Álgebra Lineal y Geometría

Volumen I: Álgebra Lineal Básica,
Geometría Afín y Geometría Euclídea

Álgebra Lineal y Geometría

Volumen I: Álgebra Lineal Básica, Geometría Afín y Geometría Euclídea

Fernando Pablos Romo

Mc Graw Hill | AULAMAGNA
PROYECTO CLAVE

Álgebra Lineal y Geometría
Volumen I: Álgebra Lineal Básica, Geometría Afín y Geometría Euclídea

Primera edición: 2023

ISBN: 9788419786296
ISBN eBook: 9788419786715
Depósito legal: SE 1573-2023

© de los textos:
Fernando Pablos Romo

© de esta edición:
Editorial Aula Magna, 2023. McGraw-Hill Interamericana de España S.L.
editorialaulamagna.com
info@editorialaulamagna.com

Impreso en España – Printed in Spain

Para la publicación de este libro el autor ha recibido ayuda del Departamento de Matemáticas y del Programa de Difusión de Resultados de Investigación - Modalidad C del Vicerrectorado de Investigación y Transferencia de la Universidad de Salamanca.

Quedan prohibidos, dentro de los límites establecidos en la ley y bajo los apercibimientos legalmente previstos, la reproducción total o parcial de esta obra por cualquier medio o procedimiento, ya sea electrónico o mecánico, el tratamiento informático, el alquiler o cualquier otra forma de cesión de la obra sin la autorización previa y por escrito de los titulares del copyright. Diríjase a info@editorialaulamagna.com si necesita fotocopiar o escanear algún fragmento de esta obra.

A mi mujer Esther, mi hija Esther
y mis hijos Fernando y Thiago

Índice general

NOTACIÓN 11

INTRODUCCIÓN 13
Agradecimientos 15

Capítulo 1. NOCIONES PRELIMINARES 17
1.1. Matrices 17
1.2. Determinantes 20
1.3. Sistemas de ecuaciones 27

Capítulo 2. ESPACIOS VECTORIALES 39
2.1. Estructuras algebraicas 39
2.2. Definiciones básicas 62
2.3. Subespacios vectoriales 68
2.4. Bases y dimensiones de un espacio vectorial 76
2.5. Suma directa de espacios vectoriales 86

Capítulo 3. APLICACIONES LINEALES 93
3.1. Aplicaciones lineales 93
3.2. Matriz asociada a una aplicación lineal 109
3.3. Espacio vectorial de aplicaciones lineales 115
3.4. Grupo de automorfismos de un espacio vectorial 121
3.5. Sucesiones exactas de aplicaciones lineales 122
3.6. Cambios de base 129
3.7. Sistemas de ecuaciones lineales 135

Capítulo 4. DIAGONALIZACIÓN DE ENDOMORFISMOS 139
4.1. Vectores y valores propios de un endomorfismo 139
4.2. Polinomio característico 140
4.3. Criterio de diagonalización 144

Capítulo 5. ESPACIO DUAL 155
5.1. Definiciones básicas 155
5.2. Base dual 156
5.3. Incidente de un subespacio vectorial 160
5.4. Aplicación traspuesta 167

Capítulo 6. GEOMETRÍA AFÍN 179
6.1. Afinidades 180
6.2. Espacio Afín 184
6.3. Transformaciones afines 188
6.4. Sistemas de referencia afines 196
6.5. Subvariedades Afines 209
6.6. Posición relativa de dos subvariedades afines 230
6.7. Construcción de subvariedades afines 245

Capítulo 7. ESPACIOS VECTORIALES EUCLÍDEOS 255
7.1. Métricas en un espacio vectorial 255
7.2. Espacios vectoriales euclídeos 268
7.3. Isometrías 293

Capítulo 8. GEOMETRÍA EUCLÍDEA 313
8.1. Subvariedades ortogonales en un espacio euclídeo 314
8.2. Distancia entre subvariedades afines 324
8.3. Geometría euclídea en dimensión 3 349
8.4. Movimientos en un espacio afín euclídeo 369

Bibliografía 397

Índice alfabético 399

NOTACIÓN

Expresión	**Significado**
$x \in X$	x pertenece a X
$x \notin X$	x no pertenece a X
$A \subseteq B$	A está contenido en B (pueden ser iguales)
$A \subset B$	A está contenido en B (no pueden ser iguales)
$A \Longrightarrow B$	A implica B
$A \Longleftarrow B$	B implica A
$A \Longleftrightarrow B$	A es equivalente a B
$a \leq b$	a es menor o igual que b
$a \geq b$	a es mayor o igual que b
$\times$	Producto Cartesiano
$\rtimes$	Producto Semidirecto
$\prod$	Producto Directo
$\bigoplus$	Suma Directa
i. e.	Esto es

INTRODUCCIÓN

El Álgebra Lineal es la rama de las Matemáticas destinada al estudio de los espacios vectoriales sobre un cuerpo de escalares y las relaciones entre estos espacios (las aplicaciones lineales). El Álgebra Lineal ofrece herramientas para el estudio de la Geometría Afín, la Geometría Euclídea, la solución de ecuaciones lineales y ecuaciones diferenciales lineales, la clasificación de cónicas y cuádricas o los problemas relacionados con la Programación Lineal.

Este manual, que está dividido en dos volúmenes, pretende ser útil para la comprensión de esta materia por parte de los estudiantes y para la explicación de la misma por los docentes, mediante la demostración rigurosa de los conceptos incorporados a cada capítulo y la aportación de ejemplos prácticos que faciliten la asimilación de las correspondientes nociones teóricas.

Los contenidos de este primer volumen coinciden con los programas de asignaturas de Álgebra Lineal de numerosos grados universitarios del ámbito científico y económico en España y diferentes países de Iberoamérica. Así, tras un primer capítulo destinado a recordar nociones básicas que los estudiantes deberían conocer al incorporarse a la Universidad, se estudiarán los Espacios Vectoriales, las Aplicaciones Lineales, la Diagonalización de Endomorfismos, el Espacio Dual, la Geometría Afín, las Métricas, los Espacios Vectoriales Euclídeos y la Geometría Euclídea. En el conjunto de estos capítulos se incorporan un total de 180 ejemplos prácticos detallados.

La estructura de este libro es como sigue. El Capítulo 1 está destinado a recordar las nociones básicas de matrices, determinantes y soluciones de sistemas lineales de ecuaciones. En este capítulo se enumeran las principales propiedades de los determinantes, el Teorema de Rouché-Frobenius o la Regla de Cramer, pero no se ofrecen las demostraciones rigurosas de las mismas. En el caso del Teorema de Rouché-Frobenius, su prueba puede encontrarse en este primer volumen (Teorema 3.7.7), mientras que las demostraciones de las propiedades de los determinantes y de la Regla de Cramer se realizan en el Capítulo 3 del Volumen II de este manual.

En el Capítulo 2, tras una sección dedicada a las estructuras algebraicas que se utilizarán en este volumen, se definen los espacios vectoriales sobre un cuerpo de escalares y se demuestran sus principales propiedades, se estudian

los subespacios vectoriales y se ofrecen las nociones de base, dimensión y suma directa de espacios vectoriales. Los conceptos incoporados en este capítulo constituyen el lenguaje fundamental del Álgebra Lineal.

Las Aplicaciones Lineales entre Espacios Vectoriales son objeto de análisis en el Capítulo 3, en el que pormenorizadamente se estudian las definiciones y propiedades básicas de estos objetos, la matriz asociada a una aplicación lineal, su estructura de espacio vectorial, el grupo de automorfismos, las sucesiones exactas, los cambios de base y los sistemas de ecuaciones lineales desde este punto de vista.

A resolver el problema de cuándo un endomorfismo admite una matriz diagonal en cierta base se dedica el Capítulo 4, mediante la introdución de la noción de vector propio de valor propio λ y la demostración del criterio de diagonalización a partir del polinomio característico. Como aplicación de la resolución de este problema se presenta el cálculo de potencias y raíces de una matriz cuadrada y se ofrecen ejemplos prácticos del mismo.

El estudio del Espacio Dual se realiza en el Capítulo 5 a través de la definición del mismo y la demostración de sus principales propiedades, de la introdución de la noción de subespacio incidente y del análisis del concepto de aplicación traspuesta. Además, en este capítulo se definen y se ofrecen ejemplos de las diferentes ecuaciones de un subespacio vectorial: vectorial, paramétricas e implícitas.

El Capítulo 6 se destina a utilizar el lenguaje del Álgebra Lineal para definir el concepto de Espacio Afín y abordar problemas de Geometría Afín. Para ello, se definirán las afinidades, las transformaciones afines y los sistemas de referencia afín, se introducirá la noción de subvariedad afín, se ofrecerán métodos de construcción de subvariedades afines y se analizarán las posiciones relativas entre algunas de ellas. En particular, se realizará un estudio detallado de las posiciones relativas de subvariedades afines en espacios afines de dimensión 3. De todas las nociones introducidas se ofrecen ejemplos prácticos detallados, mediante la resolución de diferentes problemas geométricos, con la intención de ayudar a comprender mejor cada una de ellas.

En el Capítulo 7 se estudiarán las aplicaciones bilineales y, en particular, las métricas euclídeas que permitirán analizar pormenorizadamente las principales nociones de los Espacios Vectoriales Euclídeos: norma de un vector y ángulo y distancia entre dos vectores. Además, se estudiarán las proyecciones y las simetrías ortogonales y, a partir del conocido como Determinante de Gramm, se relacionará el volumen de un paralepípedo con la distancia de un vector a un subespacio vectorial. El capítulo concluirá con una sección destinada a las isometrías, que son las aplicaciones lineales que preservan la correspondiente métrica euclídea, incluyendo la clasificación de isometrías en espacios vectoriales euclídeos de dimensión 2 y 3.

Finalmente, el Capítulo 8 está destinado a la introducción de las principales nociones de la Geometría Euclídea (Espacio Afín Euclídeo, simétrico y proyección ortogonal de un punto respecto de una subvariedad afín, distancia entre subvariedades afines arbitrarias, lugares geométricos relacionados con distancias y ángulos en espacios de dimensión 3) y a la resolución explícita de diversos problemas que pretenden facilitar la comprensión de los conceptos introducidos. El manual concluye con el estudio de los movimientos en el espacio afín euclídeo (afinidades que preservan la distancia) y la clasificación explícita de los mismos en espacios de dimensión 2 y 3.

Agradecimientos

Este manual está dedicado a mi familia más cercana (mi mujer Esther, mi hija Esther y mis hijos Fernando y Thiago), que han sido mi soporte emocional fundamental durante el largo periodo de elaboración del mismo.

Quiero agradecer al profesor Dr. Francisco J. Plaza Martín y al profesor Dr. José Miguel Mateos Roco, en su condición de cirector del Departamento de Matemáticas y de vicerrector de Investigación y Transferencia de la Universidad de Salamanca respectivamente, su apoyo para la publicación de este libro.

Deseo acordarme de mis profesores de la asignatura Geometría I (profesor Dr. Pedro Luis García Pérez y profesor Dr. Antonio Fernández Martínez) de primero de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad de Salamanca allá por el curso académico 1986-1987, porque buena parte de los conceptos incorporados en este manual, así como la presentación rigurosa de los mismos, los aprendí de ellos. Cualquier agradecimiento a los dos, al igual que al resto de mis profesores durante el periodo 1986-1991 que cursé esta licenciatura, no es posible expresarlo con palabras.

He tenido la responsabilidad y la fortuna de impartir docencia en la Universidad de Salamanca desde finales del año 1991 y en muchos cursos académicos me he responsabilizado de asignaturas relacionadas con el Álgebra Lineal, en colaboración con más miembros del Departamento de Matemáticas. A todos ellos quiero agradecerles las conversaciones que hemos tenido para intentar mejorar la forma de impartir esas asignaturas, que han tenido como consecuencia la forma de presentar algunas nociones en este libro. Especialmente deseo agradecer a las profesoras y los profesores con quienes impartí durante varios años un Curso Cero de Matemáticas Básicas, por autorizarme a incorporar como Capítulo 1 de este manual parte de los apuntes que se entregaban para facilitar el desarrollo del mismo.

Para concluir, también quiero mostrar mi agradecimiento a los estudiantes a los que he impartido docencia durante todos estos años, porque con sus preguntas y sugerencias han contribuido a mejorar mi forma de explicar las asignaturas y de expresar numerosos conceptos en este libro.

El Autor

Capítulo 1

NOCIONES PRELIMINARES

Este manual pretende ser autocontenido, de tal modo que pueda ser útil a los lectores que, con una formación básica en Matemáticas, no tengan conocimientos previos de Álgebra.

Para ello se incorpora este capítulo inicial, en el que se introducen las nociones de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales, que serán utilizadas en los capítulos siguientes para la simplificación de los problemas que se abordarán en los mismos. En este capítulo se realiza una primera aproximación a estos conceptos, siendo conveniente resaltar que el estudio riguroso de los mismos se realizará con posterioridad (los sistemas de ecuaciones lineales en el Capítulo 3 y los determinantes en el Volumen II de este manual.

1.1. Matrices

DEFINICIÓN 1.1.1. Se llama **matriz** de orden $m \times n$ a todo conjunto rectangular de elementos a_{ij} dispuestos en m líneas horizontales (filas) y n líneas verticales (columnas) de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

□

La matriz anterior suele expresarse en la forma $A = (a_{ij})$, donde el primer subíndice denota la fila (i) y el segundo la columna (j). Así, el elemento a_{23} será el elemento de la fila 2 y la columna 3. Los elementos a_{ij} se denominan coeficientes de A.

Las matrices $1 \times n$ se denominan matrices fila, mientras la matrices $m \times 1$ se llaman matrices columnas. Así:

$$\text{Matriz fila } = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}$$

y

$$\text{Matriz columna } = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{i1} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}.$$

Además, las matrices que tienen el mismo número de filas que de columnas $(n \times n)$ se llaman matrices cuadradas.

Las matrices $(n \times m)$ cuyos coeficientes son números reales se denotan por $\mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{R})$.

Ejemplos 1.1.2.

- Matriz $3 \times 2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$
- Matriz $2 \times 3 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}$
- Matriz $3 \times 3 = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & -7 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

1.1.1. Trasposición de una matriz. Dada una matriz de orden $m \times n$, $A = (a_{ij})$, se llama matriz traspuesta de A y se representa por A^t, a la matriz de orden $n \times m$ que se obtiene cambiando las filas por columnas (o viceversa) en la matriz A:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \Longrightarrow A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Si trasponemos dos veces una matriz A entonces no varía, es decir, $(A^t)^t = A$.

Ejemplo 1.1.3. Si consideramos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 & 3 \\ -1 & 2 & 5 & -3 \end{pmatrix},$$

se verifica que

$$A^t = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \\ -3 & 5 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

□

1.1.2. Suma y producto. Vamos a definir la suma y el producto de matrices.

1.1.2.1. Suma de dos matrices. La suma de dos matrices $m \times n$, $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$, es otra matriz $m \times n$, $S = (s_{ij})$, de tal manera que cada elemento s_{ij} es la suma de a_{ij} y b_{ij}. Así, $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$.

Ejemplo 1.1.4.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} .$$

□

1.1.2.2. Producto de una matriz por un número. Si $A = (a_{ij})$ es una matriz $m \times n$ de números reales y λ es un número real, el producto de A por λ es otra matriz $m \times n$, $\lambda \cdot A = B = (b_{ij})$, tal que cada elemento b_{ij} se obtiene multiplicando el coeficiente a_{ij} por λ, es decir:

$$\lambda \cdot A = (\lambda \cdot a_{ij}) .$$

Ejemplo 1.1.5.

$$5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 5 & -5 & 15 \end{pmatrix} .$$

□

1.1.2.3. Producto de dos matrices. Dada una matriz $m \times n$, $A = (a_{ij})$, y una matriz $n \times s$, $B = (b_{ij})$, el producto de ambas es una matriz $m \times s$, $A \cdot B = C = (c_{ij})$, que se obtiene multiplicando las filas de A por las columnas de B. Así, la expresión de cada elemento es:

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \cdots + a_{in} \cdot b_{nj} .$$

Ejemplo 1.1.6.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 0 \cdot 2 & 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 & 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 1 \\ 1 \cdot 5 + 1 \cdot 2 & 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 & 1 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 5 & -1 & -2 \\ 7 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

□

1.1.3. Traza de una matriz cuadrada. La traza de una matriz cuadrada viene dada por la siguiente definición.

Definición 1.1.7. Si A es un matriz $n \times n$, la traza de A es la suma de los elementos de la diagonal, es decir, si $A = (a_{ij})$ su traza es

$$\text{Tr } A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} .$$

□

Ejemplo 1.1.8. Si consideramos la matriz cuadrada

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 2 & -4 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 2 & -7 \\ 1 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix},$$

entonces

$$\operatorname{Tr} A = 1 + (-4) + 2 + (-3) = -4\,.$$

□

1.2. Determinantes

Dada una matriz cuadrada $A = (a_{ij})$, el determinante de A, que se denota por $|A|$, es un número que se obtiene sumando todos los productos $a_{1j_1} \dots a_{nj_n}$, precedidos de un signo cada uno, de tal forma que cada producto contenga un único elemento de cada fila y cada columna de A.

Si A es una matriz $n \times n$, se dice que $|A|$ tiene orden n.

1.2.1. Cálculo de determinantes de segundo y tercer orden. Los determinantes de segundo y tercer orden se calculan a partir de las siguientes fórmulas:

- Determinante de orden 2:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}\,.$$

- Determinante de orden 3 (regla de Sarrus):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}\,.$$

Ejemplos 1.2.1.

- $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 5 \cdot 1 = 1.$
- $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 7 \\ 4 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 \cdot (-1) + 1 \cdot 7 \cdot 4 + 4 \cdot 5 \cdot 0 - 2 \cdot 7 \cdot 5 - 0 \cdot 5 \cdot 4 - 1 \cdot 4 \cdot (-1) = -10 + 28 - 70 + 4 = -48.$

Observación 1.2.2. El signo que afecta a cada sumando en la definición de determinante se calcula utilizando la teoría de permutaciones. La definición rigurosa de determinante se puede encontrar en [**3**, Capítulo 3]. En ese capítulo del Volumen II de este manual pueden encontrarse las demostraciones completas de las propiedades de los determinantes. Para los lectores que no requieran de una definición intrínseca de determinante de

la que se deducen sus principales propiedades, a continuación, estas propiedades están enumeradas y también se ofrece un método para calcular el determinante de cualquier matriz cuadrada de orden superior a tres mediante su reducción al cómputo de determinantes de este orden. □

1.2.2. Propiedades de los determinantes. En este capítulo inicial del manual las principales propiedades de los determinantes se enunciarán y se ofrecerá un ejemplo de cada una de ellas. Las demostraciones con rigor matemático de todas estas propiedades pueden encontrarse en [**3**, Proposición 3.4.21].

(a) Si todos los elementos de una línea (fila o columna) de una matriz cuadrada se descomponen en dos sumandos, entonces su determinante es igual a la suma de dos determinantes que tienen en esa línea los primeros y segundos sumandos, respectivamente, y en las demás los mismos elementos del determinante inicial.

Ejemplo 1.2.3.

$$36 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1+3 & 1+5 & 3-2 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 30\,.$$

□

(b) Si se multiplican todos los elementos de una línea de una matriz cuadrada por un número, el determinante queda multiplicado por dicho número.

Ejemplo 1.2.4.

$$30 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5\cdot 2 \\ 1 & 1 & 5\cdot 3 \\ -2 & 0 & 5\cdot 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot 6.$$

□

(c) El determinante de una matriz cuadrada coincide con el determinante de su traspuesta.

Ejemplo 1.2.5.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

□

(d) Si A y B son dos matrices del mismo orden, entonces el determinante del producto es el producto de los determinantes: $|A\cdot B| = |A||B|$.

Ejemplo 1.2.6. Teniendo en cuenta que

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 18 \end{pmatrix}$$

se verifica que

$$4 = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 18 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (-2) \cdot (-2)\,.$$

□

(e) Si permutamos dos líneas paralelas de una matriz cuadrada, su determinante cambia de signo con respecto al inicial.

Ejemplo 1.2.7.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 = - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix}\,.$$

□

(f) Si una matriz cuadrada tiene una línea con todos los elementos nulos, su determinante vale cero.

Ejemplo 1.2.8.

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 5 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0\,.$$

□

(g) Si una matriz cuadrada tiene dos líneas paralelas iguales, su determinante vale cero.

Ejemplo 1.2.9.

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 5 & 5 & 1 \\ -2 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0\,,$$

porque las dos primeras columnas son iguales. □

(h) Si dos líneas paralelas de una matriz cuadrada son proporcionales, su determinante se anula.

Ejemplo 1.2.10.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0\,,$$

porque la segunda fila es el doble de la primera. □

(i) Si una fila (o columna) de una matriz cuadrada es combinación lineal de las restantes filas (columnas), su determinante vale cero.

Ejemplo 1.2.11.

$$\begin{vmatrix} 1 & 11 & 5 \\ 3 & 3 & 0 \\ -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 0\,,$$

porque la segunda columna es igual a la primera más el doble de la tercera. □

1.2.3. Desarrollo de un determinante por los términos de una fila o columna. Sea $A = (a_{ij})$ una matriz cuadrada y a_{ij} uno cualquiera de sus elementos. Si se suprime la fila i y la columna j de la matriz A se obtiene una matriz M_{ij} que recibe el nombre de **matriz complementaria** del elemento a_{ij}.

Así, dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

la matriz complementaria del elemento a_{11} es la matriz que resulta de suprimir en A la fila 1 y la columna 1; es decir:

$$M_{11} = \begin{pmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Llamaremos **menor complementario** del elemento a_{ij} al determinante de la matriz complementaria del elemento a_{ij}, y se representa por α_{ij}.

Se llama **adjunto de** a_{ij}, y se representa por A_{ij} al número $(-1)^{i+j}\alpha_{ij}$.

1.2.3.1. Desarrollo de un determinante por adjuntos. El determinante de una matriz cuadrada es igual a la suma de los elementos de una fila o columna cualquiera, multiplicados por sus adjuntos.

Ejemplo 1.2.12. Si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

el cálculo de su determinante mediante el desarrollo por adjuntos de la primera columna es:

$$|A| = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + (-2) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 0 + (-2) \cdot (-2) = 6\,.$$

□

La demostración rigurosa del resultado teórico que permite este cálculo puede encontrarse en [**3**, Teorema 3.4.46 y Corolario 3.4.36].

1.2.4. Reducción del orden de un determinante. El desarrollo de un determinante por adjuntos rebaja el orden del determinante que se quiere calcular en una unidad. A fin de simplificar al máximo el cálculo de un determinante, es conveniente, aplicando las propiedades, conseguir reducir el determinante al de una matriz que tenga en una fila o en una columna todos los elementos iguales a cero menos uno. Este método es conocido como el método de Chio y permite reducir el orden de un determinante progresivamente hasta llegar a orden tres para aplicar la regla de Sarrus.

Ejemplo 1.2.13. Para calcular el determinante de la matriz cuadrada

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 7 & 2 \\ -1 & -2 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix},$$

restando de la primera columna dos veces la segunda y de la cuarta columna tres veces la segunda, se reduce su cálculo al determinante:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & 5 & 7 & -13 \\ 3 & -2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 4 & -1 \end{vmatrix},$$

y desarrollando por adjuntos de la primera fila se obtiene que

$$|A| = -\begin{vmatrix} -6 & 7 & -13 \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -30\,.$$

□

1.2.5. Rango de una matriz. Se denomina **rango** de una matriz arbitraria al máximo orden de un determinante no nulo que puede extraerse de ella.

Si decimos que una fila de una matriz es combinación lineal de otras filas cuando sea igual a la suma de estas multiplicadas por números cada una de ellas, el rango de una matriz coincide con el máximo número de filas o de columnas linealmente independientes (que no existen combinaciones lineales entre ellas). La demostración rigurosa de esta relación entre el rango y la independencia lineal de filas (o columnas) se realizará en el Capítulo 3 del Volumen II de este manual, aunque se utilizará para simplificar cálculos en el Capítulo 2.

El rango nunca podrá ser mayor que el número de filas o de columnas (que el menor de ellos).

1.2.5.1. Determinación del rango de una matriz A. Se procede siguiendo diferentes pasos:

(a) Se eliminan las filas y columnas que sean nulas, proporcionales o combinación lineal de otras.
(b) Se fija un elemento a_{ij} no nulo de A. Se denota por A_{ij}^m a un determinante de orden m de una matriz contenida en A y que tiene como uno de sus coeficientes al elemento a_{ij}.
(c) Se consideran los determinantes de orden 2 que contienen al elemento a_{ij}. Si estos determinantes son nulos el rango es uno, pero si algún A_{ij}^2 es no nulo aún no se ha finalizado.
(d) En ese caso, consideramos los determinantes de orden 3 que contienen a A_{ij}^2. Si estos determinantes son nulos el rango es dos, pero si alguno A_{ij}^3 es no nulo aún no se ha finalizado.
(e) Se continua el proceso hasta que todos los determinantes que contienen a uno sean nulos o no sea posible considerar determinantes mayores con los elementos de A (el rango sea al menos el número de filas o columnas).

Este procedimiento se denomina "orlar" el elemento no nulo a_{ij}.

Ejemplo 1.2.14. Para calcular el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 7 & 6 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix},$$

teniendo en cuenta que la cuarta fila es el doble de la primera y que las columnas cuarta, quinta y sexta son proporcionales, el rango de A coincide con el rango de

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & 7 & 6 \\ 4 & 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Entonces, orlando el elemento $a_{11} = 2$, y teniendo en cuenta que

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$

y que

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 7 \\ 4 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -48 \neq 0\,,$$

el rango de A es tres. □

Nos proponemos ahora estudiar la matriz inversa de una matriz cuadrada que tenga determinante distinto de cero.

1.2.6. Matriz Inversa. Vamos ahora a calcular la matriz inversa de una matriz cuadrada con determinante distinto de cero.

1.2.6.1. Matriz Adjunta. Dada una matriz cuadrada A, se denomina **matriz adjunta** de A y se representa por A^d, a la matriz de los adjuntos: $A^d = (A_{ij})$.

Ejemplo 1.2.15. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2; \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0; \qquad A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -2;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -8; \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 6; \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2; \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Así,

$$A^d = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -8 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

1.2.6.2. Cálculo de la inversa de una matriz. Si A es una matriz cuadrada con $|A| \neq 0$, se verifica que:

$$A^{-1} = \frac{(A^t)^d}{|A|}.$$

La demostración de esta fórmula que permite el cálculo de la inversa de una matriz cuadrada se realizará en [**3**, Proposición 3.4.38].

Ejemplo 1.2.16. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Como A^t es la matriz del ejemplo anterior y $|A| = 6$, tenemos que

$$(A^t)^d = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -8 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y, por tanto,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{6} & 0 & \frac{-2}{6} \\ \frac{-8}{6} & \frac{6}{6} & \frac{-1}{6} \\ \frac{2}{6} & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{-1}{3} \\ \frac{-4}{3} & 1 & \frac{-1}{6} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

□

1.3. Sistemas de ecuaciones

Un **sistema de ecuaciones lineales** es un conjunto de ecuaciones lineales en las que aparecen varias incógnitas. En particular, un sistema de m ecuaciones con n incógnitas viene dado por:

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right. \tag{1.3.1}$$

donde las incógnitas son las x_i, $1 \leq i \leq n$ y los coeficientes a_{ij} y b_i son números.

Otra forma de representar el sistema es la denominada forma matricial:

$$Ax = b$$

donde $A = (a_{ij})$ es la matriz de los coeficientes, x es el vector columna formado por las incógnitas y b es el vector columna de los términos independientes b_i:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

La matriz A se denomina **matriz del sistema**.

Otra matriz de gran importancia a la hora de resolver sistemas de ecuaciones es la **matriz ampliada** que se obtiene añadiendo a la matriz A una columna cuyos elementos son los términos independientes b_i, es decir, $A^* = (A|b)$:

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right).$$

Los sistemas cuyos términos independientes son todos nulos, se denominan **sistemas homogéneos**.

Resolver un sistema es tratar de encontrar valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ que satisfagan este conjunto de ecuaciones. Dependiendo del número de soluciones de los sistemas, estos se pueden clasificar del modo siguiente:

(a) Sistemas incompatibles: son aquellos que NO tienen solución.
(b) Sistemas compatibles: cuando SÍ tienen solución y pueden ser:
   - Determinado: el sistema admite UNA ÚNICA solución.
   - Indeterminado: el sistema tiene INFINITAS soluciones.

1.3.1. Equivalencia de sistemas. Dos sistemas de ecuaciones lineales con el mismo número de incógnitas se dice que son **equivalentes** si tienen las mismas soluciones, es decir, si toda solución del primer sistema es solución del segundo y viceversa. Evidentemente, los sistemas equivalentes han de tener el mismo número de incógnitas, aunque no necesariamente el mismo número de ecuaciones.

Las siguientes propiedades permiten conseguir sistemas equivalentes a uno dado:

- Si multiplicamos o dividimos una ecuación del sistema por un número distinto de cero, se obtiene un sistema equivalente.
- Si sustituimos una ecuación por una combinación lineal formada por dicha ecuación y múltiplos de algunas de las restantes ecuaciones del sistema, se obtiene un sistema equivalente.
- Si una ecuación es combinación lineal de otras ecuaciones del sistema, entonces el sistema que obtenemos al suprimir dicha ecuación es equivalente al de partida.

1.3.2. Resolución de sistemas. Antes de comenzar a estudiar la resolución de sistemas utilizando la matriz del sistema y la matriz ampliada, recordemos brevemente los tres métodos elementales.

(a) **Método de sustitución**

Se despeja una de las incógnitas en una ecuación y se sustituye esta expresión en las restantes. De esta forma se obtiene un nuevo sistema con una ecuación menos y una incógnita menos. Se sigue el proceso hasta obtener una ecuación con una incógnita.

Ejemplo 1.3.1. Resolver por el método de sustitución el sistema

$$\begin{cases} 3x + 6y &= 3 \\ -2x + 5y &= 7. \end{cases}$$

Despejando la incógnita x en la primera ecuación, se tiene que $x = \frac{3-6y}{3} = 1 - 2y$. Sustituyendo este valor en la segunda se obtiene que

$$-2(1 - 2y) + 5y = 7 \Rightarrow -2 + 4y + 5y = 7 \Rightarrow 9y = 9 \Rightarrow y = 1.$$

Por lo que $x = 1 - 2 \cdot 1 = -1$. □

(b) **Método de igualación**

Se despeja la misma incognita en dos ecuaciones del sistema y se igualan las expresiones. Se obtiene así una nueva ecuación que involucra una incognita menos que unida a las restantes forman un sistema equivalente.

EJEMPLO 1.3.2. Resolver por el método de igualación el sistema

$$\begin{cases} x - 2y + 4z = 9 \\ 3x - y + 6z = 2 \\ 7x - y + 10z = -12. \end{cases}$$

Despejamos la incógnita "y" de la segunda y tercera ecuación. Nos queda, $y = 3x + 6z - 2$ e $y = 7x + 10z + 12$. Igualando ambas y agrupando, se tiene la ecuación $4x + 4z + 14 = 0$. Despejando la x, se tiene $x = \frac{-4z-14}{4}$.

Despejando la y en la primera ecuación, $y = \frac{x+4z-9}{2}$. Entonces $\frac{x+4z-9}{2} = 3x + 6z - 2$, y agrupando convenientemente $5x + 8z + 5 = 0$. Lo que resulta $x = \frac{-8z-5}{5}$.

Igualando ambas expresiones $\frac{-4z-14}{4} = \frac{-8z-5}{5}$ y despejando $z = \frac{25}{6}$. Sustituyendo este valor en las expresiones anteriores, se tiene que $x = -\frac{23}{3}$ e $y = 0$. □

(c) **Método de reducción**

Sumando adecuadamente combinaciones lineales de dos ecuaciones, se obtiene otra nueva ecuación en la que ha desaparecido una incógnita. Como en el método anterior, el sistema resultante al añadir esta ecuación es equivalente al de partida.

EJEMPLO 1.3.3. Resolver por el método de igualación el sistema

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 3x - y + 2z = 0 \\ x + 5y + 6z = 0. \end{cases}$$

Sumando las dos primeras ecuaciones del sistema se obtiene $4x + 4z = 0$ y dividendo ésta por 4, $x + z = 0$. Restando la tercera ecuación de la primera, resulta $-4y - 4z = 0$ y dividiéndola por -4 queda $y + z = 0$. Entonces, como la suma de $x + z = 0$ más $y + z = 0$ es $x + y + 2z = 0$, el sistema original es equivalente al formado por

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ y + z = 0. \end{cases}$$

Por tanto, se tiene que $z = -y$ y, sustituyendo este valor en la primera ecuación y despejando, se obtiene que $x = y$. En este caso el sistema es compatible indeterminado. □

1.3.3. Sistemas homogéneos. Sea $Ax = 0$ un sistema homogéneo con n incógnitas. Se tiene que:

- $x_i = 0$ para todo i es solución del sistema.
- Si $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es una solución del sistema, entonces se verifica que $(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$ es también solución para cualquier valor de λ.
- Si $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ son soluciones del sistema homogéneo, también lo es $(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$.

En consecuencia, todo sistema lineal homogéneo admite siempre una solución y, por tanto, será un sistema compatible.

1.3.4. Teorema de Rouché-Frobenius. Consideramos el sistema de m ecuaciones y n incógnitas como en (1.3.1). Sean A y A^* la matriz del sistema y la matriz ampliada:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ y } A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

La condición necesaria y suficiente para que un sistema de m ecuaciones con n incógnitas sea compatible (tenga solución) es que el rango de la matriz de coeficientes sea igual al rango de la matriz ampliada. Además, el sistema es compatible determinado (una única solución) si dicho rango coincide con el número de incógnitas.

La demostración rigurosa del Teorema de Rouché-Frobenius se encuentra en el Capítulo 3 (Teorema 3.7.7).

Como consecuencia, se puede deducir que un sistema de n ecuaciones y n incógnitas (igual número de ecuaciones que de incógnitas) tiene solución única si y solo si el determinante de la matriz del sistema es distinto de cero, es decir, $|A| \neq 0$.

Sean r y r^* los rangos de la matriz del sistema A y de la matriz ampliada A^*, respectivamente. Sea n el número de incógnitas. Los diversos casos posibles que se pueden dar son los siguientes:

$$\begin{array}{lll} r < r^* \equiv & \text{Sistema incompatible.} & \\ r = r^* \equiv & \text{Sistema compatible:} \left\{ \begin{array}{ll} r = n & \text{Determinado.} \\ r < n & \text{Indeterminado.} \end{array} \right. & \end{array}$$

Ejemplo 1.3.4. Vamos a estudiar, en función del parámetro a, la compatibilidad o incompatibilidad del siguiente sistema:

$$\begin{cases} 3x - 2y + 5z = 1 \\ -2x + y + 4z = -1 \\ \quad -x + 13z = 2 - 3a^2. \end{cases}$$

La matriz del sistema y la matriz ampliada son respectivamente

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -2 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 13 \end{pmatrix} \text{ y } A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 13 & 2 - 3a^2 \end{array}\right).$$

El determinante de la matriz del sistema es

$$|A| = 3{\cdot}1{\cdot}13 + (-1){\cdot}(-2){\cdot}4 - [5{\cdot}1{\cdot}(-1) + 13{\cdot}(-2){\cdot}(-2)] = 0.$$

Por tanto, el rango de A no es 3. Ahora bien, como

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -1\,,$$

se tiene que el rango de A es exactamente 2.

Veamos cuál es el rango de A^*. Como contiene a A, su rango es al menos 2 y, como máximo 3 (al ser una matriz 3×4). Para ver si es 3, teniendo en cuenta el método ofrecido en el Apartado 1.2.5.1, hay que estudiar el determinante del siguiente menor:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 - 3a^2 \end{vmatrix} = 3a^2 - 3 = 3(a-1)(a+1)\,.$$

En consecuencia, el rango de A^* es 2 si y solo si este determinante se anula, es decir, $a = \pm 1$. En este caso, como ambos rangos coinciden el sistema es compatible indeterminado (el rango es menor que el número de variables). Si $a \neq \pm 1$, el rango de la matriz ampliada es 3 y entonces el sistema es incompatible. □

1.3.5. Regla de Cramer. Se dice que un sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$ es de Cramer (o se puede aplicar la regla de Cramer para su resolución) si el número de ecuaciones es igual al número de incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{1.3.2}$$

y el determinante de la matriz de coeficientes es distinto de cero.

Resolver un sistema de este tipo se basa en el cálculo de determinantes. Sea A la matriz de coeficientes y $|A|$ su determinante (distinto de 0 pues el sistema es de Cramer).

Sea $\tilde{A}_i$, $1 \leq i \leq n$, la matriz de coeficientes del sistema en la que se ha sustituido la columna i-ésima de la matriz de coeficientes por el vector columna de los términos independientes. Entonces:

$$x_i = \frac{|\tilde{A}_i|}{|A|}, \quad 1 \leq i \leq n$$

es la única solución del sistema. La demostración rigurosa de esta fórmula se realizará en [**3**, Proposición 3.6.2].

Ejemplo 1.3.5. Nos proponemos discutir y resolver por la regla de Cramer (si es posible) el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 4 \\ 2x - y + 2z = 3 \\ x + 3y + 2z = -5. \end{cases}$$

Calculamos a continuación el rango de A y el de la matriz ampliada A^*.

El rango de la matriz de los coeficientes A es:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad rg(A) \geq 2$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -35 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad rg(A) = 3.$$

El rango de la matriz ampliada es también 3, ya que esta contiene a A y no contiene ningún menor de orden 4.

Dado que $rango(A) = rango(A^*) = 3 =$ número de incógnitas, el sistema es compatible y determinado; por tanto, tiene una única solución.

Resolvemos el sistema mediante la regla de Cramer. El determinante de A lo habíamos calculado antes y era -35.

Aplicando la regla de Cramer se obtiene que

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ -5 & 3 & 2 \end{vmatrix}}{-35} = \frac{68}{35}; \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & -5 & 2 \end{vmatrix}}{-35} = -\frac{53}{35}$$

y $$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -5 \end{vmatrix}}{-35} = -\frac{42}{35}.$$

Por tanto, la solución del sistema es $x = \frac{68}{35}$, $y = -\frac{53}{35}$, $z = -\frac{42}{35}$. □

1.3.6. Método de Gauss. Dado un sistema de m ecuaciones con n incógnitas se trata de obtener un sistema equivalente más simple cuya primera ecuación tenga n incógnitas, la segunda $n-1$, la tercera $n-2$, y así sucesivamente hasta llegar a la última ecuación. Esta última ecuación tendrá una única incognita si el sistema es compatible determinado; si es compatible indeterminado, el número de incógnitas de la última ecuación es $n-r+1$ (nótese que $r < n$). Si el sistema es incompatible, la última ecuación nos quedara de la forma $0 = a$, con $a \neq 0$ y, lógicamente, al no tener sentido se deduce que el sistema no tiene solución.

Para obtener un sistema equivalente a otro se debe sumar a una ecuación del sistema cualquier otra ecuación multiplicada por un número, o bien multiplicar una ecuación por un número.

Hecho esto, resolvemos la última ecuación, a continuación la penúltima y así hasta llegar a la primera. Es decir, el método de Gauss consiste en triangular la matriz de coeficientes, eliminando las ecuaciones que en el proceso sean nulas. De esta forma, la matriz ampliada quedará:

$$A'^{*} = \left(\begin{array}{ccccccccc|c} 1 & a'_{12} & a'_{13} & \dots & \dots & \dots & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & 1 & a'_{23} & \dots & \dots & \dots & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & a'_{3n} & b'_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a'_{r\,r+1} & \dots & a'_{rn} & b'_{r-1} \end{array}\right).$$

Una vez realizado este proceso, se irán resolviendo las ecuaciones con menos incógnitas y se utilizarán estas soluciones en las ecuaciones anteriores.

Veamos, con un ejemplo, el proceso para calcular la matriz A'^{*}. Sea el sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas:

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{array}\right. \tag{1.3.3}$$

y supongamos que $a_{11} \neq 0$ (siempre se puede suponer, pues si no lo fuera así en la primera ecuación, intercambiaríamos la primera con otra ecuación en la que el coeficiente de la incógnita x_1 fuera distinto de cero).

(a) Dividimos la primera ecuación por a_{11} y obtenemos

$$x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}\,x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}\,x_3 = +\frac{b_1}{a_{11}}.$$

(b) Multiplicamos la ecuación obtenida en el apartado anterior por a_{21} y la restamos de la segunda ecuación obteniendo:

$$[a_{22} - \frac{a_{21}a_{12}}{a_{11}}]\,x_2 + [a_{23} - \frac{a_{21}a_{13}}{a_{11}}]\,x_3 = b_2 - \frac{a_{21}b_1}{a_{11}}.$$

Hacemos el mismo proceso con la tercera ecuación multiplicando la primera por a_{31} para obtener:

$$[a_{32} - \frac{a_{31}a_{12}}{a_{11}}]x_2 + [a_{33} - \frac{a_{31}a_{13}}{a_{11}}]x_3 = b_3 - \frac{a_{31}b_1}{a_{11}}.$$

Como las operaciones realizadas transforman el sistema inicial en uno equivalente, bastará entonces con resolver un sistema de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} x_1 + a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 &= b'_1 \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 &= b'_2 \\ a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 &= b'_3. \end{aligned} \tag{1.3.4}$$

A continuación, repetimos el proceso anterior con este nuevo sistema, suponiendo que alguno de los $a'_{i2} \neq 0$. Si no lo fueran, pasaríamos a eliminar la incógnita x_3 de la tercera ecuación.

Realizado este proceso, nos queda entonces el sistema

$$\begin{aligned} x_1 + a''_{12}x_2 + a''_{13}x_3 &= b''_1 \\ x_2 + a''_{23}x_3 &= b''_2 \\ a''_{33}x_3 &= b''_3, \end{aligned} \tag{1.3.5}$$

que es un sistema equivalente al de partida y, al ser triangular, su resolución es sencilla, pues de la tercera ecuación se deduce (si $a''_{33} \neq 0$) que $x_3 = \frac{b''_3}{a''_{33}}$. Sustituyendo este valor en la segunda, calcularíamos el valor para la incógnita x_2 y con estos dos, se resuelve la primera ecuación para obtener la solución.

El método de Gauss trabaja únicamente con los coeficientes del sistema, es decir, a la hora de efectuarlo, basta hacer las operaciones en la matriz ampliada:

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & a'_{12} & a'_{13} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & b'_2 \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} & b'_3 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & a'_{12} & a'_{13} & b'_1 \\ 0 & 1 & a''_{23} & b''_2 \\ 0 & 0 & a''_{33} & b''_3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & a'_{12} & a'_{13} & b'_1 \\ 0 & 1 & a''_{23} & b''_2 \\ 0 & 0 & 1 & b'''_3 \end{pmatrix}.$$

Puede suceder que, como resultado de la aplicación de las transformaciones anteriores a las ecuaciones del sistema, aparezca alguna ecuación sin sentido donde el miembro de la izquierda es 0 y el término independiente no lo sea. Entonces el sistema dado es equivalente a un sistema incompatible.

Cuando en el proceso nos aparezca una ecuación del tipo $0 = 0$ (ecuación trivial), ésta se debe eliminar y la matriz tendrá una fila menos.

Si ninguna ecuación es de la forma $0 = c_i$, con $c_i \neq 0$, el sistema resulta compatible. Será determinado si el número de ecuaciones no triviales coincide con el número de incógnitas.

Ejemplo 1.3.6. Resolver el siguiente sistema usando el método de Gauss.

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z + 5t = 5 \\ 6x + 15y + 19z + 23t = 30 \\ 8x + 42y + 60z + 70t = 98 \\ 12x + 60y + z + 17t = 144. \end{cases}$$

Escribimos la matriz ampliada para resolver el sistema utilizando eliminación gaussiana:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 5 \\ 6 & 15 & 19 & 23 & 30 \\ 8 & 42 & 60 & 70 & 98 \\ 12 & 60 & 1 & 17 & 144 \end{pmatrix}.$$

Dividimos la primera ecuación por 2 para obtener un 1 en la primera posición. Una vez hecho esto, para eliminar la primera incógnita en las restantes ecuaciones, restamos a la segunda ecuación 3 veces la primera, a la tercera 4 veces la primera y a la cuarta 6 veces la primera. Obtenemos:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{3}{2} & 2 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 6 & 7 & 8 & 15 \\ 0 & 30 & 44 & 50 & 78 \\ 0 & 42 & -23 & -13 & 114 \end{array}\right).$$

Para conseguir que la incógnita y aparezca multiplicada por 1 en la segunda ecuación, dividimos ésta por 6. Además, si restamos a la tercera ecuación 5 veces la segunda y a la cuarta 7 veces la segunda, el resultado es:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{3}{2} & 2 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & \frac{7}{6} & \frac{4}{3} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 9 & 10 & 3 \\ 0 & 0 & -72 & -69 & 9 \end{array}\right).$$

Ahora solo nos queda conseguir que en la tercera ecuación la variable z esté multiplicada por 1 y que en la cuarta la variable z no aparezca. Para ello, dividimos la tercera por 9 y sumamos a la cuarta 8 veces la tercera y obtenemos:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{3}{2} & 2 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & \frac{7}{6} & \frac{4}{3} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{10}{9} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 11 & 33 \end{array}\right),$$

que determina el siguiente sistema escalonado:

$$\begin{cases} x + \dfrac{3}{2}\,y + 2z + \dfrac{5}{2}\,t = \dfrac{5}{2} \\ \qquad y + \dfrac{7}{6}\,z + \dfrac{4}{3}\,t = \dfrac{5}{2} \\ \qquad\qquad z + \dfrac{10}{9}\,t = \dfrac{1}{3} \\ \qquad\qquad\qquad 11t = 33. \end{cases}$$

Este sistema se resuelve inmediatamente por sustitución regresiva, es decir, de la última ecuación se sigue el valor de la última incógnita, llevando este valor a la penúltima ecuación se calcula la penúltima incógnita y así sucesivamente. De esta forma se obtiene que

$$t = \frac{33}{11} = 3 \qquad\qquad z = \frac{3 - 10{\cdot}3}{9} = -3$$

$$y = \frac{15 - 7{\cdot}(-3) - 8{\cdot}3}{6} = 2 \qquad\qquad x = \frac{5 - 3{\cdot}2 - 4{\cdot}(-3) - 5{\cdot}3}{2} = -2$$

y el sistema está resuelto. □

1.3.6.1. Inversa de una matriz utilizando el Método de Gauss. Para concluir este capítulo inicial vamos a utilizar el método de Gauss para calcular la inversa de una matriz. El procedimiento que vamos a detallar se puede aplicar a cualquier matriz cuadrada, de tal modo que si esta matriz es invertible (tiene determinante no nulo) el resultado final es su matriz inversa, mientras que si no es posible invertirla los datos finales nos mostrarán esa imposibilidad.

Así, si A es una matriz cuadrada $n \times n$ e I es la matriz identidad, el cálculo de la matriz inversa utilizando el método de Gauss consiste en realizar transformaciones elementales de las filas en la $n \times 2n$ matriz $\begin{pmatrix} A & | & I \end{pmatrix}$ hasta intentar conseguir una matriz $n \times 2n$ en la que la matriz $n \times n$ de la izquierda es la matriz identidad, es decir una matriz de la forma $\begin{pmatrix} I & | & \tilde{A} \end{pmatrix}$. De forma análoga al caso del Método de Gauss para sistemas de ecuaciones, una transformación elemental de una fila de la matriz es sumarle otra fila de la misma multiplicada por un número, o multiplicando una fila por un número.

Cuando una matriz de esta forma puede obtenerse, entonces $\tilde{A} = A^{-1}$, mientras que si no puede obtnerse la matriz identidad a la izquierda de la matriz, por ejemplo al aparecer una fila donde todos los coeficientes son cero, entonces no existe A^{-1}.

Para visualizar este proceso de cálculo de matrices inversas, vamos a ver un ejemplo en el que que la matriz inversa existe y otro ejemplo en el que no sea posible calcular dicha matriz inversa.

Ejemplo 1.3.7. Nos proponemos ahora calcular, utilizando el método de Gauss la inversa de la matriz A del Ejemplo 1.2.16:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Para ello empezamos considerando la matriz

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Restando a la segunda fila la primera fila se obtiene

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

mientras que si ahora a la tercera fila le sumamos dos veces la primera fila se consigue la matriz

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Entonces, para obtener la tercera fila de la matriz identidad en la parte de la izquierda tan solo debemos dividir esta tercera fila entre 6 obteniendo:

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{6} \end{array}\right).$$

Finalmente, si a la primera fila le restamos dos veces la tercera fila y a la segunda fila se le resta la tercera fila se concluye que

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{3} & 1 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{6} \end{array}\right).$$

Por tanto, la matriz inversa de A es

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3} & 1 & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix},$$

que coincide con el resultado obtenido en el Ejemplo 1.2.16. □

Ejemplo 1.3.8. Para concluir vamos a intentar calcular la inversa de la matriz

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

utilizando el método de Gauss.

Consideremos la matriz auxiliar

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Si a la segunda fila se le resta dos veces la primera se obtiene la matriz

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

y al restar de la tercera fila la segunda fila de esta matriz se tiene

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Por tanto, como hay una fila de ceros, es imposible conseguir la matriz identidad en la parte izquierda de esta matriz auxiliar y no existe $[A']^{-1}$. Este hecho es coherente con el valor nulo del determinante de A'.

□

Capítulo 2

ESPACIOS VECTORIALES

Este capítulo y el siguiente contienen definiciones y resultados que constituyen el lenguaje básico del Álgebra Lineal. Así, en este capítulo, tras una sección dedicada a las principales estructuras algebraicas, se definirán los espacios vectoriales, que son el ámbito de estudio de esta rama de las Matemáticas, además de ofrecer un estudio detallado de los subespacios vectoriales (herramientas fundamentales en Geometría), la demostración de la existencia de bases en espacios vectoriales y el desarrollo de la teoría de la dimensión. Posteriormente el Capítulo 3 se dedicará a analizar las relaciones entre los espacios vectoriales, que se denominan "Aplicaciones Lineales".

2.1. Estructuras algebraicas

Antes de iniciar el estudio de los espacios vectoriales, que son los objetos fundamentales en Álgebra Lineal, se van a presentar estructuras algebraicas que serán necesarias a lo largo del manual. Así, en este capítulo se definirán y se presentarán las propiedades básicas de conjuntos, grupos, anillos y cuerpos. La noción de cuerpo será imprescindible para definir los espacios vectoriales. Estos conceptos serán ampliados en el Capítulo 1 del Volumen II de este manual.

2.1.1. Conjuntos. En cualquier campo de las Matemáticas los objetos que inician su estudio son los conjuntos.

La noción de conjunto es intrínseca a cualquier ser racional, ya que no puede ser definido: no es posible encontrar una definición en la que no aparezca un sinónimo suyo.

Los conjuntos están formados por elementos y si un elemento x forma parte de un conjunto X se denotará por $x \in X$.

Los ejemplos de conjuntos numéricos más habituales son:

- Números Naturales: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$
- Números Enteros: $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
- Números Racionales: $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \text{ con } a, b \in \mathbb{Z} \text{ y } b \neq 0\}$.
- Números Irracionales: $\mathbb{I}$, que son límites de sucesiones de números racionales que no son racionales. Ejemplos de números irracionales son e, $\sqrt{2}$ o π.

- Números Reales: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$, siendo esta unión disjunta (no existe ningún número real que sea a la vez racional e irracional).
- Números Complejos: $\mathbb{C} = \{a + bi \text{ con } a, b \in \mathbb{R} \text{ e } i^2 = -1\}$.

DEFINICIÓN 2.1.1. Se dice que un conjunto A es un subconjunto de un conjunto X, y se denota por $A \subseteq X$, cuando todos los elementos de A son también elementos de X. □

En el caso de los conjuntos numéricos anteriores, es inmediato que se existe la siguiente cadena de subconjuntos:

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}\,.$$

Igualmente, se tienen las inclusiones de subconjuntos $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.

Dado un conjunto X y dos subconjuntos $A, B \subseteq X$, se verifica de forma inmediata que $A = B$ si y solo si simultáneamente se tiene que $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.

Todo conjunto X tiene siempre dos subconjuntos triviales:

- el subconjunto vacío, $\emptyset$, que no tiene ningún elemento;
- el subconjunto total, X, del que forman parte todos los elementos de X.

DEFINICIÓN 2.1.2. El conjunto de los subconjuntos de X se denomina **partes de** X y se denota $P(X)$. □

2.1.2. Unión e intersección de subconjuntos. Dados dos subconjuntos de un conjunto X, las operaciones naturales son la unión y la intersección de ambos que se definen del siguiente modo:

DEFINICIÓN 2.1.3. Se denomina **unión** de dos subconjuntos A y B de un conjunto X, $A \cup B$, al subconjunto de X formado por los elementos de X que pertenecen a A o pertenecen a B, i.e.

$$A \cup B = \{x \in X \text{ tales que } x \in A \text{ o } x \in B\}\,.$$

□

DEFINICIÓN 2.1.4. Se denomina **intersección** de dos subconjuntos A y B de un conjunto X, $A \cap B$, al subconjunto de X formado por los elementos de X que pertenecen a A y pertenecen a B, i.e.

$$A \cap B = \{x \in X \text{ tales que } x \in A \text{ y } x \in B\}\,.$$

□

De forma iterativa pueden definirse la unión y la intersección de un número finito de subconjuntos de X.

De las Definiciones 2.1.3 y 2.1.4 se deduce inmediatamente que la unión y la intersección de subconjuntos verifican las siguientes propiedades:

- $A \cap X = A$ y $A \cup X = X$;
- $A \cap \emptyset = \emptyset$ y $A \cup \emptyset = A$;