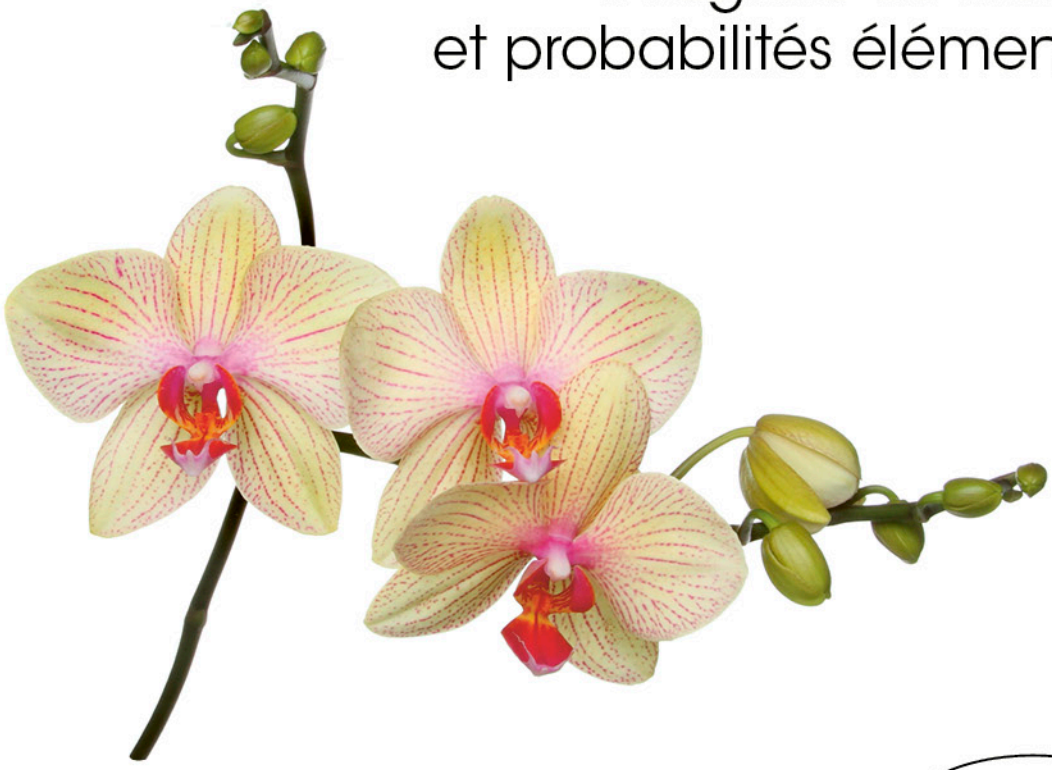
Yves Coudène

L1
L2

# La géométrie du hasard

## Intégrale de Riemann et probabilités élémentaires



ellipses

Références sciences

# La géométrie du hasard

## Intégrale de Riemann et probabilités élémentaires

Yves Coudène

ellipses

Collection Références sciences

dirigée par Paul de Laboulaye
paul.delaboulaye@editions-ellipses.fr

*Retrouvez tous les livres de la collection et des extraits sur www.editions-ellipses.fr*

ISBN 9782340-120853
Dépôt légal : novembre 2026
©Ellipses Édition Marketing S.A.
8/10 rue la Quintinie 75015 Paris

DANGER LE PHOTOCOPILLAGE TUE LE LIVRE

Le Code de la propriété intellectuelle et artistique n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article L. 122-5, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite » (alinéa 1er de l'article L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

# Introduction

*Mais malheur à l'auteur qui veut toujours instruire !*
*Le secret d'ennuyer est celui de tout dire.*

Voltaire (1694–1778)

Dans un texte adressé à l'Académie parisienne en 1654 [Pa1][Me], Blaise Pascal se propose de rédiger un traité scientifique consacré au partage des enjeux, que l'on serait tenté de considérer comme le premier ouvrage de mathématiques portant sur les probabilités, s'il avait été mené à terme. Pascal souhaite l'intituler *Alea Geometriae*, c'est-à-dire la géométrie du hasard.

Trois siècles après sa mort, force est de constater que le philosophe avait choisi ce titre avec une remarquable prescience et une grande justesse. La théorie des probabilités entretient aujourd'hui des liens étroits avec la théorie de l'intégration, laquelle trouve ses origines dans le calcul des aires et des volumes en géométrie euclidienne. Nous nous sommes permis de reprendre ce titre, en hommage à ce grand esprit du XVII$^{e}$ siècle, à la fois mathématicien, physicien, inventeur, philosophe et moraliste.

*À qui s'adresse ce livre*

Nous traitons dans ce livre l'ensemble du programme d'intégration et de probabilités enseigné dans les premiers cycles universitaires de niveau L1 et L2, ainsi que dans les classes préparatoires scientifiques. Ce texte a été enseigné à l'université de Rennes, à l'université de Brest et, plus récemment, à Sorbonne Université. Enfin, cet ouvrage a été conçu afin de préparer au mieux les étudiants aux cours d'intégration et de probabilités de niveau L3 et de première année d'école d'ingénieurs. Il est suivi d'un autre livre publié aux éditions Ellipses, qui traite cette fois-ci de l'intégrale de Lebesgue et de la théorie moderne des probabilités, telles qu'elles sont enseignées en troisième année de licence [Co].

Nous espérons que ce livre pourra être aussi utile aux étudiants préparant le CAPES ou l'agrégation de mathématiques. Certains compléments peuvent être exploités lors des épreuves orales, notamment pour illustrer les relations entre le discret et le continu.

*Plan de l'ouvrage*

Cet ouvrage se compose de trois parties. La première est consacrée à l'intégration au sens de Riemann. Elle est motivée par des considérations de nature géométrique, en particulier par le calcul des aires et des volumes. Le cadre est l'intégration des fonctions continues par morceaux, à une ou plusieurs variables, à valeurs réelles ou complexes. La formule de Taylor avec reste intégral est étudiée en détail au second chapitre pour obtenir les développements en série des fonctions classiques. Le troisième chapitre traite d'intégrales généralisées, tandis que le quatrième chapitre porte sur les intégrales multiples, d'abord dans le plan puis ensuite en dimension quelconque.

La seconde partie porte sur la théorie des probabilités élémentaires, aussi bien sous sa forme discrète — avec les lancers de dés et de pièces de monnaie — que sous sa forme continue, illustrée par exemple par des modèles de files d'attente ou de bus souvent en retard. Cette partie peut être abordée avec profit sans connaissance préalable des probabilités. Le chapitre 5 concerne la théorie des ensembles et le dénombrement avec les coefficients binomiaux chers à Pascal [Pa2], [Der]. Les notions de base en probabilités apparaissent au chapitre 6 aussi bien dans le cadre discret et continu, les deux cas étant traités en parallèle. Vient ensuite la notion de variable aléatoire au chapitre 7 pour arriver à la notion d'indépendance au chapitre 8, qui est le plus long du livre. Le but est de démontrer la loi faible des grands nombres, puis ensuite de parler de probabilités conditionnelles pour terminer par la formule de Bayes.

Nous avons veillé à ce que les deux premières parties du livre puissent être lues de manière largement indépendante, quitte à admettre certains résultats d'intégration lors de l'étude des probabilités.

Chaque chapitre se termine par une section d'exercices. Ce sont des énoncés de niveaux variés présentés par ordre de difficulté. Au début de la section consacrée aux exercices du chapitre se trouve un renvoi à la troisième partie du livre, vers des indications aidant à leurs résolution. Il ne faut pas hésiter à les consulter. Chaque indication renvoie ensuite à la correction de l'exercice correspondant, présentée en détail dans la troisième partie, où sont rassemblés à la fois les énoncés et leurs solutions.

Des compléments figurent à la fin de certains chapitres. Ils peuvent être abordés lors d'une seconde lecture et approfondissent le corps du texte. Ces compléments peuvent faire partie d'un cours de seconde ou troisième année de licence suivant l'organisation du cursus.

Nous nous sommes parfois écarté de la terminologie usuelle. En intégration, nous avons défini les sommes de Riemann en découpant l'axe réel en intervalles de lon-

gueur $1/n$ plutôt qu'en utilisant un découpage uniforme de l'intervalle de définition de la fonction. Cela simplifie la théorie. Une fois celle-ci en place, il est aisé de revenir à la définition habituelle des sommes de Riemann. En probabilité, on a préféré parler de variables à densité plutôt que de variables continues, pour éviter toute confusion avec la notion de fonction continue.

*Nouveautés*

À côté d'un corpus classique enseigné dans toutes les universités françaises se trouvent abordés dans ce livre un certain nombre de résultats plus originaux, rarement mentionnés dans la littérature francophone. Voici en quoi ils consistent.

– Dans l'étude de l'intégrale de Riemann, on a fait intervenir la notion de module de continuité uniforme. Cela permet d'obtenir sans difficulté des vitesses de convergence pour les sommes de Riemann des fonctions de classe $C^1$ (corollaire 1 page 44).

– Le problème de Bâle consiste à trouver la somme des inverses des carrés des nombres entiers. Une démonstration astucieuse de ce résultat figure dans le complément page 34. On peut l'utiliser en théorie de Fourier pour montrer la densité des polynômes trigonométriques ([Co] §7.2).

– On peut calculer facilement l'aire de la parabole et plus généralement l'aire sous le graphe des fonctions puissances en utilisant une décomposition de l'axe réel en intervalles dont les extrémités forment une suite géométrique (complément 4 page 61). Cette méthode remonte à Pierre de Fermat, elle est antérieure à l'invention du calcul différentiel.

– Nous donnons une démonstration du théorème de convergence dominée dans le cadre de l'intégrale de Riemann pour les suites de fonctions bornées en norme uniforme (complément 6 page 64). Ce n'est pas la preuve la plus courte possible, mais elle prépare bien aux notions de théorie de la mesure qui seront vues en troisième année de licence.

– Le théorème du point fixe de Brouwer peut se déduire d'un cas particulier de la formule de Green-Riemann qui se démontre aisément (théorème 23 page 95). C'est une application intéressante du calcul intégral à plusieurs variables.

– La formule de Stirling permet d'obtenir un équivalent pour la factorielle d'un entier. Nous avons donné un encadrement explicite pour cet équivalent (proposition 18 page 112) qui vient de [Fe].

– Le reste de l'intégrale de la gaussienne admet un développement en puissances de $1/x$ qui est divergent, mais qui donne une approximation bien meilleure que le

développement convergent pour les valeurs de $x$ supérieures à trois (proposition 19 page 125).

– Le dernier complément est consacré à une démonstration élémentaire rigoureuse du théorème central limite dans le cas d'une suite de variables aléatoires indépendantes obéissant à une loi de Bernoulli (théorème 31 page 171). On aurait pu faire reposer la justification de la convergence sur le théorème de Dini, mais on a préféré utiliser le théorème de convergence dominée pour motiver son étude.

*Remerciements*

J'ai eu l'occasion au cours de ces années d'enseigner l'intégration et les probabilités avec de nombreux collègues dont les discussions stimulantes et l'enthousiasme ont largement contribué à l'élaboration de ce livre, parmi lesquels Stéphane Leborgne et François Maucourant à Rennes, Jean-Marc Derrien, Thierry Giorgiutti et Sandrine Bourgeais à Brest. Je tiens aussi à remercier les nombreux étudiants qui m'ont fait part de leurs remarques sur ce texte et ont ainsi permis de l'améliorer de manière substantielle. Ce document a été mis au point avec le logiciel LaTeX de Donald Knuth et Leslie Lamport, les figures ont été produites avec le logiciel TikZ et le logiciel maxima a été employé pour vérifier les solutions des exercices. Enfin, le logiciel Gemini 3 Pro a été utilisé pour scanner des notes manuscrites correspondant à des cours donnés en 2016.

# Table des matières

**Notations** **1**

**I Intégration** **3**

**1 Intégration des fonctions continues** **5**
1 Définition de l'intégrale de Riemann . . . . . 5
2 Propriétés de l'intégrale . . . . . 7
3 L'intégrale opération inverse de la dérivée . . . . . 9
4 Intégration par parties . . . . . 11
5 Changement de variables . . . . . 12
6 Intégration des fonctions à valeurs complexes . . . . . 15
7 Exercices . . . . . 16

**2 Formule de Taylor avec reste intégral** **19**
1 Développement de Taylor . . . . . 19
2 Étude de la fonction exponentielle . . . . . 21
3 Étude de la fonction sinus . . . . . 26
4 Étude de la fonction logarithme . . . . . 27
5 Complément : somme des inverses des carrés . . . . . 34
6 Exercices . . . . . 36

**3 Intégrale de Riemann et généralisation** **39**
1 Convergence des sommes de Riemann . . . . . 39
2 Intégration des fonctions non continues . . . . . 45
3 Intégrales généralisées . . . . . 52
4 Complément : sommes de Riemann et subdivisions . . . . . 61
5 Complément : théorème de Heine . . . . . 63

6 Complément : théorème de convergence dominée . . . . . 64
7 Exercices . . . . . 68

**4 Intégrales multiples** **71**
1 Intégration sur des rectangles . . . . . 71
2 Intégration sur un domaine général . . . . . 76
3 Théorème de changement de variables . . . . . 82
4 Intégrales à un nombre quelconque de variables . . . . . 90
5 Complément : formule de Green-Riemann . . . . . 93
6 Exercices . . . . . 97

**II Probabilités** **101**

**5 Théorie des ensembles** **103**
1 Opérations sur les ensembles . . . . . 103
2 Cardinal . . . . . 105
3 Coefficients binomiaux . . . . . 106
4 Complément : formule de Stirling . . . . . 110
5 Exercices . . . . . 113

**6 Notions de base en probabilité** **117**
1 Vocabulaire . . . . . 118
2 Probabilités discrètes . . . . . 120
3 Probabilités continues . . . . . 122
4 Complément : approximation de la loi gaussienne . . . . . 124
5 Exercices . . . . . 126

**7 Variables aléatoires** **129**
1 Notion de variable aléatoire . . . . . 130
2 Exemples de lois . . . . . 132
3 Paramètres de position . . . . . 135
4 Paramètres de dispersion . . . . . 141
5 Inégalités . . . . . 143
6 Exercices . . . . . 146

**8 Indépendance** **151**
1 Couples et multiplets de variables aléatoires . . . . . 151
2 Indépendance d'événements et de variables aléatoires . . . . . 154

3 Loi faible des grands nombres . . . . . 159
4 Probabilités conditionnelles . . . . . 164
5 Formule de Bayes . . . . . 167
6 Complément : inégalité de grandes déviations . . . . . 169
7 Complément : théorème central limite . . . . . 170
8 Exercices . . . . . 175

**III Exercices corrigés** **183**

**9 Indications pour les exercices** **185**

**10 Correction des exercices** **197**
1 Intégration des fonctions continues . . . . . 197
2 Formule de Taylor avec reste intégral . . . . . 200
3 Intégrale de Riemann et généralisation . . . . . 209
4 Intégrales multiples . . . . . 216
5 Théorie des ensembles . . . . . 225
6 Notions de base en probabilité . . . . . 235
7 Variables aléatoires . . . . . 242
8 Indépendance . . . . . 255

**Index** **285**
1 Table de primitives usuelles . . . . . 285
2 Formulaire de trigonométrie . . . . . 286
3 Tables de lois . . . . . 287
4 Table de loi normale . . . . . 288

**Bibliographie** **289**

**Index** **291**

## Notations

Les ensembles des nombres entiers, entiers relatifs, réels et complexes sont notés respectivement $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$.

$\mathbf{1}_A$ ..... fonction indicatrice de l'ensemble $A$
$A^c$ ..... complémentaire de l'ensemble $A$
$A \triangle B$ ..... différence symétrique des ensembles $A$ et $B$
$B(x, r)$ ..... boule ouverte de centre $x$ de rayon $r$
$C^\infty$ ..... ensemble des fonctions indéfiniment différentiables
$C_c$ ..... ensemble des fonctions continues à support compact
$\mathrm{cov}(X, Y)$ ..... covariance de $X$ et $Y$
$E(X)$ ..... espérance de $X$
$F_X$ ..... fonction de répartition
$\mathbf{N}^*$ ..... nombres entiers non nuls
$\Omega$ ..... ensemble de résultats
$\circ$ ..... composition
$\emptyset$ ..... ensemble vide
$P$ ..... mesure de probabilité
$P_X$ ..... loi de la variable aléatoire $X$
$P_{(X,Y)}$ ..... loi du couple $(X, Y)$
$P(A \mid B)$ ..... probabilité de $A$ sachant $B$
$p.p.$ ..... presque partout
$p.s.$ ..... presque sûrement
$S_n$ ..... somme de $X_1$ à $X_n$
$\sigma(X)$ ..... écart-type de $X$
$V(X)$ ..... variance de $X$
${}^tA$ ..... transposée de la matrice $A$
$\mathcal{T}$ ..... ensemble des événements
$\coprod$ ..... union disjointe
$X$ ..... variable aléatoire
$\langle f, g\rangle$, $\langle X, Y\rangle$ ..... produit scalaire dans $L^2$

# Première partie

# Intégration

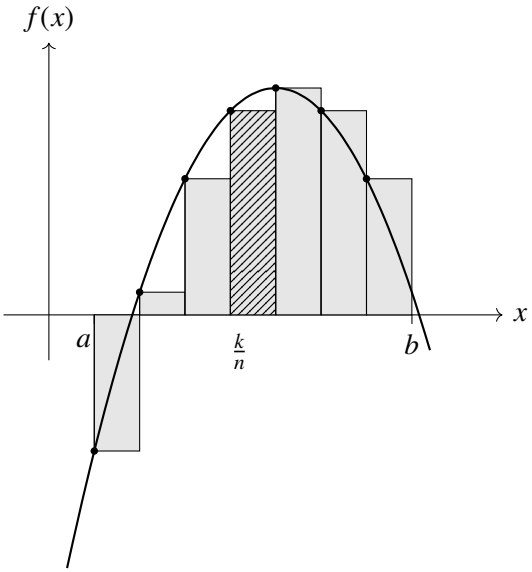
# Chapitre 1

# Intégration des fonctions continues

L'intégrale d'une fonction continue a une signification géométrique immédiate, il s'agit de l'aire qui se situe sous le graphe de la fonction. Pour la calculer, on approche le domaine situé sous le graphe de la fonction par un nombre fini de rectangles puis on cherche à passer à la limite lorsque la largeur de ces rectangles tend vers zéro.

## 1 Définition de l'intégrale de Riemann

Soit $a, b$ deux nombres réels tels que $a \leq b$. Pour définir l'intégrale d'une fonction $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ continue, nous cherchons à approcher l'aire située sous le graphe de la fonction.



Choisissons un entier $n \in \mathbf{N}$ et subdivisons l'axe des abscisses en intervalles de longueur $\frac{1}{n}$. Les points de la subdivision sont de la forme $\frac{k}{n}$. Le rectangle situé sur l'intervalle $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$ a une hauteur égale à $f(\frac{k}{n})$. Son aire vaut $f(\frac{k}{n}) \times \frac{1}{n}$.

La somme des aires des bâtons donne la *somme de Riemann* d'ordre $n$ de $f$ :

$$S_n(f) = \frac{1}{n} \sum_k f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Cette somme porte sur tous les entiers $k \in \mathbf{Z}$ tels que $a \leq \frac{k}{n} < b$, c'est-à-dire tels que $na \leq k < nb$.

On pourrait définir cette somme de manière un peu différente en subdivisant $[a, b]$ en intervalles de la forme $[a + \frac{k}{n}(b-a), a + \frac{k+1}{n}(b-a)]$ avec $k$ allant de 0 à $n-1$. La somme est alors donnée par la formule

$$\tilde{S}_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right)$$

Ces deux expressions coïncident si $a = 0$ et $b = 1$. Nous verrons que la première a l'avantage de rendre la relation de Chasles évidente. Nous traiterons le cas de subdivisions plus générales en complément au chapitre 3.

**Théorème 1.** *Soit $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ une fonction continue. Alors la suite $S_n(f)$ est convergente. Sa limite est appelée intégrale de $f$ sur $[a, b]$ et notée $\int_{[a,b]} f(x)\,dx$.*

$$\int_{[a,b]} f(x)\,dx = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{na \leq k < nb} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Ce théorème sera démontré un peu plus tard dans le cours. Il est aussi valide avec $\tilde{S}_n(f)$, qui donne la même limite. Dans la suite, on va déduire toutes les propriétés de l'intégrale à partir de cette définition.

Soit $I$ un intervalle de $\mathbf{R}$ sur lequel $f$ est définie continue et $a, b \in I$. On pose

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{[a,b]} f(x)\,dx \text{ si } a \leq b,$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_{[b,a]} f(x)\,dx \text{ si } a \geq b.$$

Comme cas particulier, nous avons $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.

**Exemple :** calcul de $\int_0^1 x\,dx$ à partir de la définition.

$$\int_0^1 x\ dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{0\le k<n} \frac{k}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} \left( \sum_{k=0}^{n-1} k \right)$$

Calculons cette limite à l'aide du résultat suivant.

**Lemme 1.** *Soit $m \in \mathbf{N}$. Alors* $\sum_{k=0}^{m} k = \frac{m(m+1)}{2}$.

*Démonstration.* Il suffit de retourner la somme et de l'ajouter à elle-même.

$$\begin{array}{cccccccccccccc} & 0 & + & 1 & + & 2 & + & \dots & + & m-2 & + & m-1 & + & m \\ + & m & + & m-1 & + & m-2 & + & \dots & + & 2 & + & 1 & + & 0 \\ \hline = & m & + & m & + & m & + & \dots & + & m & + & m & + & m \end{array}$$

Nous voyons que le double de la somme est égal au produit de $m$ par $m+1$. □

Ici, on somme jusqu'à $n-1$, donc la somme vaut $\frac{(n-1)n}{2}$. Nous obtenons

$$\int_0^1 x\ dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} \frac{n(n-1)}{2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{2}$$

Sur cet exemple, on voit que le calcul est assez lourd, d'autant plus que le résultat est bien connu. La partie située sous le graphe de la fonction $x \mapsto x$ est un triangle rectangle isocèle dont l'aire est la moitié du carré de côté unité.

## 2 Propriétés de l'intégrale

Soient $f, g : [a,b] \to \mathbf{R}$ continues et $\lambda \in \mathbf{R}$. On note $f \ge 0$ si $f(x) \ge 0$ pour tout $x \in [a,b]$ et $f \le g$ si $f(x) \le g(x)$ pour tout $x \in [a,b]$.

1. **Linéarité :** $\int_{[a,b]} (\lambda f + g)(x)\,dx = \lambda \int_{[a,b]} f(x)\,dx + \int_{[a,b]} g(x)\,dx$
2. **Positivité :** si $f \ge 0$, alors $\int_{[a,b]} f(x)\,dx \ge 0$
3. **Monotonie :** si $f \le g$, alors $\int_{[a,b]} f(x)\,dx \le \int_{[a,b]} g(x)\,dx$
4. **Inégalité triangulaire :** $\left| \int_{[a,b]} f(x)\,dx \right| \le \int_{[a,b]} |f(x)|\,dx$

Nous avons également une relation d'additivité relativement à l'intervalle sur lequel la fonction est intégrée.

**Relation de Chasles :** Soit $I$ un intervalle de $\mathbf{R}$ et $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction continue. soient $a, b, c \in I$ tels que $a \leq b \leq c$. Alors

$$\int_{[a,c]} f(x)\,dx = \int_{[a,b]} f(x)\,dx + \int_{[b,c]} f(x)\,dx$$

La linéarité et la relation de Chasles subsistent si on remplace $\int_{[a,b]}$ par $\int_a^b$ même si $b < a$. Par contre, l'implication $f \leq g \Rightarrow \int f \leq \int g$ n'est vraie que si $a \leq b$. Elle est renversée si $a \geq b$. L'inégalité triangulaire n'est vrai que si $a \leq b$.

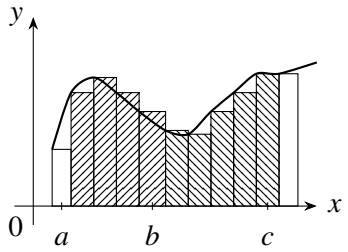
*Démonstration.* Commençons par la linéarité. Nous avons

$$S_n(\lambda f + g) = \lambda S_n(f) + S_n(g)$$

par définition de la somme. En passant à la limite quand $n \to +\infty$, le résultat en découle car la limite d'une somme est la somme des limites.

L'inégalité $\int f \geq 0$ implique $S_n(f) \geq 0$ pour tout $n$. La limite d'une suite positive est encore positive, ce qui entraîne la positivité. Pour la monotonie, il suffit d'appliquer le point précédent à la différence $g - f$. L'inégalité triangulaire s'obtient en passant à la limite dans la majoration

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{na\leq k<nb} f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq \frac{1}{n}\sum_{na\leq k<nb} \left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right|$$




La relation de Chasles s'obtient en passant à la limite dans l'égalité suivante.

$$\frac{1}{n}\sum_{na\leq k<nb} f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{n}\sum_{nb\leq k<nc} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{na\leq k<nc} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

□

On remarque que $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ pour tout point $a$ dans le domaine de définition de $f$. On vérifie également que l'intégrale sur un intervalle d'une fonction constante est égale à cette constante multipliée par la longueur de l'intervalle. Définissons

$$\|f\|_\infty = \max\{|f(x)| \mid x \in [a,b]\}$$

C'est la plus petite constante $C$ pour laquelle $-C \leq f \leq C$. La monotonie entraîne la majoration

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \|f\|_\infty |b-a|.$$

En résumé, la définition de l'intégrale à partir des sommes de Riemann nous a permis d'établir aisément les propriétés de base de cette intégrale. Elle s'avère cependant peu efficace pour les calculs explicites.

## 3 L'intégrale opération inverse de la dérivée

Pour faciliter les calculs d'intégrale, nous allons faire le lien entre cette notion et celle de dérivée et montrer que ces deux opérations sont inverses l'une de l'autre.

**Théorème 2.** *Soit $I$ un intervalle de $\mathbf{R}$, $a \in I$, et $f : I \to \mathbf{R}$ continue. On pose pour $x \in I$,*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

*Alors $F$ est dérivable sur $I$ et $F'(x) = f(x)$.*

*Démonstration.* On calcule le taux de variation $\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$.

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt = \int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

Comme $f$ est continue en $x$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour $t$ satisfaisant $|t-x| < \delta$, on a $f(x) - \varepsilon \leq f(t) \leq f(x) + \varepsilon$. Intégrons ces inégalités entre $x$ et $x+h$ si $0 < h < \delta$.

$$h(f(x) - \varepsilon) \leq \int_x^{x+h} f(t)\,dt \leq h(f(x) + \varepsilon)$$

En divisant par $h$, on obtient

$$-\varepsilon \leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\,dt - f(x) \leq \varepsilon$$

Cela montre que le taux de variation de $F$ a pour limite $f(x)$ quand $h$ tend vers 0 tout en restant strictement supérieur à 0. Le même calcul, mais avec deux inversions au niveau des inégalités, donne la même conclusion quand $h$ tend vers 0 en étant strictement inférieur à 0. □

Rappelons qu'une fonction est dite de classe $C^1$ si elle est dérivable et de dérivée continue.

**Théorème 3.** *Soit $I$ un intervalle de $\mathbf{R}$, $F : I \to \mathbf{R}$ de classe $C^1$. Alors pour tout $a, b \in I$,*

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

On utilisera parfois l'abréviation $F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$ dans la suite.

*Démonstration.* On dérive la fonction $F(x) - \int_a^x F'(t)\,dt$ par rapport à $x$. Sa dérivée est égale à $F'(x) - F'(x) = 0$, elle est donc constante, égale à sa valeur en $a$.

$$F(x) - \int_a^x F'(t)\,dt = F(a) - \int_a^a F'(t)\,dt = F(a)$$

Nous avons donc pour tout $x \in I$,

$$F(x) - F(a) = \int_a^x F'(t)\,dt.$$

Il suffit de prendre $x = b$ pour conclure. □

Une fonction $F$ est une *primitive* de $f$ si $F'(x) = f(x)$. Les théorèmes précédents montrent que toute fonction continue admet une primitive, par exemple la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$. Ils établissent aussi la relation suivante entre intégrale et primitive.

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$$

On trouvera en annexe page 285 un tableau donnant les primitives pour quelques fonctions $f$ usuelles. Ce tableau permet d'intégrer aisément les fonctions classiques. On l'obtient en dérivant les primitives et en appliquant le théorème précédent. La notation abrégée suivante est parfois utilisée pour indiquer que la fonction $F$ est une primitive de $f$.

$$\int f(t)\,dt = F(x) + C$$

Il s'agit d'un abus de notation, la constante $C$ est déterminée par les bornes de l'intégrale qui sont ici non spécifiées. La notation correcte est bien sûr

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a)$$

# 4 Intégration par parties

Il suffit d'intégrer les formules classiques associées à la dérivée d'un produit ou d'une composition de fonctions pour obtenir des règles de calcul importantes en théorie de l'intégration. La première est l'intégration par parties.

**Théorème 4.** *Soit $I$ un intervalle de $\mathbf{R}$. Soient $f : I \to \mathbf{R}$ et $g : I \to \mathbf{R}$ deux fonctions de classe $C^1$ (dérivables et de dérivées continues). Soient $a, b \in I$. Alors*

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$$

*où l'on note $[fg]_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(a)$.*

*Démonstration.* Il suffit d'intégrer la formule de dérivation $(fg)' = f'g + fg'$.

$$\int_a^b (fg)'(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b$$

D'après le théorème précédent (lien entre intégrale et primitive),

$$\int_a^b (f'g + fg')(x)\,dx = [fg]_a^b$$

Par linéarité, le résultat est démontré. □

Illustrons la règle précédente par plusieurs exemples. Il s'agit à chaque fois d'exprimer la fonction à intégrer comme un produit de deux fonctions dont l'une a une primitive connue et l'autre une dérivée facile à calculer.

**Exemples**

– Calcul de $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} x\sin(x)\,dx$.

On effectue une intégration par partie avec

$$f'(x) = \sin(x) \qquad f(x) = -\cos(x)$$
$$g(x) = x \qquad g'(x) = 1$$

ce qui entraîne

$$I = [x(-\cos(x))]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} -\cos(x)\,dx = \Big(\frac{\pi}{2} \times 0 - 0 \times (-1)\Big) + \int_0^{\pi/2} \cos(x)\,dx$$

$$I = \int_0^{\pi/2} x\sin(x)\,dx = 0 + [\sin(x)]_0^{\pi/2} = 1.$$

– Calcul de $J = \displaystyle\int_1^x \ln(t)\,dt$.

On utilise l'astuce $\ln(t) = 1 \times \ln(t)$.

$$\begin{aligned} f'(t) &= 1 & f(t) &= t \\ g(t) &= \ln(t) & g'(t) &= 1/t \end{aligned}$$

$$J = [t\ln(t)]_1^x - \int_1^x t \times \frac{1}{t}\,dt = x\ln(x) - 1\ln(1) - \int_1^x 1\,dt = x\ln(x) - x + 1.$$

La fonction $x \mapsto x\ln(x) - x$ est une primitive du logarithme.

## 5 Changement de variables

La seconde règle importante pour le calcul des intégrales provient de la formule de dérivation des fonctions composées.

**Théorème 5.** *Soit $I \subset \mathbf{R}$ un intervalle, $a, b \in I$. Soit $\varphi : [a,b] \to I$ une fonction de classe $C^1$ et $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction continue. Alors*

$$\int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\,du.$$

**Automatisme du changement de variables**

Si on pose le changement de variables $u = \varphi(t)$, on a formellement

$$\begin{cases} u = \varphi(t) \\ du = \varphi'(t)\,dt \end{cases}$$

Il suffit alors de remplacer dans l'intégrale $\int f(u)\,du$ le terme $du$ par $\varphi'(t)\,dt$ et $f(u)$ par $f(\varphi(t))$, sans oublier de modifier les bornes de l'intégrale.

*Preuve du théorème.* Posons $F(x) = \int_{\varphi(a)}^{x} f(t)\,dt$ et dérivons la composée $F \circ \varphi$.

$$(F \circ \varphi)'(t) = F'(\varphi(t))\,\varphi'(t) = f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$$

Intégrons cette égalité entre $a$ et $b$.

$$\int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = [F \circ \varphi]_a^b = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a))$$

La quantité $F(\varphi(a))$ est nulle par définition de $F$ d'où la formule recherchée. □

**Exemples**

– Soit $1 < a < b$. Calculons $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{t\ln(t)}\,dt$.

On pose $u = \ln(t)$, donc $du = \frac{1}{t}\,dt$. À la borne $t = a$ correspond $u = \ln(a)$ et à $t = b$ correspond $u = \ln(b)$.

$$\int_a^b \frac{1}{\ln(t)} \times \frac{dt}{t} = \int_{\ln(a)}^{\ln(b)} \frac{1}{u}\,du = [\ln(u)]_{\ln(a)}^{\ln(b)} = \ln(\ln(b)) - \ln(\ln(a))$$

La fonction $x \mapsto \ln(\ln(x))$ est une primitive de $\frac{1}{x\ln(x)}$.

– Calculons à présent $A = \int_0^x \sqrt{1-t^2}\,dt$ pour $x \in [0,1]$.

On effectue le changement de variables $t = \sin(v)$ ce qui implique $dt = \cos(v)\,dv$. La borne $t = 0$ correspond à $v = 0$, la borne $t = x$ à $v = \arcsin(x)$.

$$A = \int_0^{\arcsin(x)} \sqrt{1-\sin^2(v)}\cos(v)\,dv = \int_0^{\arcsin(x)} \cos^2(v)\,dv$$

car pour $v \in [0, \pi/2]$, $\cos(v)$ est positif. Pour intégrer $\cos^2(v)$, on linéarise grâce à la formule $\cos^2(v) = \frac{1+\cos(2v)}{2}$. Un formulaire de trigonométrie figure en annexe page 286.

$$A = \int_0^{\arcsin(x)} \frac{1+\cos(2v)}{2}\,dv = \left[\frac{v}{2} + \frac{\sin(2v)}{4}\right]_0^{\arcsin(x)}$$

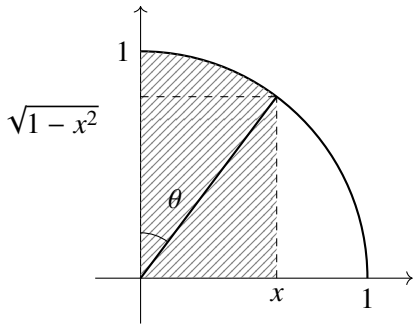
$$A = \frac{1}{2}\arcsin(x) + \frac{1}{4}\sin(2\arcsin(x))$$

On simplifie le second terme avec la formule $\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$.

$$\sin(2\arcsin(x)) = 2\sin(\arcsin(x))\cos(\arcsin(x)) = 2x\sqrt{1-x^2}$$

Finalement,

$$\int_0^x \sqrt{1-t^2}\,dt = \frac{1}{2}\arcsin(x) + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}$$




On aurait pu trouver cette formule sans calcul en procédant comme suit. Le graphe de la fonction $t \mapsto \sqrt{1-t^2}$ est un quart de cercle. Son intégrale entre 0 et $x$ est égale à l'aire de la surface hachurée sur la figure et se décompose en :

– l'aire d'un triangle de base $x$ et de hauteur $\sqrt{1-x^2}$ qui vaut $\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}$,

– l'aire d'un secteur angulaire d'angle $\theta$, où $\sin(\theta) = x$. Si le rayon vaut 1, l'aire du disque est égale à $\pi$. L'aire du secteur est $\frac{\theta}{2\pi} \times \pi = \frac{\theta}{2}$.

La somme de ces deux aires est égale à $\frac{\theta}{2} + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}$ comme attendu.

**Autres formules découlant du changement de variables**

– $\displaystyle\int_a^b f(t+c)\,dt = \int_{a+c}^{b+c} f(u)\,du$ (translation)

– $\displaystyle\int_a^b f(-t)\,dt = \int_{-b}^{-a} f(u)\,du$ (symétrie)

– $\displaystyle\int_a^b f(\lambda t)\,dt = \frac{1}{\lambda}\int_{\lambda a}^{\lambda b} f(u)\,du$ si $\lambda > 0$ (changement d'échelle).

En résumé, pour calculer une intégrale, on peut utiliser :
– une primitive,
– une intégration par parties,
– un changement de variables.
Il est parfois utile de revenir à la définition en termes de sommes de Riemann pour des questions de nature théorique. Cette définition s'avère cependant assez peu efficace du point de vue du calcul numérique approché des intégrales.

Du point de vue pratique, il est utile d'avoir bien mémorisé les primitives des fonctions classiques, telles qu'elles figurent dans le tableau que nous avons donné précédemment. Lorsque la fonction à intégrer comporte des fonctions trigonométriques, il est souvent possible de simplifier les calculs grâce aux formules trigonométriques. Les plus classiques sont rappelées en annexe en fin d'ouvrage. Le plus simple pour les établir consiste à passer par les nombres complexes.

## 6 Intégration des fonctions à valeurs complexes

Soit $\mathbf{C}$ l'ensemble des nombres complexes. On note $Re(z)$, $Im(z)$, $\bar{z}$ et $|z|$ la partie réelle, la partie imaginaire, le conjugué et le module d'un nombre complexe $z \in \mathbf{C}$.

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}$$

Soit $f : [a, b] \to \mathbf{C}$ une fonction continue. Nous définissons son intégrale par

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \mathrm{Re}(f(x))\,dx + i\int_a^b \mathrm{Im}(f(x))\,dx$$

Cette intégrale est linéaire, elle vérifie la relation de Chasles. Elle satisfait également l'égalité

$$\overline{\int_a^b f(x)\,dx} = \int_a^b \overline{f(x)}\,dx$$

La positivité n'a plus de sens faute d'avoir un ordre sur $\mathbf{C}$. On a tout de même l'inégalité suivante.

**Proposition 1.**

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx \;\; si\; a \geq b$$

Pour démontrer cette inégalité, il suffit de remarquer que les sommes de Riemann de $f$ convergent vers l'intégrale de $f$ dans le cas complexe comme dans le cas réel. Grâce à l'inégalité triangulaire, on peut majorer le module des sommes de Riemann de $f$ par les sommes de Riemann de $|f|$. Il suffit de passer à la limite pour obtenir l'inégalité désirée.

**Exemple**
Pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$\int_a^b e^{itx}\,dx = \int_a^b (\cos(tx) + i\sin(tx))\,dx$$

$$= \int_a^b \cos(tx)\,dx + i\int_a^b \sin(tx)\,dx$$

$$= \left[\frac{\sin(tx)}{t}\right]_a^b + i\left[-\frac{\cos(tx)}{t}\right]_a^b$$

$$= \left[\frac{-i}{t}e^{itx}\right]_a^b$$

$$= -i\,\frac{e^{itb} - e^{ita}}{t}$$

Les égalités intégrales que nous avons démontrées dans le cas réel sont encore vraies dans le cas complexe :

– relation entre intégrale et dérivée,

– intégration par parties,

– changement de variables.

On peut aussi procéder aux calculs d'intégrales à l'aide de primitives. Par exemple la fonction $x \mapsto -ie^{itx}/t$ est une primitive de la fonction $e^{itx}$ et nous pouvons affirmer que

$$\int_a^b e^{itx}\,dx = \left[\frac{-i}{t}e^{itx}\right]_a^b$$

sans passer par une décomposition de la fonction en partie réelle et imaginaire.

# 7 Exercices

Les indications pour les exercices qui suivent se trouvent page 185.

**Exercice 1.1**
Soit $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ une fonction continue sur $[0, 1]$.

– Rappeler la définition des sommes de Riemann de $f$ sur $[a, b]$.

– Arranger de deux façons différentes la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+1)^3 - k^3$.

– En déduire une expression simple de la somme des $n$ premiers carrés.

– Déduire du point précédent $\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx$.

**Exercice 1.2**
Soit $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ une fonction continue.

– Que valent les sommes de Riemann de la fonction $f(x) = x^3$, $x \in [0,1]$ ?

– Calculer la limite $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^4} \sum_{k=1}^{n} k^3$.

On se donne un nombre réel $\alpha > 0$. On considère maintenant la suite

$$s_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha}$$

Montrer que $s_n$ est une suite convergente et calculer sa limite.

**Exercice 1.3**
Quelle est la limite de la somme suivante, quand $N$ tend vers $+\infty$ ?

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{1 + \frac{k}{N}}$$

En déduire la limite quand $N$ tend vers $+\infty$ de la somme $\displaystyle\sum_{k=N+1}^{2N} \frac{1}{k}$.

**Exercice 1.4**
On considère la suite dont le terme général $u_n$ est donné par :

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} e^{\frac{k}{n}}$$

Montrer que $u_n$ est une suite convergente. Calculer sa limite, de deux façons différentes.

On considère maintenant la suite donnée par $v_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} e^{k/n^2}$. Montrer qu'elle converge et calculer sa limite.

# Chapitre 2

# Formule de Taylor avec reste intégral

Une application importante de la méthode d'intégration par parties est la formule de Taylor avec reste intégral. Cette formule permet d'approcher une fonction suffisamment dérivable par un polynôme dont les coefficients sont explicites. Cette approximation est à rapprocher du développement en base 10 des nombres réels. Ici, nous cherchons un développement en base $x$ d'une fonction régulière. On l'utilisera pour déterminer des encadrements, des développements limités ou encore des développements en série des fonctions classiques comme l'exponentielle ou le logarithme. Mentionnons enfin que les développements en série jouent un rôle important dans la résolution des équations différentielles même si ce point n'est pas abordé dans ce cours.

## 1 Développement de Taylor

Commençons par énoncer la formule de Taylor sous sa forme intégrale. Rappelons qu'une fonction est de classe $C^{n+1}$ si elle est dérivable $n+1$ fois, de dérivée $(n+1)$-ième continue.

**Théorème 6.** *Soit $I$ un intervalle de $\mathbf{R}$, $f : I \to \mathbf{R}$ continue, $a, b \in I$ et $n \in \mathbf{N}$. On suppose $f$ de classe $C^{n+1}$ sur $I$. Alors*

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a) \frac{(b-a)^k}{k!} + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt$$