4 litres contiennent, dans des conditions normales de température et de pression (273 K, 1 atmosphère) $6,023 \times 10^{23}$ molécules (nombre d'Avogadro).

L'espace vital de chaque molécule est donc en moyenne de : $\frac{22,4 \times 10^{-3}}{6,023 \times 10^{23}} \text{ m}^3$,

soit $3,7 \times 10^{-26} \text{ m}^3$, c'est-à-dire environ 1 400 fois le volume de la particule elle-même. Le moins qu'on puisse dire est qu'elle est à son aise. Et pourtant, elle partage un espace de 1 cm^3 avec $2,69 \times 10^{19}$ (moins une) de ses compagnes.

La matière est donc loin de remplir tout l'espace qu'elle semble occuper. Cette relative discrétion est encore aggravée par le fait que la masse d'une molécule est elle-même principalement concentrée dans les noyaux des atomes.

Regardons maintenant les forces s'exerçant entre molécules. Il s'agit là de phénomènes fort complexes. Il ne faut jamais perdre de vue que l'approche moléculaire n'est qu'une modélisation tendant à rendre compte de quelques aspects de la « réalité ». Ce qui va suivre ne constitue donc qu'une approche relativement grossière.

Toujours dans le cadre de cette schématisation, on considère que chaque molécule est sphérique et que, pour un même corps, elles sont toutes identiques.

En général deux molécules s'attirent, sauf si la distance d séparant les centres de ces molécules est de l'ordre de grandeur de leur diamètre δ . Alors dans un réflexe bien compréhensible de défense de leur intégrité, elles développent une force répulsive. Si d est grand devant δ (de 10 à 100 Å par exemple), les actions mutuelles sont d'attraction faible, d'intensité variant comme d^{-7} , puis d^{-3} si d augmente. À une distance d_0 de l'ordre de 3 à 4 Å, les molécules sont en position d'équilibre stable l'une par rapport à l'autre.

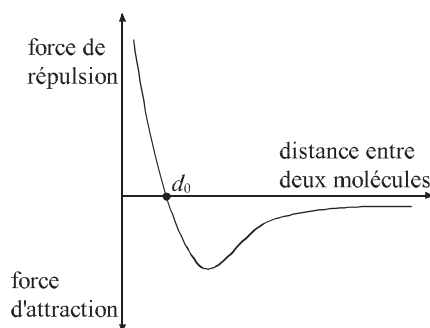


Figure 1.1 Force de répulsion ou d'attraction entre deux molécules.

Ces considérations (très schématiques, rappelons-le) sont résumées sur la figure 1.1 qu'on peut trouver par exemple dans la référence [37] page 3.

Revenons maintenant à nos solides, liquides et gaz. On a vu que, dans un gaz parfait aux conditions normales, les molécules disposaient pour se mouvoir d'un volume grand devant δ^3 . Les forces d'attraction entre molécules sont donc faibles, sauf si deux d'entre elles se rapprochent l'une de l'autre. Chaque molécule a ainsi une certaine liberté d'explorer le monde. Un gaz tend à occuper tout le volume qui lui est offert.

Dans un solide ou un liquide au contraire, les molécules sont aussi rapprochées que les forces de répulsion le permettent ; d est de l'ordre de δ . La cohésion du milieu est donc très forte. On conçoit qu'alors le milieu oppose une résistance à la compression ou à l'extension.

Pour un solide, la disposition des molécules les unes par rapport aux autres est quasiment permanente. La structure d'ensemble peut être considérée comme fixe tant que la température n'approche pas la température de fusion. Chaque molécule est donc contrainte de rester dans son village d'origine. Pour se dégourdir les jambes, elle ne peut qu'effectuer des oscillations de faible amplitude (agitation thermique).

Les molécules d'un liquide ont une liberté de mouvement qu'on pourrait qualifier d'intermédiaire entre celle des molécules d'un solide et celle des molécules d'un gaz. Certaines peuvent passer d'un groupe à un autre. L'arrangement moléculaire se modifie sans cesse.

1.2 MILIEU CONTINU

Il ressort de ce qui précède que les propriétés d'un milieu, qu'il soit solide ou fluide, ne sont pas uniformément distribuées. La distribution apparaît d'autant moins uniforme que l'échelle d'examen est plus petite.

La mécanique dite « des milieux continus » s'intéresse au comportement de la matière à une échelle grande devant les distances inter-moléculaires, si bien que la structure moléculaire pourra ne pas être prise en compte de façon explicite.

D'où l'hypothèse du milieu continu : un milieu « continu » est un milieu dont le comportement macroscopique peut être schématisé en supposant la matière répartie sur tout le domaine qu'il occupe, et non, comme dans la « réalité », concentrée dans une partie de volume très petite.

Les quantités introduites lors de la schématisation et associées à la matière (par exemple : masse volumique, vitesse,...) sont elles aussi considérées comme réparties sur tout le domaine occupé par le milieu. On les représente alors par des fonctions continues.

Pour illustrer ce propos, considérons un volume $\mathcal{V}$ occupé par un milieu matériel et traçons la courbe représentative des valeurs du rapport $\mathcal{M}/\mathcal{V}$ en fonction de $\mathcal{V}$, $\mathcal{M}$ étant la masse de matière contenue dans $\mathcal{V}$.

Pour de faibles valeurs de $\mathcal{V}$, le pêcheur de matière va connaître les aléas de tout pêcheur. Partant de $\mathcal{V} = 0$ et augmentant la taille de son filet, tantôt il ramène un nombre important de molécules, tantôt il est quasiment bredouille. Les valeurs de $\mathcal{M}/\mathcal{V}$ qu'il obtient sont donc très fluctuantes.

À partir d'un certain volume (noté $\mathcal{V}_1$ sur la figure 1.2), un effet de moyenne va s'instaurer et $\mathcal{M}/\mathcal{V}$ va prendre une valeur constante pour $\mathcal{V}$ variant de $\mathcal{V}_1$ à $\mathcal{V}_2$. Cette valeur sera considérée par le mécanicien des milieux continus comme la valeur locale de ce qu'il va appeler la masse volumique.

Une particule macroscopique, dont la position sera assimilée à un point géométrique dans la schématisation du milieu continu, sera en fait la représentante de particules microscopiques contenues dans un volume compris entre $\mathcal{V}_1$ et $\mathcal{V}_2$.

Il est important de noter qu'une particule ne correspond pas à un ensemble déterminé de molécules. Au cours de l'évolution d'un milieu continu, une partie des molécules appartenant à une particule sera échangée avec les particules voisines aux instants ultérieurs en raison du mouvement d'agitation à l'échelle microscopique. Ce processus est à l'origine des phénomènes dits « de diffusion » (quantité de mouvement, chaleur, etc.) (cf. [26] p. 90).

Une variation éventuelle de $\mathcal{M}/\mathcal{V}$ pour $\mathcal{V} > \mathcal{V}_2$ sera interprétée comme résultant d'une distribution spatiale non constante de masse volumique.

La validité de l'hypothèse du milieu continu dépend de l'échelle d'observation, donc de la dimension des volumes appréhendés par les instruments de mesure.

Cette dimension doit être suffisamment petite pour que la mesure puisse être considérée comme locale et suffisamment grande pour que le volume contienne un grand nombre de molécules. Les fluctuations des grandeurs mesurées seront alors appréhendées par leurs moyennes spatiales et temporelles considérées comme indépendantes du nombre de molécules appartenant au volume durant la mesure.

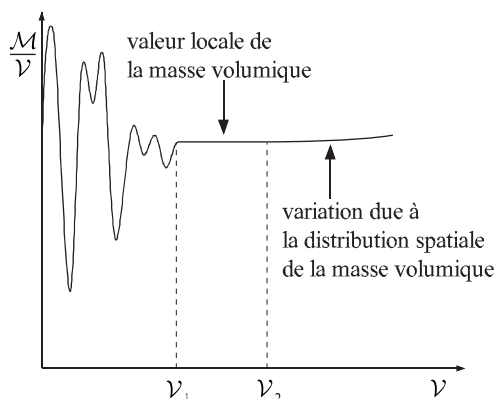


Figure 1.2 Mesure de la masse volumique en fonction du volume appréhendé.

En général un appareil appréhendant un volume de 10^{-9} cm^3 pourra être considéré comme fournissant une mesure locale. En effet les phénomènes observés habituellement en mécanique des milieux continus ne subissent pas de variations notables sur une distance de $10^{-3} \text{ cm} = 10 \text{ }\mu\text{m}$, exception faite toutefois des phénomènes d'ondes de choc. Si petit que soit un tel volume, il contient néanmoins $2,69 \times 10^{10}$ molécules d'air dans les conditions normales.

Nous venons de faire allusion aux ondes de choc. Il peut exister en effet, au sein d'un milieu dit continu, des zones où les grandeurs caractéristiques du mouvement (vitesse, pression, température,...) varient brusquement sur des distances très faibles. Il est alors judicieux d'assimiler ces zones à des surfaces de discontinuité (cf. chapitre 8). C'est l'exception qui confirme la règle.

L'hypothèse du milieu continu est mise en défaut en particulier pour des milieux possédant une microstructure dont l'échelle se situe entre les échelles microscopique et macroscopique. Citons en particulier les milieux granuleux, les matériaux composites, des liquides à macromolécules,... Pour ces milieux, le volume $\mathcal{V}_1$ peut être de l'ordre du cm^3 .

Lorsque le milieu est un gaz raréfié, la diminution du nombre des molécules fausse les effets de moyenne si on appréhende des volumes de l'ordre de 10^{-9} cm^3 . Dans l'atmosphère par exemple, à 100 km d'altitude, le nombre de molécules d'air compris dans un tel volume n'est plus que de l'ordre de 10^4 alors que nous venons de voir qu'il était de l'ordre de 10^{10} dans des conditions normales ; le modèle du milieu continu n'est plus adapté.

1.3 LA THÉORIE CINÉTIQUE DES GAZ

Le point de vue du mécanicien du milieu continu est donc celui du myope qui voit, à l'échelle macroscopique, la matière comme répartie « continûment » dans tout le volume d'étude. Toutefois il peut être instructif de tirer parti de résultats obtenus à l'échelle microscopique pour en déduire certaines caractéristiques des modèles macroscopiques.

Dans le domaine des gaz en particulier, cette démarche a donné des résultats significatifs. La voie a été ouverte en 1738 par Daniel Bernoulli qui retrouva, en considérant « de petits corpuscules animés en tous sens d'un mouvement très rapide », la loi de proportionnalité entre la pression de l'air et sa masse volumique à température constante. Mais ce sont principalement Clausius, Maxwell, Boltzmann et Gibbs qui donnèrent ses lettres de noblesse à ce qu'on appelle aujourd'hui la théorie cinétique des gaz.

Il n'est pas dans notre propos de faire une étude de cette théorie, ce qui nécessiterait de longs développements. Notre but est seulement d'indiquer qu'il existe des passerelles entre les deux mondes, celui du microscopique et celui du macroscopique. Nous mentionnerons simplement quelques idées de base et quelques résultats. Pour une étude plus complète, on pourra consulter notamment les ouvrages de E. Belorizky et W. Gorecki [49], S. Chapman et T.G. Cowling [50], E. Guyon, J.P. Hulin et L. Petit [39], J.O. Hirschfelder, C.F. Curtiss et R.B. Bird [51], F.A. Williams [52].

L'idée de départ – dans la forme la plus simple de la théorie – est d'appliquer les lois de la mécanique du solide indéformable aux molécules considérées comme des sphères rigides de diamètre δ . Dans un gaz, étant données les faibles interactions existant entre les molécules, chacune d'entre elles sera considérée comme en « vol libre » entre deux rencontres. Ces rencontres qui provoquent une déviation de la course des molécules vont être schématisées de façon quelque peu abrupte par des collisions entre corps indéformables. La trajectoire de chaque molécule sera une ligne brisée. Nous sommes donc conviés à une gigantesque partie de billard. Dans les schématisations les plus simples, les chocs sont supposés parfaitement élastiques et on néglige ceux concernant plus de deux molécules.

La distance moyenne parcourue entre deux collisions successives est appelée libre parcours moyen. Nous la noterons $\bar{l}$. À titre indicatif signalons que $\bar{l}$ est de l'ordre de 10^{-7} m, soit 10^3 Å, pour une molécule d'air au niveau du sol et de l'ordre du mètre à 110 km d'altitude.

Le tableau page suivante donne quelques valeurs de $\bar{l}$ pour une atmosphère dite standard.

L'espoir de traiter le mouvement d'un gaz non raréfié par la seule considération de celui de ses molécules se heurte vite à un obstacle majeur : le nombre imposant des dites molécules à considérer (de l'ordre de 10^{19} par cm^3 pour de l'air au niveau du sol). On est donc conduit tout naturellement à une approche statistique. Cette approche est non seulement obligée, mais aussi physiquement satisfaisante puisqu'un appareil de mesure n'a accès qu'à des grandeurs moyennées sur un petit volume (et un court intervalle de temps).

TABLEAU 1.1 TEMPÉRATURE, NOMBRE DE MOLÉCULES PAR m³ ET LIBRE PARCOURS MOYEN
DANS UNE ATMOSPHÈRE STANDARD (1976 US STANDARD ATMOSPHÈRE) D’APRÈS LA RÉFÉRENCE [62].

Altitude km	Température T K	Nombre de molécules par m ³	Libre parcours moyen $\bar{l}$ m
0	288	$2,5 \times 10^{25}$	$6,6 \times 10^{-8}$
10	223	$8,6 \times 10^{24}$	2×10^{-7}
50	271	$2,1 \times 10^{22}$	$7,9 \times 10^{-5}$
100	195	$1,2 \times 10^{19}$	0,14
150	634	$5,2 \times 10^{16}$	33
200	855	$7,2 \times 10^{15}$	240
300	976	$6,5 \times 10^{14}$	2600
900	1 000	$7,9 \times 10^{11}$	$2,1 \times 10^6$

Il s’agit alors de définir la valeur moyenne d’une quantité. On utilise pour cela une fonction densité de probabilité liée à la vitesse $\vec{v}$ des molécules. Cette fonction dépend du point et de l’instant considérés. Elle permet de définir une vitesse moyenne notée $\bar{v}$ et une vitesse quadratique moyenne $(\overline{v^2})^{1/2}$, v désignant la norme du vecteur $\vec{v}$.

Indiquons brièvement quelques résultats obtenus avec les schématisations les plus simples. Nous nous limitons au cas où le milieu considéré ne contient qu’une espèce chimique : un gaz mono-atomique. Nous supposons en outre que ce gaz est au repos ; la vitesse $\vec{v}$ d’une molécule est alors la vitesse d’agitation thermique.

On peut montrer que la pression p s’exerçant au sein d’un tel milieu peut être reliée à la vitesse quadratique moyenne par la relation :

$$p = \frac{1}{3} nm \overline{v^2} = \frac{1}{3} \rho \overline{v^2}$$

(1.1)

où n est le nombre de molécules par unité de volume, m la masse d’une molécule, $\rho = nm$ la masse volumique.

Pour obtenir ce résultat, on considère les variations de quantité de mouvement résultant des chocs des molécules sur un élément de surface immergé dans le gaz.

On définit la température absolue T pour un gaz au repos par :

$$\frac{3}{2} kT = \frac{1}{2} m \overline{v^2}$$

(1.2)

où k est la constante de Boltzmann : $k = 1,38 \times 10^{-23} \text{ JK}^{-1}$ (joule par kelvin).

La notion d’énergie thermique est alors reliée à celle d’énergie cinétique d’agitation des molécules. Elle apparaît ainsi comme une énergie mécanique cachée.

La relation (1.2) permet un calcul de l'ordre de grandeur de la vitesse quadratique moyenne. On trouve par exemple pour de l'air sous une atmosphère à température ambiante : $(\bar{v}^2)^{1/2} \simeq 500 \text{ ms}^{-1}$.

Le libre parcours moyen $\bar{l}$ est donné par :

$$\bar{l} = \frac{1}{\pi\sqrt{2}n\delta^2} \quad (1.3)$$

Un des apports essentiels de la théorie cinétique des gaz est de fournir des informations sur des coefficients dits « de transfert », par exemple le coefficient de viscosité dynamique μ pour le transfert de quantité de mouvement et la conductivité thermique k pour le transfert de chaleur par conduction. Ces grandeurs seront introduites au chapitre 9.

On trouve ainsi que μ et k sont tous les deux proportionnels à $\rho \bar{v} \bar{l}$. Une des expressions approchées admises pour μ est (cf. [50] p. 98) :

$$\mu = \frac{1}{2} f \rho \bar{v} \bar{l} = \frac{f}{\pi^{3/2} \delta^2} \sqrt{kmT} \quad (1.4)$$

avec : $\bar{v} = \left(\frac{8kT}{\pi m} \right)^{1/2}$ (cf. [50] p. 70).

Dans ces relations, f est une constante de l'ordre de l'unité et k est la constante de Boltzmann (et non la conductivité thermique).

Dans une telle modélisation, le coefficient de viscosité μ apparaît, pour un gaz donné, comme ne dépendant que de la température. On peut noter en outre qu'il est proportionnel à $\sqrt{T}$.

La conductivité thermique k est donnée par : $k = \frac{1}{2} f' \rho \bar{v} \bar{l} c_v$ (1.5)

où c_v est la capacité thermique massique – plus communément appelée chaleur massique – à volume constant et f' est une constante de l'ordre de l'unité.

1.4 MOUVEMENT D'UN SYSTÈME MATÉRIEL

Revenons à l'échelle macroscopique et au milieu continu (cf. § 1.2). Avant de voir la pièce, présentons rapidement les acteurs.

1.4.1 Système matériel

Parlons d'abord de la notion de point matériel ou particule. Comme nous l'avons vu au paragraphe 1.2, une particule macroscopique représente, dans la schématisation d'un milieu continu, la quantité de matière contenue dans un volume $\mathcal{V}$ dont on a précisé l'ordre de grandeur.

Un système matériel sera un ensemble de particules. Qui dit « matériel » sous-entend « masse ». Cette notion ne sera introduite qu'au chapitre 4, car elle n'est pas nécessaire pour décrire la cinématique ou les déformations d'un milieu. Nous n'en qualifierons pas moins dès à présent de « matériels » les systèmes que nous allons étudier.

Précisons d'entrée que, dans cet ouvrage, nous ne nous intéresserons qu'à des systèmes **tridimensionnels**. Dans certains cas, il est possible de mettre en oeuvre des approches bidimensionnelles (pour des plaques ou des coques, par exemple) ou unidimensionnelles (pour des fils, des tiges, des poutres de grand allongement, par exemple). Ces questions sont traitées dans des ouvrages spécialisés.

D'autre part, nous ne considérerons que des systèmes formés d'un seul constituant ou d'un nombre fini de constituants non miscibles. La théorie des mélanges nécessite des développements particuliers qu'on pourra trouver notamment dans les références [8b] et [51].

Les acteurs venant d'être présentés, voyons rapidement le décor dans lequel ils vont évoluer : l'espace-temps.

1.4.2 Le temps

La mécanique est la science du mouvement (et des équilibres). Pour parler de mouvement, il faut introduire la notion de temps.

On sait que le concept – énoncé par Newton au 18^e siècle – d'un temps absolu, indépendant de l'observateur, a été remis en cause par la théorie de la relativité d'Einstein.

Dans cet ouvrage, nous nous plaçons dans le cadre de la mécanique dite « classique » qui s'intéresse à des phénomènes pour lesquels les vitesses sont faibles devant celle de la lumière et les dimensions ni « infiniment grandes », ni « infiniment petites ». Dans ces conditions le temps peut être représenté par un ensemble, indépendant de l'espace, muni d'une structure de droite orientée dont les éléments sont appelés « instants ». À chaque instant est ainsi associée la valeur d'une variable réelle t , une fois choisis un instant origine et une unité de mesure de durée.

Ajouter le temps à la géométrie, c'est entrer dans le monde de la cinématique. On peut écrire de façon schématique :

$$\text{GÉOMÉTRIE} + \text{TEMPS} = \text{CINÉMATIQUE}$$

1.4.3 L'espace

Les êtres mécaniques dont nous voulons étudier les évolutions vont se mouvoir dans un espace dit **affine** de dimension 3 que nous noterons $\mathcal{P}_3$ et dont les éléments seront appelés points (géométriques).

On convient de représenter la position d'un point matériel à un instant t par un élément M_t de l'espace $\mathcal{P}_3$, donc par un point géométrique. On dira que M_t est la position du point matériel M (ou de la particule M) à l'instant t .

La position à l'instant t d'un système matériel est alors un sous-ensemble $\mathcal{E}_t$ de $\mathcal{P}_3$.

Pour pouvoir faire des calculs, il est nécessaire d'associer trois nombres réels à tout point P de $\mathcal{P}_3$. On dira qu'on a défini un système de coordonnées. On peut procéder de la façon suivante.

On considère l'espace **vectoriel** E_3 associé à l'espace affine $\mathcal{P}_3$. Si A et B sont deux points de $\mathcal{P}_3$, nous noterons $\overrightarrow{AB}$ le vecteur, élément de E_3 , « reliant » le point A au point B .

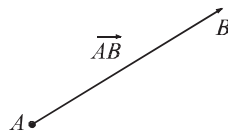


Figure 1.3 Vecteur $\overrightarrow{AB}$ de E_3 associé à deux points A et B de $\mathcal{P}_3$.

Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ une base de E_3 et O un point de $\mathcal{P}_3$. L'ensemble $(O, \mathcal{B})$ constitue un repère R de $\mathcal{P}_3$. À tout point P de $\mathcal{P}_3$ on peut associer de façon biunivoque le vecteur $\overrightarrow{OP}$. Si on pose : $\overrightarrow{OP} = x_p \vec{e}_p$, les trois nombres réels (x_1, x_2, x_3) sont appelés coordonnées cartésiennes de P . Le triplet (x_1, x_2, x_3) est un élément de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

Dans la relation : $\overrightarrow{OP} = x_p \vec{e}_p$, nous avons utilisé la convention de l'indice muet répété, écrivant $x_p \vec{e}_p$ pour $\sum_{p=1}^3 x_p \vec{e}_p$.

On a donc à chaque instant t les correspondances suivantes :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{E} & \subset & \text{Univers} \\
 \updownarrow & & \updownarrow \\
 \mathcal{E}_t & \subset & \mathcal{P}_3 \\
 \updownarrow & & \updownarrow \\
 \{\overrightarrow{OM}_t\} & \subset & E_3 \\
 \updownarrow & & \updownarrow \\
 \{(x_1, x_2, x_3)\} & \subset & \mathbb{R}^3,
 \end{array}$$

ce qui, vous en conviendrez, est très valorisant pour $\mathbb{R}^3$.

Dans un exposé de mécanique, on passe constamment et sans le dire à chaque fois d'un ensemble à un autre.

Attardons-nous sur E_3 . Si on le munit d'un produit scalaire, il se pare du titre d'espace euclidien. Le produit scalaire de deux éléments $\vec{U}$ et $\vec{V}$ de E_3 sera noté $\vec{U} \cdot \vec{V}$. Pour plus de détails, on pourra se reporter au paragraphe A.1 de l'annexe A.

Afin de simplifier les calculs, nous n'utiliserons dans la suite que des bases $\mathcal{B}$ **orthonormées**, c'est-à-dire telles que :

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}, i = 1, 2, 3 \quad (1.6)$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker : $\delta_{ij} = 1$, si $i = j$, $\delta_{ij} = 0$, si $i \neq j$.

Dans ces conditions, le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{U} = U_p \vec{e}_p$ et $\vec{V} = V_q \vec{e}_q$ s'écrit :

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = U_p V_p \quad (1.7)$$

les scalaires $(U_i)_{i=1,2,3}$ et $(V_j)_{j=1,2,3}$ étant les composantes respectives des vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ dans la base $\mathcal{B}$.

1.4.4 Mouvement et référentiel

Le mécanicien se propose de déterminer la position de chaque point d'un système matériel lorsque ce dernier évolue au cours du temps, même si dans les applications il n'est pas nécessaire, dans de nombreux cas, d'être aussi exigeant. On se contente par exemple souvent de la détermination de quantités globales associées au système matériel étudié.

Considérons un système matériel $\mathcal{E}$ occupant, au cours de son évolution, les positions respectives $\mathcal{E}_0$ et $\mathcal{E}_t$ à l'instant initial et à l'instant t . Une particule M de $\mathcal{E}$ est en M_0 à l'instant initial et en M_t à l'instant t .

Précisons certains concepts dont on trouvera une présentation plus détaillée dans l'ouvrage de P. Germain et P. Muller [12].

Un système matériel $\mathcal{E}$ est dit **rigide** ou **indéformable** si et seulement si l'application $M_0 \rightarrow M_t$ qui transforme $\mathcal{E}_0$ en $\mathcal{E}_t$ est une isométrie directe pour tout t .

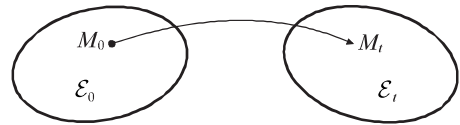


Figure 1.4 Mouvement d'un système matériel $\mathcal{E}$.

Une isométrie est une application qui conserve les distances et les angles. L'adjectif « direct » signifie qu'on exclut les symétries. Chacun a pu constater par exemple qu'il n'était pas possible d'aller se superposer à son image reflétée par un miroir.

Les systèmes rigides se comportent comme les bons vieux solides indéformables de la mécanique dite « générale ».

- On dit qu'un point M est lié à un **système rigide** $\mathcal{E}$ si et seulement si la réunion de $\mathcal{E}$ et de M est un système rigide. Cela ne signifie pas, bien entendu, que M et $\mathcal{E}$ soient « physiquement » reliés.
- On appelle **référentiel** $\mathfrak{R}$ l'ensemble des points liés à un système rigide. Pour le besoin des calculs, on représentera $\mathfrak{R}$ à l'instant t par un repère $R_t = (O_t, \vec{e}_1(t), \vec{e}_2(t), \vec{e}_3(t))$ lié au référentiel $\mathfrak{R}$, c'est-à-dire animé du mouvement de solide rigide de $\mathfrak{R}$.