

Conçu par un collectif de 44 professeurs en classes préparatoires
Sous la direction de Colas Bardavid et Catherine Lavainne

Cahier d'entraînement en physique

Classes prépas PC/PC*

Auto-entraînement

l'intégrale

DUNOD

Couverture : création Hokus Pokus, adaptation Studio Dunod

© Dunod, 2025
11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-088488-9

Sommaire

<i>Mode d'emploi du cahier d'entraînement</i>	v
---	---

Généralités

☐ Fiche 1. Opérateurs vectoriels	3
---	---

Mécanique

☐ Fiche 2. Changements de référentiel	11
--	----

Électromagnétisme en régime permanent

☐ Fiche 3. Électrostatique	21
☐ Fiche 4. Magnétostatique	31

Électromagnétisme en régime variable

☐ Fiche 5. Équations de Maxwell	40
☐ Fiche 6. Induction	52
☐ Fiche 7. Ondes électromagnétiques I	64
☐ Fiche 8. Ondes électromagnétiques II	74

Optique

☐ Fiche 9. Modèle scalaire de la lumière	82
☐ Fiche 10. Interférences à deux ondes	90
☐ Fiche 11. Interférences à N ondes	98

Thermodynamique

☐ Fiche 12. Outils mathématiques pour la diffusion	109
☐ Fiche 13. Diffusion particulière	113
☐ Fiche 14. Diffusion thermique	122
☐ Fiche 15. Transferts thermiques	133
☐ Fiche 16. Tables et diagrammes thermodynamiques	141
☐ Fiche 17. Thermodynamique industrielle	150

Électronique

☐	Fiche 18. Signaux	156
☐	Fiche 19. ALI	168
☐	Fiche 20. Oscillateurs électroniques	177

Physique moderne

☐	Fiche 21. Physique quantique.....	184
☐	Fiche 22. Physique du laser.....	193

Ondes

☐	Fiche 23. Propagation des ondes et interfaces.....	203
☐	Fiche 24. Propagation des ondes et dispersion	210

Mécanique des fluides

☐	Fiche 25. Cinématique des fluides.....	218
☐	Fiche 26. Dynamique des fluides.....	225
☐	Fiche 27. Bilans en mécanique des fluides.....	235

Réponses et corrigés

Réponses et corrigés	244
----------------------------	-----

Mode d'emploi

Qu'est-ce que le cahier d'entraînement ?

Le *cahier d'entraînement en physique* est un outil destiné à renforcer l'acquisition de **réflexes utiles en physique**.

Il ne se substitue en aucun cas aux TD donnés par votre professeur ; travailler avec ce cahier d'entraînement vous permettra en revanche d'aborder avec plus d'aisance les exercices de physique.

Pour donner une analogie, on pourrait dire que ce cahier d'entraînement est comparable aux **exercices de musculation** d'un athlète : ils sont nécessaires pour mieux réussir le jour J lors de la compétition, mais ils ne sont pas suffisants. Un coureur de sprint fait de la musculation, mais il fait également tout un tas d'autres exercices.

Pour vous aider à mieux vous entraîner, nous avons ajouté quelques exercices sur des thèmes qui ne figurent pas au programme, en prenant soin de rappeler, dans ce cas, les équations en jeu. Il faut voir ces exercices comme des occasions supplémentaires pour s'entraîner à manipuler des mathématiques au service de la physique.

Ce cahier a été conçu par une large équipe de professeurs en classes préparatoires, tous soucieux de vous apporter l'aide et les outils pour réussir.

Comment est-il organisé ?

Le cahier est organisé en *fiches d'entraînement*, chacune correspondant à un thème issu de votre programme de deuxième année.

Chaque fiche est composée d'une suite de petits exercices, appelés *entraînements*, dont le temps de résolution estimé est indiqué par une (●●●●), deux (●●●●), trois (●●●●) ou quatre (●●●●) horloges.

Les pictogrammes

Certains entraînements sont accompagnés d'un pictogramme.



Ces entraînements sont **basiques et transversaux**.

Les compétences qu'ils mettent en jeu ne sont pas forcément spécifiques au thème de la fiche et peuvent être transversales.

Ce pictogramme a été choisi parce que le bulldozer permet de construire les fondations et que c'est sur des fondations solides que l'on bâtit les plus beaux édifices. Ces entraînements sont donc le gage pour vous d'acquérir un socle solide de savoir-faire.



Ces entraînements vous entraînent au **calcul à la main**.

Dans ces entraînements, les calculs doivent être faits **sans calculatrice**.

Comment utiliser ce cahier ?

Le cahier d'entraînement ne doit pas remplacer vos TD. Il s'agit d'un outil à utiliser en complément de votre travail « normal » en physique (apprentissage du cours, recherche de TD, recherche des DM).

Un travail personnalisé.

Le cahier d'entraînement est prévu pour être **utilisé en autonomie**.

Choisissez vos entraînements en fonction des difficultés que vous rencontrez, des chapitres que vous étudiez, ou bien en fonction des conseils de votre professeur.

Ne cherchez pas à faire linéairement ce cahier : les fiches ne sont pas à faire dans l'ordre mais en fonction des points que vous souhaitez travailler.

Un travail régulier.

Pratiquez l'entraînement à un rythme régulier : **une dizaine de minutes par jour** par exemple. Privilégiez un travail régulier sur le long terme plutôt qu'un objectif du type « faire dix fiches par jour pendant les vacances ».

Un travail efficace.

Utilisez les réponses et les corrigés de façon appropriée : il est important de chercher suffisamment par vous-même avant d'aller les regarder. Il faut vraiment **persévérer** dans votre raisonnement et vos calculs avant d'aller voir le corrigé si vous voulez que ces entraînements soient efficaces.

Une erreur ? Une remarque ?

Si jamais vous voyez une erreur d'énoncé ou de corrigé, ou bien si vous avez une remarque à faire, n'hésitez pas à écrire à l'adresse cahier.entrainement@gmail.com.

Si vous pensez avoir décelé une erreur, merci de donner aussi l'identifiant de la fiche, écrit en gris en haut à gauche de chaque fiche.

Énoncés

Opérateurs vectoriels

Prérequis

Notation avec et sans le symbole nabla $\vec{\nabla}$ des opérateurs :

- gradient : $\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \vec{\nabla}f$
- divergence : $\text{div}(\vec{A}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$
- rotationnel : $\overrightarrow{\text{rot}}(f) = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$

Expressions de ces opérateurs vectoriels en coordonnées cartésiennes.

Dans toute cette fiche, les grandeurs a , b et c sont des constantes ayant la dimension d'une longueur.

Sur l'opérateur gradient

Entraînement 1.1 — Quelle écriture pour le gradient ?



Le gradient est un opérateur vectoriel qui s'applique à des fonctions scalaires. Pour un système de coordonnées cartésiennes (x, y, z) décrivant l'espace, la définition du gradient d'une fonction $f(x, y, z)$ est :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \vec{\nabla}(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z.$$

On considère la fonction $V(x, y, z) = xyz$. Quelle est la bonne expression du gradient de V ?

(a) $\nabla(V) = zy \vec{e}_x + zx \vec{e}_y + yx \vec{e}_z$

(c) $\overrightarrow{\text{grad}}(V) = zy \vec{e}_y + zx \vec{e}_x + yx \vec{e}_z$

(b) $\text{grad}(\vec{V}) = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ yz \end{pmatrix}$

(d) $\vec{\nabla}(V) = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix}$

.....



Entraînement 1.2 — Calcul de gradients en coordonnées cartésiennes.



On munit l'espace d'un repère cartésien dont le système de coordonnées est noté (x, y, z) .

On rappelle l'expression de l'opérateur gradient dans ce système de coordonnées :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f(x, y, z)) = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z.$$

Développer les expressions suivantes :

a) $\overrightarrow{\text{grad}}\left(xy + yz + zx + \frac{xyz}{a}\right) \dots\dots\dots$

b) $\overrightarrow{\text{grad}}(3x^2 + 2a(y - z) + b^2) \dots\dots\dots$

- c) $\overrightarrow{\text{grad}}(x^2y + y^2z + z^2x + a^3) \dots\dots\dots$
- d) $\overrightarrow{\text{grad}}\left(2xy + 8a^2e^{z/(2b)} - 6c^2\right) \dots\dots\dots$
- e) $\overrightarrow{\text{grad}}\left(8x^2y + \frac{6a^4}{y} - 5b^2z\right) \dots\dots\dots$



Entraînement 1.3 — Calcul de gradients en coordonnées cylindriques.



On munit l'espace d'un repère cylindrique dont le système de coordonnées est noté (r, θ, z) .

On donne l'expression de l'opérateur gradient dans ce système de coordonnées :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f(r, \theta, z)) = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z.$$

Développer les expressions suivantes :

- a) $\overrightarrow{\text{grad}}\left(3z - \frac{r^2}{a} - 2r\theta\right) \dots\dots\dots$
- b) $\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{a^2}{r^2}e^{5\theta}\right) \dots\dots\dots$
- c) $\overrightarrow{\text{grad}}\left(\sqrt{r^2 - a^2}\right) \dots\dots\dots$
- d) $\overrightarrow{\text{grad}}\left(7\theta\left(\frac{r}{a}\right)^4 + \ln(z/b)\right) \dots\dots\dots$
- e) $\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{z}{r} \sin(\theta)\right) \dots\dots\dots$

Entraînement 1.4 — La bonne formule.



On introduit deux systèmes de coordonnées pour décrire un plan : des coordonnées cartésiennes (x_1, x_2) et des coordonnées polaires (ρ, α) .

Parmi les formules suivantes de gradient à deux dimensions d'une fonction scalaire g du plan, identifier la seule écriture valable :

Ⓐ $\overrightarrow{\text{grad}}(g(x_1, x_2)) = \frac{\partial g}{\partial x_1} \vec{e}_{x_1} + \frac{\partial g}{\partial x_2} \vec{e}_{x_2}$

Ⓒ $\overrightarrow{\text{grad}}(g(r, \alpha)) = \frac{\partial g}{\partial \rho} \vec{e}_\rho + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial \alpha} \vec{e}_\alpha$

Ⓑ $\vec{\nabla} g(x_1, x_2) = \frac{\partial g}{\partial x_2} \vec{e}_{x_1} + \frac{\partial g}{\partial x_1} \vec{e}_{x_2}$

Ⓓ $\vec{\nabla} \cdot g(r, \rho) = \frac{\partial g}{\partial \rho} \vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial g}{\partial \alpha} \vec{e}_\alpha$

.....



Entraînement 1.5 — Valeurs et projections d'un gradient.



On munit l'espace d'un repère cartésien dont le système de coordonnées est noté (x, y, z) .

On donne l'expression de l'opérateur gradient dans ce système de coordonnées :

$$\vec{\nabla}(f(x, y, z)) = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z.$$

On considère la fonction $g(x, y, z) = (x - 2)^2 + (y + 1)^2 + z^2 - 1$, on note $M(x, y, z)$ un point quelconque de l'espace et A le point de coordonnées $(-1, 1, 2)$.

a) Calculer $g(A)$

b) La quantité $2z$ correspond à :

(a) $\vec{\text{grad}}(g) \cdot \vec{e}_x$

(c) $\vec{\text{grad}}(g) \cdot \vec{e}_z$

(b) $\vec{\text{grad}}(g) \cdot \vec{e}_y$

.....

c) La quantité $2y + 2$ correspond à :

(a) $\vec{\text{grad}}(g) \cdot \vec{e}_x$

(c) $\vec{\text{grad}}(g) \cdot \vec{e}_z$

(b) $\vec{\text{grad}}(g) \cdot \vec{e}_y$

.....

d) La quantité $2x - 4$ correspond à :

(a) $\vec{\text{grad}}(g) \cdot \vec{e}_x$

(c) $\vec{\text{grad}}(g) \cdot \vec{e}_z$

(b) $\vec{\text{grad}}(g) \cdot \vec{e}_y$

.....

e) La quantité $\vec{\nabla}g(M)$ correspond au vecteur :

(a) $\begin{pmatrix} 2(x-2) \\ 2(y-1) \\ 2z \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 2(y-1) \\ 2(x+2) \\ 2z \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 2(x-2) \\ 2(y+1) \\ 2z \end{pmatrix}$

.....

f) Calculer $\|\vec{\nabla}g(A)\|$



Entraînement 1.6 — Enquête sur une fonction.



On considère une fonction $f(x, y, z)$ inconnue telle que $\vec{\text{grad}}(f) = 2xy\vec{e}_x + x^2\vec{e}_y + a^2\vec{e}_z$.

a) Quelle est l'unique relation valable ?

(a) $\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} = 2xy$

(b) $\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} = x^2$

(c) $\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} = y$

.....

b) Quelle primitive est solution de la réponse précédente ?

(a) $f(x, y, z) = xy^2 + g(x, y)$

(c) $f(x, y, z) = x^2y + yx^2$

(b) $f(x, y, z) = x^2y + g(y, z)$

.....

c) Que vérifie la dérivée partielle par rapport à y de la réponse précédente ?

(a) $\frac{\partial g}{\partial y} = 0$

(b) $\frac{\partial g}{\partial y} = x^2$

(c) $\frac{\partial g}{\partial y} = 1$

.....

d) En s'appuyant sur les réponses précédentes, quelle est la bonne expression de g ?

(a) $g = a^2y + \text{cste}$

(b) $g = a^2z + \text{cste}$

(c) $g = a^2 + \text{cste}$

e) Quelle est l'expression de la fonction $f(x, y, z)$ telle que $f(0, 0, 0) = 0$?

(a) $f = x^2y + a^2z$

(b) $f = y^2z + a^2x$

(c) $f = x^2z + a^2y$

Sur l'opérateur divergence



Entraînement 1.7 — Calcul de divergences en coordonnées cartésiennes.



On munit l'espace d'un repère cartésien dont le système de coordonnées est noté (x, y, z) .

On donne l'expression de l'opérateur divergence dans ce système de coordonnées :

$$\text{div}(\vec{A}) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

Développer les expressions suivantes :

a) $\text{div}(3x^2\vec{e}_x + 2ay\vec{e}_y - 2bz\vec{e}_z)$

b) $\text{div}(2xy\vec{e}_y + 8a^2e^{\frac{x}{2b}}\vec{e}_z - 6b^2\vec{e}_x)$

c) $\text{div}\left(8x^2y\vec{e}_x + \frac{6x^4}{y}\vec{e}_y\right)$

d) $\text{div}(xe_z + ze_x)$

e) $\text{div}(x^2y\vec{e}_x - yx^2(\vec{e}_y - \vec{e}_z))$



Entraînement 1.8 — Calcul de divergences en coordonnées cylindriques.



On munit l'espace d'un repère cylindrique dont le système de coordonnées est noté (r, θ, z) .

On donne l'expression de l'opérateur divergence dans ce système de coordonnées :

$$\text{div}(\vec{A}) = \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

Développer les expressions suivantes :

a) $\text{div}\left(-\frac{r^2}{a}\vec{e}_r - 2r\theta\vec{e}_\theta + 3z\vec{e}_z\right)$

b) $\text{div}(r\vec{e}_\theta)$

Entraînement 1.9 — Bataille de divergences.



Quel est le champ dont la divergence au point $A(-1, -1, 1)$ est maximale ?

- (a) $x^2\vec{e}_x + y^2\vec{e}_y + z^2\vec{e}_z$ (c) $z^2\vec{e}_x + x^2\vec{e}_y + y^2\vec{e}_z$
 (b) $y^2\vec{e}_x + x^2\vec{e}_y + z^2\vec{e}_z$ (d) $y^2\vec{e}_x + x^2\vec{e}_z + z^2\vec{e}_y$



Entraînement 1.10 — Choix du système de coordonnées.



On munit l'espace d'un système de coordonnées cartésiennes (x, y, z) et d'un système de coordonnées sphériques (r, θ, φ) . On s'intéresse au champ vectoriel $\vec{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z = r\vec{e}_r$ et on donne l'expression de l'opérateur divergence en coordonnées sphériques :

$$\text{div}(\vec{A}) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 A_r}{\partial r} + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial (\sin(\theta) A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}.$$

Développer les expressions suivantes :

- a) $\text{div}(x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z) \dots\dots\dots$ b) $\text{div}(r\vec{e}_r) \dots\dots\dots$

On munit l'espace de dimension 2 d'un système de coordonnées cylindro-polaires (r, θ) .

On s'intéresse au champ vectoriel $\vec{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y = r\vec{e}_r$.

c) La divergence de ce champ (définie dans l'entraînement 1.8), en tout point, vaut :

- (a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

Sur l'opérateur rotationnel



Entraînement 1.11 — Calcul de rotationnels en coordonnées cartésiennes.



On munit l'espace d'un repère cartésien dont le système de coordonnées est noté (x, y, z) .

On donne l'expression de l'opérateur rotationnel dans ce système de coordonnées :

$$\vec{\text{rot}}(\vec{A}) = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z.$$

Développer les expressions suivantes :

- a) $\vec{\text{rot}}(3x^2\vec{e}_x + 2by\vec{e}_y - 2cz\vec{e}_z) \dots\dots\dots$
 b) $\vec{\text{rot}}(2xy\vec{e}_x + 8c^2e^{\frac{x}{2c}}\vec{e}_y - 6c^2\vec{e}_z) \dots\dots\dots$
 c) $\vec{\text{rot}}\left(8x^2y\vec{e}_x + \frac{6x^4}{y}\vec{e}_y\right) \dots\dots\dots$
 d) $\vec{\text{rot}}(-x\vec{e}_z + z\vec{e}_x) \dots\dots\dots$
 e) $\vec{\text{rot}}(x^2y\vec{e}_x - yx^2(\vec{e}_y - \vec{e}_z)) \dots\dots\dots$



Entraînement 1.12 — Calcul de rotationnels en coordonnées cylindriques.



On munit l'espace d'un repère cylindrique dont le système de coordonnées est noté (r, θ, z) .

On donne l'expression de l'opérateur divergence dans ce système de coordonnées :

$$\vec{\text{rot}}(\vec{A}) = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r A_\theta}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z.$$

Développer les expressions suivantes :

a) $\vec{\text{rot}}\left(-\frac{r^2}{a}\vec{e}_r - 2r\theta\vec{e}_\theta + 3z\vec{e}_z\right)$

b) $\vec{\text{rot}}(r\vec{e}_\theta)$

Sur la représentation graphique



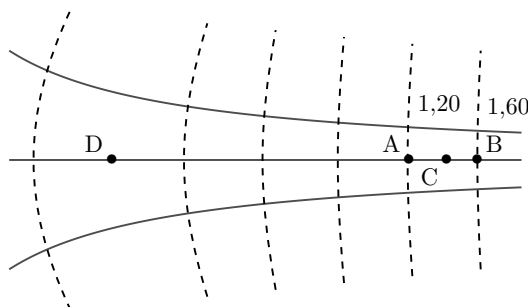
Entraînement 1.13 — Exploiter une carte de champ.



On considère un champ $\vec{v}(M)$ dérivant d'un gradient de potentiel Φ , c'est-à-dire tel qu'en tout point M :

$$\vec{v}(M) = \vec{\text{grad}} \Phi(M)$$

La figure ci-dessous représente les lignes de champ (en trait plein) et les équipotentielles (en tirets). Le système est invariant par translation orthogonalement au plan de la figure. Les valeurs du potentiel $\Phi(M)$ sont données pour chaque équipotentielle en UA (unité arbitraire).



On admet que le champ est tel que $\text{div } \vec{v} = \vec{0}$, c'est-à-dire à flux conservatif. Autrement dit, le long d'un tube de champ de section S , la quantité vS est conservée.

a) Par rapport aux équipotentielles, les lignes de champ sont orientées :

(a) parallèlement

(b) orthogonalement

(c) aléatoirement

.....

b) Estimer graphiquement $v(C)$ en UA/m sachant que $AB \approx 50 \text{ cm}$

c) Le vecteur $\vec{v}(C)$ est orienté dans le sens du vecteur :

(a) $\overrightarrow{AB}$

(b) $\overrightarrow{BA}$

.....

d) Estimer graphiquement $\frac{v(C)}{v(D)}$ en calculant un rapport de longueurs

Sur les opérateurs laplaciens



Entraînement 1.14 — Opérateur laplacien scalaire en coordonnées cartésiennes.



On munit l'espace d'un repère cartésien dont le système de coordonnées est noté (x, y, z) .

On donne l'expression de l'opérateur laplacien (scalaire) dans ce système de coordonnées :

$$\Delta(f(x, y, z)) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Développer les expressions suivantes :

a) $\Delta\left(\frac{x^2 y}{a} + bz + c^2\right)$

b) $\Delta(y^2 - 5az)$

c) $\Delta\left(b^2 \ln\left(\frac{z}{a}\right) + 3x^2\right)$



Entraînement 1.15 — Opérateur laplacien vectoriel en coordonnées cartésiennes.



On munit l'espace d'un repère cartésien dont le système de coordonnées est noté (x, y, z) .

On donne l'expression de l'opérateur laplacien (vectoriel) dans ce système de coordonnées :

$$\Delta(\vec{A}(x, y, z)) = \Delta A_x \vec{e}_x + \Delta A_y \vec{e}_y + \Delta A_z \vec{e}_z.$$

On dispose d'un vecteur $\vec{A}$ dont les coordonnées cartésiennes sont les suivantes :

$$\begin{pmatrix} \frac{x^2 y}{a} + bz + c^2 \\ y^2 - 5az \\ b^2 \ln\left(\frac{z}{a}\right) + 3x^2 \end{pmatrix}.$$

Développer $\Delta\vec{A}$

Bilan sur les opérateurs



Entraînement 1.16 — scalaire ou vecteur ?



Les différents opérateurs rencontrés peuvent être des opérateurs :

- | | |
|--|---|
| (a) scalaires s'appliquant à des scalaires | (c) vectoriels s'appliquant à des scalaires |
| (b) scalaires s'appliquant à des vecteurs | (d) vectoriels s'appliquant à des vecteurs |

- | | |
|--|----------------------|
| a) Quel cas correspond à l'opérateur « gradient » ? | <input type="text"/> |
| b) Quel cas correspond à l'opérateur « divergence » ? | <input type="text"/> |
| c) Quel cas correspond à l'opérateur « rotationnel » ? | <input type="text"/> |
| d) Quel cas correspond à l'opérateur « laplacien » appliqué à un champ scalaire ? | <input type="text"/> |
| e) Quel cas correspond à l'opérateur « laplacien » appliqué à un champ vectoriel ? | <input type="text"/> |

Réponses mélangées

0	(b)	(b)	(c)	$\frac{r}{\sqrt{r^2 - a^2}} \vec{e}_r$	$\left(z + y + \frac{yz}{a}\right) \vec{e}_x + \left(x + z + \frac{xz}{a}\right) \vec{e}_y$
					$+ \left(x + y + \frac{yx}{a}\right) \vec{e}_z$
$28 \frac{\theta r^3}{a^4} \vec{e}_r + 7 \frac{r^3}{a^4} \vec{e}_\theta + \frac{1}{z} \vec{e}_z$	3	(b)		$-\frac{2a^2}{r^3} e^{5\theta} \vec{e}_r + \frac{5a^2}{r^3} e^{5\theta} \vec{e}_\theta$	(d) (a)
$6x \vec{e}_x + 2a \vec{e}_y - 2a \vec{e}_z$	2	(a)	(a)	$-4ce^{\frac{z}{2c}} \vec{e}_x - 2x \vec{e}_z$	$\frac{8x^2}{y} (3x - y) \vec{e}_z$
$x^2 \vec{e}_x - 2xy(\vec{e}_y + \vec{e}_z) - x^2 \vec{e}_z$	$2 \vec{e}_z$	$2x + 4 \frac{a^2}{b} e^{\frac{z}{2b}}$	(b)	16	(a) $\vec{0}$
$2y \vec{e}_x + 2x \vec{e}_y + 4 \frac{a^2}{b} e^{z/(2b)} \vec{e}_z$	$-4\theta \vec{e}_z$	$16xy \vec{e}_x + \left(8x^2 - \frac{6a^4}{y^2}\right) \vec{e}_y - 5b^2 \vec{e}_z$	(b)		
$16xy - \frac{6x^4}{y^2}$	$\frac{2y}{a}$	(c)	$\begin{pmatrix} \frac{2y}{a} \\ \frac{a}{2} \\ b^2 \\ 6 - \frac{z^2}{2} \end{pmatrix}$	$-3 \frac{r}{a} + 1$	$(2xy + z^2) \vec{e}_x + (2yz + x^2) \vec{e}_y$ $+ (2xz + y^2) \vec{e}_z$
0,80 UA/m	$2\sqrt{17}$	3	$\left(-\frac{2r}{a} - 2\theta\right) \vec{e}_r - 2 \vec{e}_\theta + 3 \vec{e}_z$	(d)	
$-\frac{z \sin(\theta)}{r^2} \vec{e}_r + \frac{z \cos \theta}{r^2} \vec{e}_\theta + \frac{\sin(\theta)}{r} \vec{e}_z$	$x(2y - x)$	2	$6x + 2a - 2b$		
(a)	(d)	(a)	$2 \vec{e}_y$	(b)	(c)
					(a)
					$6 - \frac{b^2}{z^2}$
					0
					(b)

► Réponses et corrigés page 245

Changements de référentiel

Prérequis

Principe fondamental. Mouvement relatif de référentiels. Forces d'inertie.

Constantes utiles

→ Accélération de la pesanteur : $g = 9,81 \text{ m/s}^2$

Avant toute chose



Entraînement 2.1 — Trajectoires et référentiels.

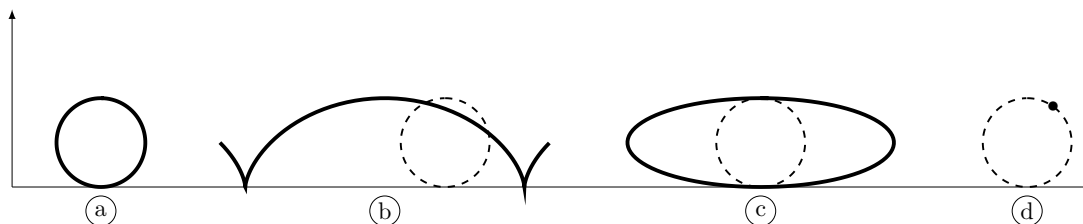


On s'intéresse ici au mouvement de la valve V d'une roue de vélo. En changeant de référentiel, la trajectoire de ce point peut être perçue de manière différente.

On définit trois référentiels :

- le référentiel $\mathcal{R}_1$ lié à la Terre,
- le référentiel $\mathcal{R}_2$ lié au cadre du vélo,
- le référentiel $\mathcal{R}_3$ lié à la roue du vélo.

Voici différentes trajectoires pour le point V.



Parmi les quatre trajectoires présentées ci-dessus, quelle est celle qui peut correspondre à un mouvement décrit dans :

a) le référentiel $\mathcal{R}_1$?

b) le référentiel $\mathcal{R}_2$?

c) le référentiel $\mathcal{R}_3$?

Entraînement 2.2 — Référentiel galiléen... ou pas (I) ?



Un référentiel galiléen est un référentiel dans lequel tout solide ne subissant aucune force extérieure est immobile ou animé d'un mouvement rectiligne uniforme. Tout référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport à un référentiel galiléen est lui-même galiléen.

On considère un référentiel $\mathcal{R}_0(\text{O}, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ galiléen ainsi que les trois référentiels suivants :

- $\mathcal{R}_1(\text{O}', \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, en translation rectiligne uniforme par rapport à $\mathcal{R}_0$,
- $\mathcal{R}_2(\text{O}, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$, animé d'un mouvement de rotation uniforme par rapport à $\mathcal{R}_0$,
- $\mathcal{R}_3(\text{A}, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, en translation non uniforme par rapport à $\mathcal{R}_0$.

a) $\mathcal{R}_1$ est un référentiel galiléen : vrai ou faux ?

b) $\mathcal{R}_2$ est un référentiel galiléen : vrai ou faux ?

c) $\mathcal{R}_3$ est un référentiel galiléen : vrai ou faux ?

Entraînement 2.3 — Référentiel galiléen... ou pas (II) ?



Un référentiel galiléen est un référentiel dans lequel tout solide ne subissant aucune force extérieure est animé d'un mouvement rectiligne uniforme. Tout référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport à un référentiel galiléen est lui-même galiléen.

Dans le référentiel terrestre, supposé galiléen, on s'intéresse aux mouvements d'un train et de l'un des passagers à bord. On note $\mathcal{R}_t$ le référentiel lié au train et $\mathcal{R}_p$ le référentiel lié au passager à bord du train.

Dans chacune des situations proposées, indiquez quel(s) est (sont) le(s) référentiel(s) galiléen(s) parmi les options suivantes :

- (a) $\mathcal{R}_t$ et $\mathcal{R}_p$
- (b) ni $\mathcal{R}_t$ ni $\mathcal{R}_p$
- (c) uniquement $\mathcal{R}_t$
- (d) uniquement $\mathcal{R}_p$

a) Le train suit une ligne droite à vitesse constante ; le passager est assis sur son siège.

.....

b) Le train suit une courbe à vitesse constante ; le passager est assis sur son siège.

.....

c) Le train freine sur une ligne droite ; le passager marche le long du train à vitesse constante.

.....

d) Le train suit une courbe à vitesse constante ; le passager marche le long du train.

.....

Composition de mouvements

Entraînement 2.4 — Autour de l'accélération.



On considère un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen lié au repère $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ et un référentiel $\mathcal{R}'$, lié au repère cylindrique $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$. Un point M, en mouvement dans ces deux référentiels, est repéré par ses coordonnées cylindriques habituelles r, θ et $z = 0$. L'angle θ suit la loi : $\theta = \omega t$ où ω est une constante.

• Caractérisation du mouvement de $\mathcal{R}'$ par rapport au référentiel $\mathcal{R}$

a) Le vecteur rotation du référentiel $\mathcal{R}'$ par rapport au référentiel $\mathcal{R}$, $\vec{\Omega}$, vaut :

- (a) $\theta \vec{e}_z$ (b) $-\dot{\theta} \vec{e}_x$ (c) $\omega \vec{e}_z$ (d) $\dot{\omega} \vec{e}_z$

.....

b) Le référentiel $\mathcal{R}'$ est galiléen.

- (a) Vrai (b) Faux

.....

• Composantes de l'accélération de M dans le référentiel $\mathcal{R}$

c) Par homogénéité, identifier l'expression de l'accélération radiale a_r de M dans $\mathcal{R}$ en coordonnées cylindriques.

- (a) $\ddot{r} - r\dot{\theta}^2$ (b) $\dot{r} - r^2\dot{\theta}$ (c) $\ddot{r} - r^2\dot{\theta}^2$ (d) $\ddot{r} - r^2\dot{\theta}$

.....

d) Par homogénéité, identifier l'expression de l'accélération orthoradiale a_θ de M dans $\mathcal{R}$ en coordonnées cylindriques.

- (a) $2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}$ (b) $2\ddot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}$ (c) $2\dot{r}\ddot{\theta} + r\ddot{\theta}$ (d) $2\dot{r}\ddot{\theta}$

.....

• Composition des accélérations

La loi de composition des accélérations assure que :

$$\vec{a}_{\mathcal{R}}(M) = \vec{a}_{\mathcal{R}'}(M) + \vec{a}_e + \vec{a}_C,$$

avec $\vec{a}_{\mathcal{R}}(M) = \frac{d^2 \vec{OM}}{dt^2} \Big|_{\mathcal{R}}$, $\vec{a}_{\mathcal{R}'}(M) = \frac{d^2 \vec{OM}}{dt^2} \Big|_{\mathcal{R}'}$ et, comme $\mathcal{R}'$ est en rotation uniforme autour d'un axe fixe par rapport à $\mathcal{R}$,

$$\vec{a}_e = \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{OM}) \quad \text{et} \quad \vec{a}_C = 2\vec{\Omega} \wedge \frac{d\vec{OM}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}'}.$$

e) Exprimer $\vec{a}_e$ en fonction de r, ω et d'un vecteur unitaire de la base cylindrique ..

f) Exprimer $\vec{a}_C$ en fonction de $\dot{r}, \omega$ et d'un vecteur unitaire de la base cylindrique ..

g) En déduire l'accélération $\vec{a}_{\mathcal{R}'}(M)$

Forces d'inertie

Entraînement 2.5 — Forces d'inertie à prendre en compte.



Le référentiel terrestre $\mathcal{R}_t$ est considéré galiléen. On considère l'étude d'une masse ponctuelle M dont on observe le mouvement dans différents référentiels $\mathcal{R}_i$ en mouvement par rapport à $\mathcal{R}_t$.

On définit les quatre référentiels suivants :

- $\mathcal{R}_1$ lié à un manège en rotation uniforme autour d'un axe fixe dans $\mathcal{R}_t$,
- $\mathcal{R}_2$ lié à un paquebot en mouvement rectiligne uniforme dans $\mathcal{R}_t$,
- $\mathcal{R}_3$ lié à un train en phase de décélération uniforme en ligne droite dans $\mathcal{R}_t$.
- $\mathcal{R}_4$ lié à une caisse en chute libre dans $\mathcal{R}_t$.

L'étude du mouvement de M dans ces référentiels $\mathcal{R}_i$ amène à envisager de prendre en compte des forces d'inertie :

- | | |
|--|---|
| (a) force d'inertie d'entraînement centrifuge quand $\mathcal{R}_i$ est en rotation dans $\mathcal{R}_t$ | (c) force d'inertie d'entraînement quand $\mathcal{R}_i$ est en translation rectiligne dans $\mathcal{R}_t$ |
| (b) force d'inertie de Coriolis | (d) aucune force d'inertie |

Déterminer les forces d'inertie à prendre en compte dans les situations suivantes :

- | | | | |
|---|----------------------|---|----------------------|
| a) M est immobile dans $\mathcal{R}_1$ | <input type="text"/> | d) M est en mouvement dans $\mathcal{R}_3$.. | <input type="text"/> |
| b) M est en mouvement dans $\mathcal{R}_1$.. | <input type="text"/> | e) M est fixe dans $\mathcal{R}_3$ | <input type="text"/> |
| c) M est en mouvement dans $\mathcal{R}_2$.. | <input type="text"/> | f) M est en mouvement dans $\mathcal{R}_4$.. | <input type="text"/> |



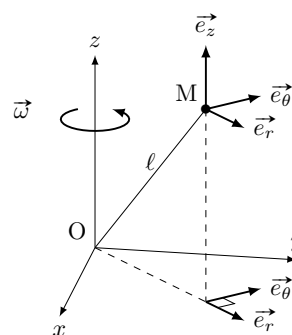
Entraînement 2.6 — Force d'inertie centrifuge.



Un point M de masse m est animé d'une vitesse $\vec{v}(M) = v\vec{e}_\theta$ dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}_0$ lié au repère $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. On étudie le mouvement de M dans le référentiel non galiléen $\mathcal{R}_1$ en rotation par rapport à $\mathcal{R}_0$ caractérisée par le vecteur rotation instantanée $\vec{\omega}$.

Une force d'inertie d'entraînement, ici centrifuge, s'exerce sur le point M : $\vec{f}_{ie} = m\omega^2\vec{HM}$, où H est le projeté orthogonal de M sur l'axe de rotation. La distance OM vaut ℓ .

Déterminer, dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$, l'expression de la force d'inertie centrifuge dans les situations suivantes.



- | | |
|---|----------------------|
| a) $\vec{\omega} = \omega_0\vec{e}_z$ et le point M est placé sur l'axe (Oz) | <input type="text"/> |
| b) $\vec{\omega} = \omega_0\vec{e}_z$ et le point M possède les coordonnées cylindriques $(\ell, 0, 0)$... | <input type="text"/> |
| c) $\vec{\omega} = \omega_0\vec{e}_z$ et $\vec{OM}$ est incliné de $\frac{\pi}{3}$ par rapport à (Oz) | <input type="text"/> |