CPGE ECT-1

Les MATHÉMATIQUES EXPLIQUÉES *pas à pas*

Adrien FONTAINE
Alexandre GÉLIN

- L'essentiel du cours
- Les méthodes indispensables
- Les exercices d'application
- Les corrections des exercices

NOUVEAUX PROGRAMMES !



CPGE ECT-1

Les

MATHÉMATIQUES EXPLIQUÉES

pas à pas



Adrien Fontaine Alexandre Gélin

Professeurs en CPGE ECT

ellipses

ISBN 9782340-067554
©Ellipses Édition Marketing S.A., 2022
8/10 rue la Quintinie 75015 Paris



Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5.2° et 3°a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

À Marine, Aziliz et Éloi
A.F.

AVANT-PROPOS

Pour réussir en mathématiques en classe préparatoire, il est essentiel de maîtriser les bases acquises au collège et au lycée. Par ailleurs, disposer d'un catalogue de méthodes, qu'il faut être capable de mobiliser à bon escient et au moment opportun, se révèle indispensable à la réussite aux concours. En reprenant des notions souvent considérées (à tort) comme acquises, tout en suivant scrupuleusement le programme de première année d'ECT, ce livre fournit aux étudiants toutes les clés pour répondre à ces objectifs.

Cet ouvrage est avant tout destiné aux élèves de première année de classe préparatoire ECT. Il pourra également se révéler fort utile aux élèves d'ECG désireux de consolider les bases acquises précédemment. Ils pourront par exemple y trouver des rappels de calcul numérique et littéral (calculs de fractions, de puissances, développement, factorisation), revoir les notions de bases sur les fonctions, approfondir leurs compétences en calcul intégral, en probabilités, etc. En particulier, les élèves ayant suivi l'option mathématiques complémentaires pourront très largement bénéficier du contenu de ce livre pour revoir ou approfondir certaines connaissances du cycle secondaire.

Ce livre est constitué de 17 chapitres, suivant une progression classique de première année de classe préparatoire ECT. Chaque chapitre se présente en quatre parties :

- La section « **L'essentiel du cours** » regroupe de manière condensée les résultats les plus importants à connaître, ceux qui serviront lors de la résolution des exercices.
- La section « **Les méthodes indispensables** » présente l'intégralité des méthodes nécessaires à la résolution des exercices. À la suite de chaque méthode se trouve un ou plusieurs exemples d'illustration, expliqués pas à pas.
- La section « **Les exercices d'application** » propose des exercices de difficultés variables, afin de mettre en application les méthodes vues précédemment.
- La section « **Les corrections des exercices** » fournit l'intégralité des corrigés des exercices, rédigés avec soin et de manière la plus détaillée possible.

Ainsi, quel que soit votre profil, ce livre vous fournira les outils nécessaires pour réussir votre première année et aborder la deuxième année avec des bases très solides.

SOMMAIRE

Index thématique 9

Chapitre 1 – Calcul numérique et littéral 13
L'essentiel du cours 13
Les méthodes indispensables 15
Les exercices d'application 24
Les corrections des exercices 26

Chapitre 2 – Équations et inéquations (A) 37
L'essentiel du cours 37
Les méthodes indispensables 38
Les exercices d'application 43
Les corrections des exercices 44

Chapitre 3 – Équations et inéquations (B) 59
L'essentiel du cours 59
Les méthodes indispensables 60
Les exercices d'application 67
Les corrections des exercices 68

Chapitre 4 – Généralités sur les fonctions 85
L'essentiel du cours 85
Les méthodes indispensables 87
Les exercices d'application 94
Les corrections des exercices 98

Chapitre 5 – Suites réelles 113
L'essentiel du cours 113
Les méthodes indispensables 115
Les exercices d'application 121
Les corrections des exercices 124

Chapitre 6 – Probabilités élémentaires 135
L'essentiel du cours 135
Les méthodes indispensables 137
Les exercices d'application 142
Les corrections des exercices 148

Chapitre 7 – Raisonnement par récurrence 163
L'essentiel du cours 163
Les méthodes indispensables 163
Les exercices d'application 166
Les corrections des exercices 168

Chapitre 8 – Limites et continuité 177
L'essentiel du cours 177
Les méthodes indispensables 182
Les exercices d'application 190
Les corrections des exercices 192

Chapitre 9 – Dérivabilité 203
L'essentiel du cours 203
Les méthodes indispensables 205
Les exercices d'application 209
Les corrections des exercices 214

Chapitre 10 – Compléments sur les suites 233
L'essentiel du cours 233
Les méthodes indispensables 235
Les exercices d'application 242
Les corrections des exercices 245

Chapitre 11 – Variables aléatoires réelles 257
L'essentiel du cours 257
Les méthodes indispensables 260
Les exercices d'application 265
Les corrections des exercices 269

Chapitre 12 – Intégrales et primitives 281
L'essentiel du cours 281
Les méthodes indispensables 284
Les exercices d'application 289
Les corrections des exercices 290

Chapitre 13 – Fonction logarithme 299
L'essentiel du cours 299
Les méthodes indispensables 301
Les exercices d'application 308
Les corrections des exercices 311

Chapitre 14 – Fonction exponentielle 331
L'essentiel du cours 331
Les méthodes indispensables 333
Les exercices d'application 339
Les corrections des exercices 342

Chapitre 15 – Compléments sur les fonctions 363
L'essentiel du cours 363
Les méthodes indispensables 365
Les exercices d'application 367
Les corrections des exercices 369

Chapitre 16 – Systèmes linéaires 385
L'essentiel du cours 385
Les méthodes indispensables 386
Les exercices d'application 388
Les corrections des exercices 390

Chapitre 17 – Matrices 397
L'essentiel du cours 397
Les méthodes indispensables 399
Les exercices d'application 403
Les corrections des exercices 405

INDEX THÉMATIQUE

1 – Calcul numérique et littéral

- Opérations sur les nombres réels, règles de priorité de calcul
- Manipulations de fractions, de puissances et de racines carrées
- Développement et factorisation
- Identités remarquables

2 – Équations et inéquations (A)

- Équations et inéquations de degré 1
- Équations et inéquations de degré 2

3 – Équations et inéquations (B)

- Opérations sur les polynômes
- Factorisation de polynômes de degré supérieur ou égal 3
  (racine évidente, identification des coefficients et division euclidienne)
- Équations produit et quotient
- Inéquations produit et quotient

4 – Généralités sur les fonctions

- Notions d'image et d'antécédent
- Parité d'une fonction
- Majoration et minoration d'une fonction
- Domaine de définition d'une fonction
- Fonction bijective

5 – Suites réelles

- Calculs de termes d'une suite : formule explicite et relation de récurrence
- Suites arithmétiques
- Suites géométriques
- Suites arithmético-géométriques (méthode par l'étude d'une suite auxiliaire géométrique)
- Symbole de sommation Σ
- Somme des termes d'une suite arithmétique
- Somme des termes d'une suite géométrique

6 – Probabilités élémentaires

- Lien entre terminologie probabiliste et ensembliste
- Notion d'équiprobabilité
- Probabilités conditionnelles
- Formule des probabilités composées
- Formule des probabilités totales
- Lien avec les arbres pondérés
- Indépendance

7 – Raisonnement par récurrence

- Récurrence commençant au rang 0
- Récurrence commençant à un rang n_0
- Récurrence impliquant le signe Σ

8 – Limites et continuité

- Limites usuelles
- Limites par somme, quotient ou composition de limites usuelles
- Limites d'un polynôme ou d'une fraction rationnelle en $\pm\infty$
- Formes indéterminées et levée d'indétermination
- Asymptotes et interprétation graphique
- Continuité

9 – Dérivabilité

- Interprétation graphique de la dérivée (coefficient directeur de la tangente en ce point)
- Équation de la tangente en un point
- Dérivées des fonctions usuelles
- Dérivées d'une somme, d'un produit, d'un quotient, d'une composée
- Étude des variations d'une fonction

10 – Compléments sur les suites

- Variations d'une suite
- Majoration et minoration d'une suite
- Limite d'une suite (cas des suites géométriques)
- Théorème des gendarmes
- Théorème de la limite monotone
- Étude de suites de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$

11 – Variables aléatoires réelles

- Loi d'une variable aléatoire
- Fonction de répartition d'une variable aléatoire
- Espérance d'une variable aléatoire
- Variance d'une variable aléatoire
- Lois usuelles (loi uniforme, loi de Bernoulli et loi binomiale)

12 – Intégrales et primitives

- Primitives des fonctions usuelles
- Primitives des fonctions composées
- Lien entre intégrales et primitives
- Calculs d'intégrales
- Relation de Chasles

13 – Fonction logarithme

- Propriété fondamentale de la fonction logarithme népérien
- Propriétés algébriques de la fonction logarithme
- Équations et inéquations impliquant la fonction logarithme
- Calculs de limites faisant intervenir la fonction logarithme
- Étude de fonctions de la forme $\ln(u)$
- Primitives nécessitant la fonction logarithme

14 – Fonction exponentielle

- Propriété fondamentale de la fonction exponentielle
- Propriétés algébriques de la fonction exponentielle
- Équations et inéquations impliquant la fonction exponentielle
- Calculs de limites faisant intervenir la fonction exponentielle
- Étude de fonctions de la forme $\exp(u)$
- Primitives nécessitant la fonction exponentielle

15 – Compléments sur les fonctions

- Convexité d'une fonction
- Théorème des valeurs intermédiaires

16 – Systèmes linéaires

- Méthode par substitution
- Systèmes triangulaires
- Méthode du pivot de Gauss

17 – Matrices

- Sommes et produits de matrices
- Équivalence matrice – système

1 | Calcul numérique et littéral

L'essentiel du cours

Proposition 1.1 – Distributivité du signe « – »

Pour tous réels a, b et c,

$$a-(b+c)=a-b-c \quad \text{et} \quad a-(b-c)=a-b+c.$$

☞ ***Pour continuer :*** Méthode 1.7.

Proposition 1.2 – Simplification des fractions

Soient a et b deux réels, avec $b \neq 0$. Si c est un réel non nul, alors

$$\frac{a \times c}{b \times c} = \frac{a}{b}.$$

☞ ***Pour continuer :*** Méthode 1.8.

Définition 1.3 – Soient n un entier naturel non nul et a un réel.

- Le réel noté a^n (lire « *a puissance n* ») est le produit de n facteurs tous égaux à a, *i.e.*

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ facteurs}}.$$

- Si a est non nul, alors

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

- Par convention, $a^0 = 1$.

Proposition 1.4 – Calcul avec des puissances

Pour tous réels a et b et tous entiers relatifs m et n,

$$a^1 = a, \qquad a^m \times a^n = a^{m+n}, \qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \qquad \left(a^m\right)^n = a^{mn},$$

$$(ab)^n = a^n b^n \quad \text{et} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

☞ ***Pour s'exercer :*** Exercice 5.

Proposition 1.5 – Calcul avec des racines carrées

Soient a et b deux réels **positifs**,

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}, \qquad \sqrt{a^2} = a \quad \text{et} \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad \text{si } b \neq 0.$$



ATTENTION ! On veillera à retenir qu'en général,

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

Par exemple, si on choisit $a = 9$ et $b = 16$,

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \quad \text{mais} \quad \sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7.$$

Proposition 1.6 – Identités remarquables

Soient a et b deux réels. Les égalités suivantes sont appelées **identités remarquables** :

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$,
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$,
- $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.

☞ ***Pour continuer :*** Méthode 1.14.

Les méthodes indispensables

Méthode 1.7 – Parenthèses précédées d'un signe « + » ou d'un signe « − »

On commence par repérer le signe qui précède la parenthèse que l'on souhaite supprimer :

- S'il s'agit d'un signe « + », on supprime les parenthèses sans rien changer de plus.
- S'il s'agit d'un signe « − », on supprime les parenthèses en changeant le signe de **tous** les termes à l'intérieur de la parenthèse.

Application – Simplifier les expressions suivantes.

- $A = x - 1 + (1 - x)$ *La parenthèse est précédée d'un signe « + », je peux donc supprimer les parenthèses sans rien changer.*
  $= x - 1 + 1 - x$ *Je simplifie.*
  $= 0$
- $B = x - 1 - (x + 1)$ *La parenthèse est cette fois précédée d'un signe « − », je supprime donc les parenthèses en changeant le signe des termes à l'intérieur.*
  $= x - 1 - x - 1$ *Je simplifie.*
  $= -2$

☞ ***Pour s'exercer :*** Exercice 1.

Méthode 1.8 – Simplification de fractions

1. Pour simplifier une fraction, on essaie de trouver un facteur commun au numérateur et au dénominateur. On décompose alors le numérateur et le dénominateur de la fraction en produit de nombres contenant ce facteur commun.
2. Une fois la fraction simplifiée, on regarde si on peut à nouveau simplifier la fraction obtenue.
3. On continue ainsi jusqu'à ce que la fraction ne puisse plus être simplifiée (on parle alors de fraction **irréductible**).

Application –

- Simplifier la fraction $\frac{24}{30}$.
  Je remarque tout d'abord que 24 et 30 sont tous les deux des multiples de 2.
  En effet, $24 = 2 \times 12$ et $30 = 2 \times 15$. Je peux donc écrire

$$\frac{24}{30} = \frac{\cancel{2} \times 12}{\cancel{2} \times 15} = \frac{12}{15}.$$

  Je remarque alors que 12 et 15 sont tous les deux des multiples de 3.
  En effet, $12 = 3 \times 4$ et $15 = 3 \times 5$. Je peux alors écrire

$$\frac{12}{15} = \frac{\cancel{3} \times 4}{\cancel{3} \times 5} = \frac{4}{5}.$$

  Je ne peux plus simplifier la fraction. Finalement

$$\frac{24}{30} = \frac{4}{5}.$$

- Cette méthode s'applique également aux fractions contenant des expressions littérales. Simplifier par exemple la fraction $\frac{2x^2}{4x}$.
  Je remarque tout d'abord que $2x^2$ et $4x$ sont tous les deux des multiples de 2.
  En effet, $2x^2 = 2 \times x^2$ et $4x = 2 \times 2x$. Je peux alors écrire

$$\frac{2x^2}{4x} = \frac{\cancel{2} \times x^2}{\cancel{2} \times 2x} = \frac{x^2}{2x}.$$

  Je remarque alors que x^2 et $2x$ sont tous les deux des multiples de x.
  En effet, $x^2 = x \times x$ et $2x = 2 \times x$. Je peux alors écrire

$$\frac{x^2}{2x} = \frac{x \times \cancel{x}}{2 \times \cancel{x}} = \frac{x}{2}.$$

  Je ne peux plus simplifier la fraction. Finalement

$$\frac{2x^2}{4x} = \frac{x}{2}.$$

☞ ***Pour s'exercer :*** Exercice 2.



ATTENTION ! Il s'agit de l'**unique** règle de simplification d'une fraction et elle concerne les **FACTEURS** d'un produit ! Cela ne fonctionne pas du tout avec des additions.

Application – Simplifier la fraction $\dfrac{5+2}{3+2}$.
Je ne peux pas simplifier les 2, qui sont additionnés et non multipliés. Ici, il faut d'abord faire les calculs :

$$\frac{5+2}{3+2} = \frac{7}{5}.$$

Je ne peux alors plus simplifier cette fraction, qui est irréductible.

Remarque –

- Que se passe-t-il lorsque l'on a « tout barré » ? Lorsque tous les facteurs, au numérateur **ou** au dénominateur, ont été simplifiés, cela signifie qu'il ne reste plus que 1. Par exemple,

$$\frac{24}{120} = \frac{\cancel{2}\times 12}{\cancel{2}\times 60} = \frac{\cancel{3}\times 4}{\cancel{3}\times 20} = \frac{\cancel{4}}{\cancel{4}\times 5} = \frac{1}{5}.$$

- On donne **toujours** le résultat sous la forme d'une fraction irréductible. Cela permet notamment de rendre les calculs suivants beaucoup plus simples.

Méthode 1.9 – Manipulation de fractions

- Pour **additionner** (ou **soustraire**) des fractions, on commence par les mettre au même dénominateur **PUIS** on ajoute (ou soustrait) les numérateurs.
- Pour **multiplier** des fractions, on multiplie les numérateurs et les dénominateurs entre eux.
- Pour **diviser** par une fraction, on multiplie par son **INVERSE**.

Application – Donner les nombres suivants sous la forme d'une fraction irréductible.

- $A = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{3}$

$$= \frac{3\times 1}{3\times 4} - \frac{4\times 1}{4\times 3}$$
$$= \frac{3}{12} - \frac{4}{12}$$
$$= \frac{3-4}{12}$$
$$= \frac{-1}{12}$$

☜ *Je dois soustraire deux fractions. Les dénominateurs n'étant pas les mêmes, je commence par trouver un dénominateur commun.*

☜ *J'opère les calculs.*

☜ *Une fois que les fractions sont au même dénominateur, il suffit de soustraire les deux numérateurs.*

- $B = \dfrac{3}{2} \times \dfrac{8}{5}$
  $= \dfrac{3 \times 8}{2 \times 5}$
  $= \dfrac{3 \times 4 \times \cancel{2}}{\cancel{2} \times 5}$
  $= \dfrac{12}{5}$

  ☜ *Il s'agit ici d'un produit de deux fractions. Je peux donc simplement multiplier numérateurs et dénominateurs entre eux.*

  ☜ *Je pourrais simplement calculer le résultat de ces produits puis simplifier. Il est toutefois plus facile de chercher à simplifier au maximum AVANT de calculer les produits.*

  ☜ *Je n'ai alors plus qu'à calculer.*

- $C = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}}$
  $= \dfrac{1}{2} \times \dfrac{3}{2}$
  $= \dfrac{1 \times 3}{2 \times 2}$
  $= \dfrac{3}{4}$

  ☜ *Il s'agit ici d'un quotient de deux fractions. Je multiplie donc la fraction du haut par l'INVERSE de la fraction du bas.*

  ☜ *Je dois alors multiplier deux fractions entre elles et j'applique donc la règle de multiplication des fractions.*

  ☜ *Je ne peux pas simplifier davantage. Il n'y a alors plus qu'à calculer.*

☞ ***Pour s'exercer :*** Exercice 3.

Méthode 1.10 – Calcul et simplification de racines carrées

Pour calculer et simplifier des racines carrées, il convient de distinguer deux types de nombres :

- Les **carrés parfaits**, dont on peut calculer directement la racine.
  On peut ainsi retenir que

$\sqrt{1} = 1$	$\sqrt{25} = 5$	$\sqrt{81} = 9$	$\sqrt{169} = 13$
$\sqrt{4} = 2$	$\sqrt{36} = 6$	$\sqrt{100} = 10$	$\sqrt{196} = 14$
$\sqrt{9} = 3$	$\sqrt{49} = 7$	$\sqrt{121} = 11$	$\sqrt{225} = 15$
$\sqrt{16} = 4$	$\sqrt{64} = 8$	$\sqrt{144} = 12$	$\sqrt{256} = 16$

- Les autres nombres. Pour les nombres qui ne sont pas des carrés parfaits, la racine carrée « ne tombe pas juste ». On essaie alors de simplifier en écrivant la racine sous la forme $a\sqrt{b}$ avec a et b entiers et b le plus petit possible. Pour cela l'idée est de décomposer le nombre de départ sous la forme du produit d'un carré parfait par un autre nombre puis d'utiliser la première propriété de la Proposition 1.5.

Application – Écrire $\sqrt{72}$ sous la forme $a\sqrt{b}$, avec b l'entier le plus petit possible.

$\sqrt{72} = \sqrt{9\times 8}$ ☜ *Je décompose 72 en faisant apparaître un carré parfait : 9.*
$= \sqrt{9}\times\sqrt{8}$ ☜ *J'applique la première propriété de la Proposition 1.5.*
$= 3\times\sqrt{8}$ ☜ *Je simplifie la racine du carré parfait.*
$= 3\times\sqrt{4\times 2}$ ☜ *Je recommence jusqu'à ce que cela ne soit plus possible.*
$= 3\times\sqrt{4}\times\sqrt{2}$
$= 3\times 2\times\sqrt{2}$
$= 6\sqrt{2}$ ☜ *Je m'arrête puisque 2 ne contient pas de carré parfait.*

☞ ***Pour s'exercer :*** Exercice 6.

Méthode 1.11 – Règles de priorité

Afin de mener à bien des calculs, il faut savoir dans quel ordre effectuer les différentes opérations. Pour cela, il est indispensable de parfaitement maîtriser les règles de priorité. Celles-ci sont rappelées ci-dessous :

1. On effectue d'abord les calculs des expressions entre parenthèses, en commençant par les parenthèses les plus à l'intérieur.
2. On effectue les puissances **AVANT** les multiplications, divisions, additions et soustractions.
3. On effectue d'abord les multiplications et les divisions **AVANT** les additions et les soustractions.
4. Enfin, on effectue les additions et les soustractions.

Application – Calculer les nombres suivants.

- $A = 5-4\times 3+5\times(3-6)$ ☜ *Je débute par effectuer le calcul à l'intérieur de la parenthèse.*
  $= 5-4\times 3+5\times(-3)$ ☜ *J'effectue ensuite les multiplications.*
  $= 5-12-15$ ☜ *J'effectue enfin les soustractions, de gauche à droite.*
  $= -7-15 = -22$
- $B = \dfrac{2\times(4-2)}{3^2\times 2^2}$ ☜ *Je commence par effectuer le calcul à l'intérieur de la parenthèse.*
  $= \dfrac{2\times 2}{3^2\times 2^2}$ ☜ *J'effectue ensuite les calculs de puissances.*
  $= \dfrac{2\times 2}{9\times 4}$ ☜ *Puis les multiplications.*
  $= \dfrac{\cancel{4}}{9\times\cancel{4}} = \dfrac{1}{9}$ ☜ *Et j'essaie de simplifier au maximum avant de multiplier.*

☞ ***Pour s'exercer :*** Exercice 4.

Méthode 1.12 – Développer une expression

Pour développer une expression, on applique les règles de **distributivité** suivantes :

- $k(a+b) = ka + kb$,
- $k(a-b) = ka - kb$,
- $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$,

où a, b, c, d et k sont des réels.

Application –

- Développer l'expression $A = (x-4)(-2x+3)$.

$$A = (x-4)(-2x+3)$$ ☜ *Je distribue le facteur x avec chaque terme de la parenthèse $(-2x+3)$ et je fais de même avec le facteur -4.*

$$= x \times (-2x) + x \times 3 + (-4) \times (-2x) + (-4) \times 3$$ ☜ *Il suffit alors d'appliquer la règle des signes.*

$$= -2x^2 + 3x + 8x - 12$$ ☜ *Puis de réduire l'expression en regroupant les termes en x.*

$$= -2x^2 + 11x - 12$$

- Cette stratégie se généralise bien sûr lorsqu'une des parenthèses comporte plus de deux termes et lorsqu'il y a plus de deux facteurs.

$$B = (x-4)(2x-1)(x^2-5x+6)$$ ☜ *Je commence par appliquer la même méthode que dans l'application précédente, pour distribuer $(x-4)(2x-1)$.*

$$= (2x^2 - x - 8x + 4)(x^2 - 5x + 6)$$ ☜ *Avant de développer à nouveau, Je commence par réduire la première parenthèse afin de simplifier les calculs.*

$$= (2x^2 - 9x + 4)(x^2 - 5x + 6)$$ ☜ *Puis je développe à nouveau, avec cette fois 3 termes distribués sur 3 autres.*

$$= 2x^4 - 10x^3 + 12x^2 - 9x^3 + 45x^2 - 54x + 4x^2 - 20x + 24$$ ☜ *Il ne reste plus qu'à réduire le tout, en regroupant les termes de même puissance.*

$$= 2x^4 - 19x^3 + 61x^2 - 74x + 24$$

- Lors du développement de plusieurs produits, il faut être vigilant à la répercussion d'un éventuel signe « − ». Dans ce cas, il ne faut pas hésiter à placer l'expression précédée du signe « − » entre parenthèses.

$$C = (x+1)(x-3) - x(2x-1)$$ ☜ *Je développe chaque terme et je place le second résultat entre parenthèses pour gérer le signe « − ».*

$$= x^2 - 3x + x - 3 - \left(2x^2 - x\right)$$ ☜ *Je supprime ensuite la parenthèse en appliquant la Méthode 1.7.*

$$= x^2 - 3x + x - 3 - 2x^2 + x$$ ☜ *Il ne me reste alors plus qu'à réduire.*

$$= -x^2 - x - 3$$

☞ ***Pour s'exercer :*** Exercice 8.

Méthode 1.13 – Factoriser une expression

Pour mener à bien une factorisation, il faut :

1. Identifier le facteur commun.
2. Identifier les facteurs complémentaires.
3. Identifier les signes à placer entre les facteurs complémentaires.

Remarque – « Développer » et « factoriser » sont des transformations **inverses** l'une de l'autre.

Application –

- Factoriser l'expression $A = 8x + 12$.

$A = 8x + 12$ ☜ *Je remarque tout d'abord que $8x$ et 12 sont tous les deux des multiples de 4. Je mets donc en évidence ce facteur commun.*

$= 4 \times 2x + 4 \times 3$ ☜ *Je mets alors 4 en facteur et les facteurs complémentaires dans une parenthèse commune.*

$= 4(2x + 3)$

- Lorsque le facteur commun n'est accompagné d'aucun terme, cela signifie que le facteur complémentaire est 1.

$B = (x-4)(2x-3) + (x-4)$ ☜ *Le facteur commun est ici bien sûr $(x-4)$. Le premier facteur complémentaire est $(2x-3)$, le deuxième est donc ici 1.*

$= (x-4) \times (2x-3)$ ☜ *Je mets alors $(x-4)$ en facteur et les facteurs complémentaires dans une parenthèse commune.*
$\quad +(x-4) \times 1$

$= (x-4)\,(2x-3+1)$ ☜ *Il ne me reste alors plus qu'à réduire l'expression à l'intérieur de la deuxième parenthèse.*

$= (x-4)(2x-2)$

- Comme toujours, il faut faire attention aux signes et ne pas hésiter à mettre une expression entre parenthèses lorsqu'un signe « – » apparaît pour ne pas se tromper.

$C = (x-2)^2 - (x-2)(2x-3)$ ☜ *Le facteur commun est $(x-2)$. Le premier terme étant $(x-2)^2$, le facteur complémentaire est $(x-2)$. Le second est $(2x-3)$.*

$= (x-2) \times (x-2)$ ☜ *Je mets alors $(x-2)$ en facteur et les facteurs complémentaires dans une parenthèse commune. Je rajoute ici des parenthèses autour de $2x-3$ pour ne pas faire d'erreur de signe.*
$\quad -(x-2) \times (2x-3)$

$= (x-2)\big(x-2-(2x-3)\big)$ ☜ *Je supprime les parenthèses devant $2x-3$ en appliquant la Méthode 1.7.*

$= (x-2)(x-2-2x+3)$ ☜ *Il ne me reste alors plus qu'à réduire l'expression à l'intérieur de la deuxième parenthèse.*

$= (x-2)(-x+1)$

☞ ***Pour s'exercer :*** Exercice 11.

Méthode 1.14 – Développer ou factoriser à l'aide d'une identité remarquable

Les identités remarquables permettent de développer ou de factoriser rapidement des expressions comportant des carrés. Pour développer ou factoriser une expression à l'aide d'une des trois identités remarquables, il s'agit à chaque fois d'identifier la formule à utiliser puis les coefficients a et b correspondants.
Dans le cas d'une factorisation, cette dernière étape est plus difficile :

- Pour les deux premières identités, il s'agit de mettre en évidence les deux termes au carré a^2 et b^2 afin d'identifier a et b, puis de s'assurer que le terme restant correspond bien au terme $\pm 2ab$.
- Pour la troisième identité, il s'agit de s'habituer à identifier des différences de carrés de la forme $a^2 - b^2$.

Application –

- Développer l'expression $A = (8x+4)^2$.
  J'utilise ici la première identité remarquable, $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, avec $a = 8x$ et $b = 4$. Cela donne

$$A = (8x)^2 + 2 \times (8x) \times 4 + 4^2 = 64x^2 + 64x + 16.$$

- Développer l'expression $B = (2x-1)^2$.
  J'utilise ici la deuxième identité remarquable, $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, avec $a = 2x$ et $b = 1$. Cela donne

$$B = (2x)^2 - 2 \times (2x) \times 1 + 1^2 = 4x^2 - 4x + 1.$$

☞ ***Pour s'exercer :*** Exercices 9 et 10.

Remarque – Il est important de comprendre que ces identités remarquables permettent simplement de gagner du temps pour développer. On peut tout à fait développer un carré sans utiliser ces identités remarquables. Par exemple,

$$\begin{aligned}(2x+3)^2 &= (2x+3)(2x+3) = (2x) \times (2x) + (2x) \times 3 + 3 \times (2x) + 3 \times 3 \\ &= 4x^2 + 6x + 6x + 9 = 4x^2 + 12x + 9.\end{aligned}$$

Application –

- Factoriser l'expression $A = 9x^2 + 30x + 25$.
  Je vais ici utiliser la première identité remarquable, $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
  Il s'agit maintenant d'identifier les coefficients a et b :

$$9x^2 = (3x)^2 \quad \text{et} \quad 25 = 5^2.$$

Par ailleurs, $2 \times (3x) \times 5 = 30x$. Ainsi, en posant $a = 3x$ et $b = 5$, j'obtiens que

$$A = a^2 + 2ab + b^2 \quad \text{et donc} \quad A = (a+b)^2 = (3x+5)^2.$$

- Factoriser l'expression $B = 16x^2 - 8x + 1$.
  Je vais ici utiliser la deuxième identité remarquable, $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
  Il s'agit maintenant d'identifier les coefficients a et b :

  $$16x^2 = (4x)^2 \quad \text{et} \quad 1 = 1^2.$$

  Par ailleurs, $2 \times (4x) \times 1 = 8x$. Ainsi, en posant $a = 4x$ et $b = 1$, j'obtiens que

  $$B = a^2 - 2ab + b^2 \quad \text{et donc} \quad B = (a-b)^2 = (4x-1)^2.$$

- Factoriser l'expression $C = (x-2)^2 - 36$.
  Je reconnais ici une différence de carrés : $C = (x-2)^2 - 6^2$.
  Il suffit alors d'utiliser la troisième identité remarquable, $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, avec $a = x-2$ et $b = 6$:

  $$C = (a-b)(a+b) = (x-2-6)(x-2+6) = (x-8)(x+4).$$

☞ ***Pour s'exercer :*** Exercices 12 et 13.

Méthode 1.15 – Détection d'erreurs dans des calculs littéraux

Une façon de détecter des erreurs dans des calculs littéraux consiste à « tester » les différentes expressions pour une valeur numérique particulière.
On est alerté d'une erreur dès qu'il y a discordance entre les résultats obtenus.

Application – Dans l'application précédente, j'ai factorisé l'expression $A = 9x^2+30x+25$ et j'ai obtenu $A = (3x+5)^2$. Autrement dit, j'ai démontré l'égalité

$$9x^2 + 30x + 25 = (3x+5)^2.$$

Pour détecter une éventuelle erreur dans l'égalité, je peux tester différentes valeurs de x :

	$9x^2 + 30x + 25$	$(3x+5)^2$	
$x = 0$	$9 \times 0^2 + 30 \times 0 + 25 = 25$	$(3 \times 0 + 5)^2 = 5^2 = 25$	✓
$x = 1$	$9 \times 1^2 + 30 \times 1 + 25 = 9 + 30 + 25 = 64$	$(3 \times 1 + 5)^2 = 8^2 = 64$	✓

Les exercices d'application

Exercice 1 (⋆) – Simplifier les expressions suivantes.

1. $A = 1 - x + (2x - 3)$
2. $B = -(1 - x) - 1 + x$
3. $C = 2x - 1 - (2x + 1)$
4. $D = (1 - x) - (x - 1)$

Exercice 2 (⋆) – Simplifier au maximum les fractions suivantes.

1. $A = \dfrac{12}{16}$
2. $B = \dfrac{-165}{180}$
3. $C = \dfrac{12x^2}{3x^3}$
4. $D = \dfrac{(x+1)(x-1)}{2(x+1)}$

Exercice 3 (⋆) – Écrire les nombres suivants sous la forme d'une fraction irréductible.

1. $A = \dfrac{1}{4} - \dfrac{2}{5}$
2. $B = \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{16}}$
3. $C = \dfrac{1}{2x} \times \dfrac{2}{3}$
4. $D = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}$

Exercice 4 (⋆⋆) – Écrire ces nombres sous la forme d'un entier ou d'une fraction irréductible.

1. $A = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4}$
2. $B = 2 - \dfrac{13}{7} + \left(1 + \dfrac{5}{2}\right)$
3. $C = \left(\dfrac{2}{3} - \dfrac{3}{4}\right) + 3\left(\dfrac{4}{5} - \dfrac{5}{6}\right)$
4. $D = \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{5}{3}\right) \times \left(3 + \dfrac{7}{4}\right) \div \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{5}{6}\right)$
5. $E = \dfrac{\frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{4}{5} \times \frac{3}{4}}{\frac{2}{5} \times \frac{4}{3} + \frac{1}{3}}$

Exercice 5 (⋆⋆) – Simplifier les nombres et expressions suivants.

1. $A = 3^2 \times 3^{-4} \times 3^7 \times 3$
2. $B = \dfrac{2 \times 2^2 \times 2^3}{2^4 \times 2^5}$
3. $C = \left(2 \times 3^2 \times 3^3\right)^4$
4. $D = \dfrac{2^3 \times 5^4 \times 7^3}{5^3 \times 7^2 \times 2}$
5. $E = 81^5 \times \left(3^{-2}\right)^{-5} \times \dfrac{1}{9}$
6. $F = \dfrac{4^{-2} \times 8^3}{16^3}$
7. $G = \dfrac{9^3 \times 27^2 \times 75}{5^2 \times 3^4}$
8. $H = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{11} \times \left(\dfrac{3}{2}\right)^{10}$
9. $I = \left(a^3\right)^2 \times a^{-4}$
10. $J = a^2 b^{-3} (ab)^4$

Exercice 6 (⋆) – Écrire les nombres suivants sous la forme $a\sqrt{b}$, avec a et b entiers et b étant le plus petit possible.

1. $A = \sqrt{48}$
2. $B = \sqrt{24}$
3. $C = \sqrt{250}$
4. $D = \sqrt{45}$

Exercice 7 (⋆⋆) –

1. Écrire le plus simplement possible les nombres suivants.
   $A = 4\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 6\sqrt{3}$ $B = 7\sqrt{2} - 3\sqrt{5} + 8\sqrt{2} - \sqrt{5}$ $C = (3 - 2\sqrt{3}) - (4 - 6\sqrt{3})$

2. Écrire les expressions suivantes sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont des entiers et b est le plus petit possible.
   $D = \sqrt{12} + 7\sqrt{3} - \sqrt{27}$ $E = \sqrt{125} - 2\sqrt{20} + 6\sqrt{80}$ $F = \dfrac{\sqrt{81}}{\sqrt{242}} \times \sqrt{\dfrac{98}{25}}$

Exercice 8 (⋆) – Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes.

1. $A(x) = -2(3x + 1)$
2. $B(x) = (2x + 3)(3x + 2)$
3. $C(x) = 4(3x - 2)$
4. $D(x) = (2 - 5x)(x - 3)$
5. $E(x) = (x + 3)(x - 2)$
6. $F(x) = (-2x + 3)(x - 1)$

Exercice 9 (⋆) – Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes.

1. $A(x) = (3x + 4)^2$
2. $B(x) = (2x - 3)^2$
3. $C(x) = (5x - 2)(5x + 2)$
4. $D(x) = (-2x - 4)^2$

Exercice 10 (⋆⋆) – Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes.

1. $A(x) = 4(2x + 5) + (x - 3)(5x - 7)$
2. $B(x) = (2x - 3)^2 - (4x + 1)(x - 3)$
3. $C(x) = (x - 3)(x + 5) - (-3x + 2)(x - 5)$
4. $D(x) = (x - 1)^2 - (2x + 1)(2x - 1)$

Exercice 11 (⋆⋆) – Factoriser au maximum les expressions données.

1. $A(x) = 15x - 12$
2. $B(x) = 5x - 5$
3. $C(x) = 6x^2 + 10x$
4. $D(x) = (3x + 2)(4x - 1) + (3x + 2)(-6x + 8)$
5. $E(x) = (3x - 4)^2 - (2x - 5)(3x - 4)$
6. $F(x) = (2x - 3)^2 - (2x - 3)$

Exercice 12 (⋆⋆) – Factoriser au maximum les expressions données.

1. $A(x) = 9x^2 + 42x + 49$
2. $B(x) = 25x^2 - 60x + 36$
3. $C(x) = 9x^2 - 64$
4. $D(x) = x^2 + 2\sqrt{2}x + 2$

Exercice 13 (⋆ ⋆ ⋆) – Factoriser au maximum les expressions données.

1. $A(x) = (2x - 5)(7 + 3x) - (4x^2 - 20x + 25)$
2. $B(x) = (x - 3)(3x + 5) + (9x^2 + 30x + 25)$
3. $C(x) = 3(x + 3)(2x + 3) - (4x^2 - 9)$
4. $D(x) = (2x - 1)^2 - (3 - 5x)^2$

Les corrections des exercices

Exercice 1 – J'applique dans cet exercice la méthode de suppression des parenthèses précédées d'un signe « + » ou « − » (Méthode 1.7).

1. Pour l'expression A, la parenthèse est précédée d'un signe « + », je peux donc la supprimer sans rien changer :

$$A = 1 - x + (2x - 3) = 1 - x + 2x - 3 = x - 2.$$

2. Pour l'expression B, la parenthèse est précédée d'un signe « − ». Je supprime donc la parenthèse en changeant le signe des termes à l'intérieur de la parenthèse :

$$B = -(1 - x) - 1 + x = -1 + x - 1 + x = -2 + 2x.$$

3. Pour l'expression C, la parenthèse est précédée d'un signe « − ». Je supprime donc la parenthèse en changeant le signe des termes à l'intérieur de la parenthèse :

$$C = 2x - 1 - (2x + 1) = 2x - 1 - 2x - 1 = -2.$$

4. Pour l'expression D, il y a deux expressions avec des parenthèses. La première n'est précédée d'aucun signe : cela signifie qu'elle est précédée d'un signe « + ». Je supprime donc les parenthèses sans rien changer. La deuxième expression avec des parenthèses est précédée d'un signe « − ». Je supprime donc les parenthèses en changeant cette fois le signe des termes à l'intérieur :

$$D = (1 - x) - (x - 1) = 1 - x - x + 1 = 2 - 2x.$$

Exercice 2 – J'applique ici la méthode de simplification des fractions (Méthode 1.8).

1. Je remarque que 12 et 16 sont tous les deux des multiples de 4. Ainsi

$$A = \frac{12}{16} = \frac{3 \times \cancel{4}}{4 \times \cancel{4}} = \frac{3}{4}.$$

Je ne peux alors plus simplifier donc

$$A = \frac{3}{4}.$$

2. Je remarque que 165 et 180 sont tous les deux des multiples de 5 (ils se terminent tous les deux par 0 ou 5). Pour diviser un nombre par 5 de tête, je peux par exemple le multiplier par 2 puis le diviser par 10. Ici cela donne :

$$165 \times 2 = 330 \quad \text{et} \quad 330 \div 10 = 33 \quad \text{donc} \quad 165 = 33 \times 5,$$

$$180 \times 2 = 360 \quad \text{et} \quad 360 \div 10 = 36 \quad \text{donc} \quad 180 = 36 \times 5.$$

Je peux donc écrire

$$B = \frac{-165}{180} = \frac{-33 \times \cancel{5}}{36 \times \cancel{5}} = -\frac{33}{36}.$$

Je recommence puisque 33 et 36 sont tous les deux des multiples de 3. En effet, $33 = 3 \times 11$ et $36 = 3 \times 12$. Je peux donc écrire

$$B = -\frac{33}{36} = -\frac{11 \times \cancel{3}}{12 \times \cancel{3}} = -\frac{11}{12}.$$

Je ne peux alors plus simplifier donc

$$B = -\frac{11}{12}.$$

3. Je remarque que $12x^2$ et $3x^3$ sont tous les deux des multiples de 3 puisque $12x^2 = 3 \times 4x^2$ et $3x^3 = 3 \times x^3$. Donc je peux écrire

$$C = \frac{4x^2 \times \cancel{3}}{x^3 \times \cancel{3}} = \frac{4x^2}{x^3}.$$

Puis, comme $4x^2$ et x^3 sont tous les deux des multiples de x^2, j'obtiens que

$$C = \frac{4 \times \cancel{x^2}}{x \times \cancel{x^2}} = \frac{4}{x}.$$

Je ne peux alors plus simplifier donc

$$C = \frac{4}{x}.$$

4. Je peux tout simplement écrire

$$D = \frac{\cancel{(x+1)} \times (x-1)}{2 \times \cancel{(x+1)}} = \frac{x-1}{2}.$$

Je ne peux alors plus simplifier donc

$$D = \frac{x-1}{2}.$$

Exercice 3 – J'applique ici la méthode de manipulation des fractions (Méthode 1.9).

1. $A = \frac{1}{4} - \frac{2}{5}$

$= \frac{5 \times 1}{5 \times 4} - \frac{4 \times 2}{4 \times 5}$

$= \frac{5}{20} - \frac{8}{20}$

$= \frac{5-8}{20}$

$= \frac{-3}{20}$

☜ *Je dois soustraire deux fractions. Les dénominateurs n'étant pas les mêmes, je commence par trouver un dénominateur commun.*

☜ *Une fois que les fractions sont au même dénominateur, il suffit de soustraire les deux numérateurs.*

2. $B = \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{16}}$

$= \dfrac{1}{4} \times \dfrac{16}{3}$

$= \dfrac{1 \times 16}{4 \times 3}$

$= \dfrac{1 \times 4 \times \cancel{4}}{\cancel{4} \times 3}$

$= \dfrac{4}{3}$

☜ *Il s'agit ici d'un quotient de deux fractions. Je multiplie donc la fraction du haut par l'INVERSE de la fraction du bas.*

☜ *Je dois alors multiplier deux fractions entre elles donc j'applique la règle de multiplication des fractions.*

☜ *Avant de faire les calculs, je m'assure qu'il n'y a pas de simplification possible. Ici, je peux simplifier par* 4.

☜ *Il ne me reste alors plus qu'à calculer.*

3. $C = \dfrac{1}{2x} \times \dfrac{2}{3}$

$= \dfrac{1 \times \cancel{2}}{\cancel{2} \times 3x}$

$= \dfrac{1}{3x}$

☜ *Il s'agit ici d'un produit de deux fractions. Je peux donc simplement multiplier numérateurs et dénominateurs entre eux.*

☜ *Avant de faire les calculs, je m'assure qu'il n'y a pas de simplification possible. Ici, je peux simplifier par* 2.

4. $D = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}$

$= \dfrac{(x+1) \times 1}{(x+1) \times x} - \dfrac{x \times 1}{x \times (x+1)}$

$= \dfrac{x+1}{x(x+1)} - \dfrac{x}{x(x+1)}$

$= \dfrac{x+1-x}{x(x+1)}$

$= \dfrac{1}{x(x+1)}$

☜ *Je dois soustraire deux fractions. Les dénominateurs n'étant pas les mêmes, je commence par trouver un dénominateur commun.*

☜ *Une fois que les fractions sont au même dénominateur, il suffit de soustraire les deux numérateurs.*

Exercice 4 – Il s'agit dans cet exercice d'appliquer les règles de manipulation des fractions (Méthode 1.9) tout en faisant bien attention aux règles de priorité de calcul (Méthode 1.11).

1. $A = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4}$

$= \dfrac{6 \times 1}{6 \times 2} - \dfrac{4 \times 1}{4 \times 3} + \dfrac{3 \times 1}{3 \times 4}$

$= \dfrac{6}{12} - \dfrac{4}{12} + \dfrac{3}{12}$

$= \dfrac{6-4+3}{12}$

$= \dfrac{5}{12}$

☜ *Il s'agit d'additions et de soustractions de fractions. Il faut donc commencer par tout mettre au même dénominateur.*

☜ *Une fois que les fractions sont au même dénominateur, il suffit de rassembler les numérateurs.*

2. $B = 2 - \frac{13}{7} + \left(1 + \frac{5}{2}\right)$

$= 2 - \frac{13}{7} + \left(\frac{2}{2} + \frac{5}{2}\right)$

$= 2 - \frac{13}{7} + \frac{7}{2}$

$= \frac{28}{14} - \frac{26}{14} + \frac{49}{14} = \frac{51}{14}$

☜ *Je commence par effectuer le calcul entre parenthèses, en mettant tout au même dénominateur.*

☜ *Puis je mets toutes les fractions restantes au même dénominateur pour les additionner et les soustraire.*

3. $C = \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{4}\right) + 3\left(\frac{4}{5} - \frac{5}{6}\right)$

$= \left(\frac{8}{12} - \frac{9}{12}\right) + 3\left(\frac{24}{30} - \frac{25}{30}\right)$

$= -\frac{1}{12} + 3 \times \left(-\frac{1}{30}\right)$

$= -\frac{1}{12} - \frac{3}{30}$

$= -\frac{5}{60} - \frac{6}{60} = -\frac{11}{60}$

☜ *Je commence par effectuer les calculs entre parenthèses, en mettant tout au même dénominateur.*

☜ *J'effectue la multiplication, prioritaire sur l'addition.*

☜ *Enfin je mets les deux fractions au même dénominateur pour pouvoir les soustraire.*

4. $D = \left(\frac{1}{2} + \frac{5}{3}\right) \times \left(3 + \frac{7}{4}\right) \div \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{6}\right)$

$= \left(\frac{3}{6} + \frac{10}{6}\right) \times \left(\frac{12}{4} + \frac{7}{4}\right) \div \left(\frac{3}{6} - \frac{5}{6}\right)$

$= \frac{13}{6} \times \frac{19}{4} \div \left(-\frac{2}{6}\right)$

$= -\frac{13}{\cancel{6}} \times \frac{19}{4} \times \frac{\cancel{6}}{2}$

$= -\frac{13 \times 19}{4 \times 2} = -\frac{247}{8}$

☜ *Je commence par effectuer les calculs entre parenthèses, en mettant tout au même dénominateur.*

☜ *Diviser par une fraction revient à multiplier par l'inverse.*

☜ *Avant de multiplier numérateurs et dénominateurs entre eux, je m'assure qu'il n'y a pas de simplification.*

5. $E = \dfrac{\frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{\cancel{4}}{5} \times \frac{3}{\cancel{4}}}{\frac{2}{5} \times \frac{4}{3} + \frac{1}{3}}$

$= \dfrac{\frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{3}{5}}{\frac{8}{15} + \frac{1}{3}}$

$= \dfrac{\frac{40}{60} + \frac{45}{60} - \frac{36}{60}}{\frac{8}{15} + \frac{5}{15}}$

$= \dfrac{\frac{49}{60}}{\frac{13}{15}} = \frac{49}{60} \times \frac{15}{13}$

$= \frac{49}{4 \times \cancel{15}} \times \frac{\cancel{15}}{13} = \frac{49}{52}$

☜ *J'effectue en priorité les multiplications, tout en m'assurant de simplifier avant de multiplier.*

☜ *Puis j'effectue les calculs au numérateur et au dénominateur, en mettant tout au même dénominateur.*

☜ *Diviser par une fraction revient à multiplier par l'inverse.*

☜ *Avant de multiplier, j'essaie de simplifier.*

Exercice 5 – Il s'agit dans cet exercice d'appliquer les formules de la Proposition 1.4.

1. $A = 3^2 \times 3^{-4} \times 3^7 \times 3$
   $= 3^{2-4+7+1}$
   $= 3^6$

   ☜ *J'utilise la propriété* $a^m \times a^n = a^{m+n}$ *ainsi que le fait que* $3 = 3^1$.
   ☜ *Je simplifie.*

2. $B = \dfrac{2 \times 2^2 \times 2^3}{2^4 \times 2^5}$
   $= \dfrac{2^{1+2+3}}{2^{4+5}}$
   $= \dfrac{2^6}{2^9}$
   $= 2^{6-9}$
   $= 2^{-3} = \dfrac{1}{2^3}$

   ☜ *J'utilise la même propriété, au numérateur et au dénominateur.*
   ☜ *J'utilise la propriété* $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.
   ☜ *Je peux éventuellement utiliser la Définition 1.3.*

3. $C = (2 \times 3^2 \times 3^3)^4$
   $= (2 \times 3^5)^4$
   $= 2^4 \times (3^5)^4$
   $= 2^4 \times 3^{5\times 4}$
   $= 2^4 \times 3^{20}$

   ☜ *J'utilise la propriété* $a^m \times a^n = a^{m+n}$.
   ☜ *J'utilise la propriété* $(ab)^n = a^n b^n$.
   ☜ *J'utilise la propriété* $(a^m)^n = a^{mn}$.

4. $D = \dfrac{2^3 \times 5^4 \times 7^3}{5^3 \times 7^2 \times 2}$
   $= 2^{3-1} \times 5^{4-3} \times 7^{3-2}$
   $= 2^2 \times 5 \times 7$
   $= 4 \times 35 = 140$

   ☜ *Je rassemble les termes de même base et j'utilise la propriété.*

5. $E = 81^5 \times (3^{-2})^{-5} \times \dfrac{1}{9}$
   $= (3^4)^5 \times (3^{-2})^{-5} \times \dfrac{1}{3^2}$
   $= 3^{4\times 5} \times 3^{(-2)\times(-5)} \times \dfrac{1}{3^2}$
   $= 3^{20} \times 3^{10} \times 3^{-2}$
   $= 3^{20+10-2} = 3^{28}$

   ☜ *Je ne peux utiliser aucune des formules de la Proposition 1.4, mais chacun des termes peut se réécrire comme une puissance de* 3.
   ☜ *J'utilise alors les mêmes propriétés que précédemment.*

6. $F = \dfrac{4^{-2} \times 8^3}{16^3}$
   $= \dfrac{(2^2)^{-2} \times (2^3)^3}{(2^4)^3}$
   $= \dfrac{2^{-4} \times 2^9}{2^{12}}$
   $= 2^{-4+9-12}$
   $= 2^{-7} = \dfrac{1}{2^7}$

   ☜ *Je ne peux utiliser aucune des formules de la Proposition 1.4, mais chacun des termes peut se réécrire comme une puissance de* 2.

7. $G = \dfrac{9^3 \times 27^2 \times 75}{5^2 \times 3^4}$

☜ *L'idée est encore de décomposer les « grands » nombres en produit de petits nombres, éventuellement à une certaine puissance.*

$$= \frac{(3^2)^3 \times (3^3)^2 \times 3 \times 5^2}{5^2 \times 3^4}$$
$$= 3^{6+6+1-4} \times 5^{2-2}$$
$$= 3^9 \times 5^0 = 3^9$$

8. $H = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{11} \times \left(\dfrac{3}{2}\right)^{10}$

☜ *Je décompose mon exposant au numérateur et au dénominateur.*

$$= \frac{2^{11}}{3^{11}} \times \frac{3^{10}}{2^{10}}$$
$$= 2^{11-10} \times 3^{10-11}$$

☜ *Je rassemble les termes de même base et j'utilise la propriété.*

$$= 2^1 \times 3^{-1}$$
$$= \frac{2}{3}$$

9. $I = (a^3)^2 \times a^{-4}$

☜ *Avoir une expression littérale ne change absolument rien.*

$$= a^{6-4}$$
$$= a^2$$

10. $J = a^2 b^{-3} (ab)^4$
$$= a^2 b^{-3} a^4 b^4$$
$$= a^6 b^1$$
$$= a^6 b$$

Exercice 6 – J'applique dans cet exercice la Méthode 1.10.

1. $\sqrt{48} = \sqrt{16 \times 3}$

☜ *Je décompose* 48 *en faisant apparaître un carré parfait :* 16.

$$= \sqrt{16} \times \sqrt{3}$$

☜ *J'applique la première propriété de la Proposition 1.5.*

$$= 4\sqrt{3}$$

☜ *Je simplifie la racine du carré parfait.*

2. $\sqrt{24} = \sqrt{4 \times 6}$
$$= \sqrt{4} \times \sqrt{6}$$
$$= 2\sqrt{6}$$

3. $\sqrt{250} = \sqrt{25 \times 10}$
$$= \sqrt{25} \times \sqrt{10}$$
$$= 5\sqrt{10}$$

4. $\sqrt{45} = \sqrt{9 \times 5}$
$$= \sqrt{9} \times \sqrt{5}$$
$$= 3\sqrt{5}$$

Exercice 7 –

1. Je vais ici regrouper les membres d'une même « famille » de racines carrées.
   Autrement dit, je regroupe les $\sqrt{3}$ ensemble, les $\sqrt{5}$ ensemble, etc.
   - $A = 4\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 6\sqrt{3} = (4-2+6) \times \sqrt{3} = 8\sqrt{3}$
   - $B = 7\sqrt{2} - 3\sqrt{5} + 8\sqrt{2} - \sqrt{5} = 15\sqrt{2} - 4\sqrt{5}$
   - $C = (3 - 2\sqrt{3}) - (4 - 6\sqrt{3}) = 3 - 2\sqrt{3} - 4 + 6\sqrt{3} = -1 + 4\sqrt{3}$
2. L'idée est la même, à savoir regrouper les membres d'une même « famille » de racines carrées. Pour cela, j'utilise la Méthode 1.10 pour faire apparaître ces racines carrées.

   - $D = \sqrt{12} + 7\sqrt{3} - \sqrt{27}$
     $= \sqrt{4 \times 3} + 7\sqrt{3} - \sqrt{9 \times 3}$
     $= 2\sqrt{3} + 7\sqrt{3} - 3\sqrt{3}$
     $= 6\sqrt{3}$

     ☜ *Je factorise 12 et 27 en faisant apparaître des carrés parfaits.*

     ☜ *Je peux alors réduire l'expression en rassemblant les $\sqrt{3}$.*
   - $E = \sqrt{125} - 2\sqrt{20} + 6\sqrt{80}$
     $= \sqrt{25 \times 5} - 2\sqrt{4 \times 5} + 6\sqrt{16 \times 5}$
     $= 5\sqrt{5} - 2 \times 2\sqrt{5} + 6 \times 4\sqrt{5}$
     $= 5\sqrt{5} - 4\sqrt{5} + 24\sqrt{5}$
     $= 25\sqrt{5}$
   - $F = \dfrac{\sqrt{81}}{\sqrt{242}} \times \sqrt{\dfrac{98}{25}}$
     $= \dfrac{\sqrt{81}}{\sqrt{242}} \times \dfrac{\sqrt{98}}{\sqrt{25}}$
     $= \dfrac{9}{\sqrt{121 \times 2}} \times \dfrac{\sqrt{49 \times 2}}{5}$
     $= \dfrac{9}{11\cancel{\sqrt{2}}} \times \dfrac{7\cancel{\sqrt{2}}}{5}$
     $= \dfrac{9}{11} \times \dfrac{7}{5}$
     $= \dfrac{63}{55}$

     ☜ *Je commence par utiliser la propriété de la Proposition 1.5.*

     ☜ *Puis je calcule les racines des carrés parfaits $\sqrt{81}$ et $\sqrt{25}$ et je décompose les autres en faisant apparaître des carrés parfaits.*

     ☜ *Je peux simplifier par $\sqrt{2}$ au numérateur et au dénominateur.*

     ☜ *Il s'agit ensuite d'une simple multiplication de fractions.*

Exercice 8 – J'applique dans cet exercice la Méthode 1.12.

1. $A(x) = -2(3x+1) = -2 \times (3x) - 2 \times 1 = -6x - 2$
2. $B(x) = (2x+3)(3x+2) = 2x \times 3x + 2x \times 2 + 3 \times 3x + 3 \times 2 = 6x^2 + 4x + 9x + 6 = 6x^2 + 13x + 6$
3. $C(x) = 4(3x-2) = 12x - 8$
4. $D(x) = (2-5x)(x-3) = 2x - 6 - 5x^2 + 15x = -5x^2 + 17x - 6$

5. $E(x) = (x+3)(x-2) = x^2 - 2x + 3x - 6 = x^2 + x - 6$
6. $F(x) = (-2x+3)(x-1) = -2x^2 + 2x + 3x - 3 = -2x^2 + 5x - 3$

Exercice 9 – Il s'agit ici d'utiliser la Méthode 1.14 afin de développer les expressions données, en utilisant les trois identités remarquables.

1. Je développe l'expression $A(x) = (3x+4)^2$. J'utilise ici la première identité remarquable, $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, avec $a = 3x$ et $b = 4$:

$$A(x) = (3x+4)^2 = (3x)^2 + 2 \times (3x) \times 4 + 4^2 = 9x^2 + 24x + 16.$$

2. Je développe l'expression $B(x) = (2x-3)^2$. J'utilise ici la deuxième identité remarquable, $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, avec $a = 2x$ et $b = 3$:

$$B(x) = (2x-3)^2 = (2x)^2 - 2 \times (2x) \times 3 + 3^2 = 4x^2 - 12x + 9.$$

3. Je développe l'expression $C(x) = (5x-2)(5x+2)$. J'utilise ici la troisième identité remarquable, $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$, avec $a = 5x$ et $b = 2$:

$$C(x) = (5x-2)(5x+2) = (5x)^2 - 2^2 = 25x^2 - 4.$$

4. Je développe l'expression $D(x) = (-2x-4)^2$. J'utilise ici la deuxième identité remarquable, $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, avec $a = -2x$ et $b = 4$:

$$D(x) = (-2x-4)^2 = (-2x)^2 - 2 \times (-2x) \times 4 + 4^2 = 4x^2 + 16x + 16.$$

Exercice 10 – J'applique alternativement dans cet exercice les Méthodes 1.12 et 1.14.

1. $A(x) = 4(2x+5) + (x-3)(5x-7)$ — *Je développe chaque terme séparément.*
$= 4 \times (2x) + 4 \times 5 + x \times (5x) + x \times (-7)$
$\quad + (-3) \times (5x) + (-3) \times (-7)$
$= 8x + 20 + 5x^2 - 7x - 15x + 21$ — *Puis je regroupe les termes de même nature.*
$= 5x^2 - 14x + 41$

2. $B(x) = (2x-3)^2 - (4x+1)(x-3)$ — *Je développe le premier terme par identité remarquable ($a = 2x$ et $b = 3$) et le second par la Méthode 1.12, sans oublier les parenthèses.*
$= (2x)^2 - 2 \times (2x) \times 3 + 3^2$ — *Je simplifie les expressions avant de supprimer les parenthèses.*
$\quad - \big((4x) \times x + (4x) \times (-3) + 1 \times x + 1 \times (-3)\big)$
$= 4x^2 - 12x + 9 - (4x^2 - 12x + x - 3)$ — *Je supprime les parenthèses en faisant bien attention de changer les signes.*
$= 4x^2 - 12x + 9 - 4x^2 + 12x - x + 3$ — *Je simplifie le tout.*
$= -x + 12$

3. $C(x) = (x-3)(x+5) - (-3x+2)(x-5)$

$= x^2+5x-3x-15-(-3x^2+15x+2x-10)$
$= x^2 + 2x - 15 + 3x^2 - 17x + 10$
$= 4x^2 - 15x - 5$

☜ *Je développe chaque terme séparément, sans oublier les parenthèses.*
☜ *Je simplifie.*
☜ *Je supprime les parenthèses.*

4. $D(x) = (x-1)^2 - (2x+1)(2x-1)$

$= x^2 - 2x + 1 - (4x^2 - 1)$
$= x^2 - 2x + 1 - 4x^2 + 1$
$= -3x^2 - 2x + 2$

☜ *Je développe les deux termes par identité remarquable : $(a-b)^2$ avec $a = x$ et $b = 1$, puis $(a+b)(a-b)$ avec $a = 2x$ et $b = 1$.*

Exercice 11 – J'applique dans cet exercice la Méthode 1.13.

1. $A(x) = 15x - 12$

$= 3 \times 5x - 3 \times 4$

$= 3(5x - 4)$

☜ *$15x$ et 12 sont deux multiples de 3. Je mets en évidence ce facteur commun.*
☜ *Je mets 3 en facteur et les facteurs complémentaires dans une parenthèse commune.*

2. $B(x) = 5x - 5$

$= 5 \times x - 5 \times 1$
$= 5(x - 1)$

☜ *Le facteur commun est évidemment 5. Les facteurs complémentaires sont x et 1.*

3. $C(x) = 6x^2 + 10x$

$= 2x \times 3x + 2x \times 5$
$= 2x(3x + 5)$

☜ *Le facteur commun est $2x$. Les facteurs complémentaires sont $3x$ et 5.*

4. $D(x) = (3x+2)(4x-1) + (3x+2)(-6x+8)$

$= (3x+2)(4x - 1 - 6x + 8)$
$= (3x+2)(-2x+7)$

☜ *Le facteur commun est $3x+2$. Les facteurs complémentaires sont $4x-1$ et $-6x+8$.*

5. $E(x) = (3x-4)^2 - (2x-5)(3x-4)$

$= (3x-4)(3x-4) - (2x-5)(3x-4)$

$= (3x-4)\big(3x - 4 - (2x-5)\big)$
$= (3x-4)(3x - 4 - 2x + 5)$
$= (3x-4)(x+1)$

☜ *Le facteur commun est $3x-4$. Les facteurs complémentaires sont $3x-4$ et $2x-5$.*
☜ *Je pense bien aux parenthèses autour de $2x-5$ pour prendre en compte le signe « − ».*
☜ *Je supprime les parenthèses.*
☜ *Je simplifie.*

6. $F(x) = (2x-3)^2 - (2x-3)$

☜ *Le facteur commun est $2x-3$. Les facteurs complémentaires sont $2x-3$ et 1.*

$$\begin{aligned} &= (2x-3)(2x-3) - (2x-3)\times 1 \\ &= (2x-3)(2x-3-1) \\ &= (2x-3)(2x-4) \end{aligned}$$

Exercice 12 – Il s'agit ici de reconnaître des identités remarquables pour factoriser les expressions données (Méthode 1.14).

1. Je factorise l'expression $A(x) = 9x^2 + 42x + 49$.
   Je vais utiliser la première identité remarquable, $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
   Il s'agit maintenant d'identifier les coefficients a et b :

   $$9x^2 = (3x)^2 \quad \text{et} \quad 49 = 7^2.$$

   Par ailleurs, $2\times(3x)\times 7 = 42x$. Ainsi, en posant $a = 3x$ et $b = 7$, j'obtiens que

   $$A(x) = a^2 + 2ab + b^2 \quad \text{et donc} \quad A(x) = (a+b)^2 = (3x+7)^2.$$

2. Je factorise l'expression $B(x) = 25x^2 - 60x + 36$.
   Je vais ici utiliser la deuxième identité remarquable, $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
   Il s'agit maintenant d'identifier les coefficients a et b :

   $$25x^2 = (5x)^2 \quad \text{et} \quad 36 = 6^2.$$

   Par ailleurs, $2\times(5x)\times 6 = 60x$. Ainsi, en posant $a = 5x$ et $b = 6$, j'obtiens que

   $$B(x) = a^2 - 2ab + b^2 \quad \text{et donc} \quad B(x) = (a-b)^2 = (5x-6)^2.$$

3. Je factorise l'expression $C(x) = 9x^2 - 64$.
   Je reconnais ici une différence de carrés : $C(x) = (3x)^2 - 8^2$.
   Il suffit alors d'utiliser la troisième identité remarquable, $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, avec $a = 3x$ et $b = 8$:

   $$C(x) = (a-b)(a+b) = (3x-8)(3x+8).$$

4. Je factorise l'expression $D(x) = x^2 + 2\sqrt{2}x + 2$.
   Je vais ici utiliser la première identité remarquable, $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
   Il s'agit maintenant d'identifier les coefficients a et b :

   $$x^2 = (x)^2 \quad \text{et} \quad 2 = (\sqrt{2})^2.$$

   Par ailleurs, $2\times(x)\times\sqrt{2} = 2\sqrt{2}x$. Ainsi, en posant $a = x$ et $b = \sqrt{2}$, j'obtiens que

   $$D(x) = a^2 + 2ab + b^2 \quad \text{et donc} \quad D(x) = (a+b)^2 = \left(x+\sqrt{2}\right)^2.$$

Exercice 13 – Dans chacune des expressions, il s'agit dans un premier temps de reconnaître une identité remarquable. Ceci étant fait, une seconde factorisation est souvent possible.

1. $A(x) = (2x-5)(7+3x) - (4x^2 - 20x + 25)$

$= (2x-5)(7+3x) - \left((2x)^2 - 2\times 2x \times 5 + 5^2\right)$
$= (2x-5)(7+3x) - (2x-5)^2$

$= (2x-5)(7+3x) - (2x-5)(2x-5)$
$= (2x-5)\left(7+3x-(2x-5)\right)$

$= (2x-5)(7+3x-2x+5)$
$= (2x-5)(x+12)$

☜ *Je factorise le deuxième terme par la seconde identité remarquable ($a = 2x$ et $b = 5$).*

☜ *Je remarque alors que $2x-5$ est un facteur commun des deux termes.*

☜ *J'ajoute des parenthèses autour de $2x-5$ pour ne pas faire d'erreur de signe.*

2. $B(x) = (x-3)(3x+5) + (9x^2 + 30x + 25)$

$= (x-3)(3x+5) + \left((3x)^2 + 2\times 3x \times 5 + 5^2\right)$
$= (x-3)(3x+5) + (3x+5)^2$

$= (x-3)(3x+5) + (3x+5)(3x+5)$
$= (3x+5)(x-3+3x+5)$
$= (3x+5)(4x+2)$

☜ *Je factorise le deuxième terme par la première identité remarquable ($a = 3x$ et $b = 5$).*

☜ *Je remarque alors que $3x+5$ est un facteur commun des deux termes.*

3. $C(x) = 3(x+3)(2x+3) - (4x^2 - 9)$

$= 3(x+3)(2x+3) - \left((2x)^2 - 3^2\right)$
$= 3(x+3)(2x+3) - (2x-3)(2x+3)$

$= (2x+3)\left(3(x+3) - (2x+3)\right)$

$= (2x+3)(3x+9-2x-3)$
$= (2x+3)(x+6)$

☜ *Je factorise le deuxième terme par la troisième identité remarquable ($a = 2x$ et $b = 3$).*

☜ *Je remarque alors que $2x+3$ est un facteur commun des deux termes.*

☜ *Je n'oublie pas le facteur 3 présent devant le premier produit.*

4. $D(x) = (2x-1)^2 - (3-5x)^2$

$= \left(2x-1-(3-5x)\right)\left(2x-1+(3-5x)\right)$

$= (2x-1-3+5x)(2x-1+3-5x)$
$= (7x-4)(-3x+2)$

☜ *Je factorise l'expression avec la troisième identité remarquable ($a = 2x-1$ et $b = 3-5x$).*

☜ *Je n'oublie pas les parenthèses autour de $3-5x$ pour ne pas faire d'erreur de signe.*

2 | Équations et inéquations (A)

L'essentiel du cours

Définition 2.1 –

- **Résoudre une équation**, c'est donner l'ensemble des réels x qui vérifient l'égalité souhaitée. Généralement, il s'agit d'une liste d'un nombre fini de valeurs.
- Pour le cas d'une **inéquation**, le résultat est généralement donné sous la forme d'un intervalle ou d'une réunion d'intervalles.

Proposition 2.2 – Le degré 1

Soient a et b deux réels avec $a \neq 0$. L'équation $ax + b = 0$ admet pour unique solution

$$x = -\frac{b}{a}.$$

☞ ***Pour continuer :*** Méthode 2.4.



ATTENTION ! Lorsque l'on multiplie ou divise par un réel **négatif** dans une inégalité, il ne faut pas oublier de **changer le sens de l'inégalité**!

Proposition 2.3 – Le degré 2

Soit $ax^2 + bx + c$ un polynôme de degré 2, avec a, b et c des réels et $a \neq 0$.
On appelle **discriminant** et on note Δ le réel défini par

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Pour les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, trois cas sont possibles, selon le signe du discriminant :

- Si $\Delta < 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'admet **aucune** solution réelle.
  Alors le polynôme ne peut pas se factoriser sur $\mathbb{R}$.

- Si $\Delta = 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet **une unique** solution réelle : $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$.
  Alors le polynôme peut se factoriser sous la forme $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$.
- Si $\Delta > 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet **deux** solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

  Alors le polynôme peut se factoriser sous la forme $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

☞ ***Pour continuer :*** Méthode 2.5.

Les méthodes indispensables

Méthode 2.4 – Résoudre une équation/inéquation de degré 1

Le problème à résoudre est donné sous la forme $ax + b = 0$. Le résultat que l'on souhaite obtenir est de la forme « $x = \ldots$ ». L'idée principale est de *« démonter »* tour à tour tous les calculs qui ont été appliqués à x, en débutant par le dernier.
Soit $ax + b = 0$, avec $a \neq 0$. Le dernier calcul opéré est l'addition de b. Pour *défaire* cette opération, il faut **soustraire** b, des deux côtés pour conserver l'égalité.

$$ax + b = 0 \iff ax + b - b = 0 - b \iff ax = -b$$

Le dernier calcul devient alors la multiplication par a. Pour *défaire* cette opération, il faut **diviser** par a, des deux côtés pour conserver l'égalité.

$$ax = -b \iff \frac{ax}{a} = \frac{-b}{a} \iff x = -\frac{b}{a}$$

On obtient alors un résultat de la forme « $x = \ldots$ » : c'est ce que l'on cherchait.
Dans le cas d'une inéquation, la même méthode peut être appliquée, en conservant le même sens d'inégalité **SAUF lorsque l'on multiplie ou divise par un nombre négatif**, auquel cas l'inégalité est retournée.

Application – Résoudre l'équation $2x + 7 = 0$.
Je débute par retirer le « +7 », en soustrayant 7 des deux côtés de l'égalité.

$$2x + 7 = 0 \iff 2x + 7 - 7 = 0 - 7 \iff 2x = -7$$

Je continue en retirant le « $\times 2$ », en divisant par 2 des deux côtés de l'égalité.

$$2x = -7 \iff \frac{2x}{2} = \frac{-7}{2} \iff x = -\frac{7}{2}$$

La solution de l'équation $2x + 7 = 0$ est $x = -\frac{7}{2}$.

☞ ***Pour s'exercer :*** Exercice 15.

Application –

- Résoudre l'inéquation $3x + 4 \geqslant 0$.
  Je débute par retirer le « $+4$ », en soustrayant 4 des deux côtés de l'inégalité.

  $$3x + 4 \geqslant 0 \iff 3x + 4 - 4 \geqslant 0 - 4 \iff 3x \geqslant -4$$

  Je continue en retirant le « $\times 3$ », en divisant par 3 des deux côtés de l'inégalité.

  $$3x \geqslant -4 \iff \frac{3x}{3} \geqslant \frac{-4}{3} \iff x \geqslant -\frac{4}{3}$$

  Les solutions de l'inéquation $3x + 4 \geqslant 0$ sont donc les réels vérifiant $x \geqslant -\frac{4}{3}$,
  i.e. $\mathcal{S} = \left[-\frac{4}{3}, +\infty\right[$.
- Résoudre l'inéquation $-3x + 5 > 0$.
  Je débute par retirer le « $+5$ », en soustrayant 5 des deux côtés de l'inégalité.

  $$-3x + 5 > 0 \iff -3x + 5 - 5 > 0 - 5 \iff -3x > -5$$

  Je continue en retirant le « $\times(-3)$ », en divisant par -3 des deux côtés de l'inégalité, **sans oublier de retourner l'inégalité.**

  $$-3x > -5 \iff \frac{-3x}{-3} < \frac{-5}{-3} \iff x < \frac{5}{3}$$

  Les solutions de l'inéquation $-3x + 5 > 0$ sont donc les réels vérifiant $x < \frac{5}{3}$,
  i.e. $\mathcal{S} = \left]-\infty, \frac{5}{3}\right[$.

☞ ***Pour s'exercer :*** Exercice 17.

Méthode 2.5 – Résoudre une équation de degré 2

Tout d'abord, il faut s'assurer que l'équation correspond bien à l'annulation d'un polynôme de degré 2 :

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Si l'on n'a pas ce « = 0 », alors on ne peut pas résoudre l'équation par cette méthode.
Il faut donc, dans un premier temps, se ramener à une équation de cette forme.
Soit $ax^2 + bx + c = 0$, avec $a \neq 0$.
La première chose à faire est de calculer le discriminant de ce polynôme de degré 2 :

$$\Delta = b^2 - 4 \times a \times c.$$

Il faut faire attention à bien identifier a, b et c, avec leurs signes et ne pas oublier les parenthèses autour du b si celui-ci est négatif. Une fois le discriminant calculé, il ne reste plus qu'à connaître son signe pour trouver les solutions de l'équation.

- $\Delta < 0 \implies$ pas de solution réelle,
- $\Delta = 0 \implies$ une seule solution $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$,
- $\Delta > 0 \implies$ **deux** solutions $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Application –

- Résoudre l'équation $x^2 + 2x + 1 = 0$.
  J'identifie les trois coefficients : $a = 1$, $b = 2$ et $c = 1$.
  Je calcule ensuite le discriminant :

  $$\Delta = b^2 - 4ac = (2)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 4 - 4 = 0.$$

  Il y a donc une unique solution

  $$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2 \times 1} = -1.$$

- Résoudre l'équation $x^2 - 5x + 6 = 0$.
  J'identifie les trois coefficients : $a = 1$, $b = -5$ et $c = 6$.
  Je calcule ensuite le discriminant :

  $$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 25 - 24 = 1 > 0.$$

  Il y a donc deux solutions

  $$x_1 = \frac{-(-5) - \sqrt{1}}{2 \times 1} = \frac{5 - 1}{2} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(-5) + \sqrt{1}}{2 \times 1} = \frac{5 + 1}{2} = 3.$$