Everaldo Ribeiro Franco
Professor Titular da Universidade Federal de Uberlândia

Luiz Paulo Mesquita Maia
(in memoriam)
Professor da Universidade Federal do Rio de Janeiro

Índice

– Apresentação **4**

– As Forças de Inércia **5**

Introdução 6

Os Fundamentos da Mecânica 6

O Conceito de Força 8

A Síntese Galileu-Newton-Euleriana 10

A Primeira Lei de Newton 10

A Segunda Lei de Newton: O Princípio do Momentum 13

A Terceira Lei de Newton: A Lei da Ação e Reação 17

A Questão do Referencial 18

Posição do Problema 20

Uma Classificação de Forças 21

Uma Classificação dos Referenciais 23

As Forças Inerciais 24

A Força de Einstein 28

A Força Centrífuga de Inércia 30

A Força de Euler 32

A Força de Coriolis 33

Forças Internas e Externas 35

Sobre a Experiência do Balde d'Água: o enigma da inércia 37

Problemas 39

– A Cinemática do Sólido **58**

Introdução 59

O Movimento de um Sistema Rígido 60

A Translação 60

A Rotação 62

O Movimento Plano Geral 65

O Teorema de Euler 65

O Centro Instantâneo de Rotação 67

Problemas 72

– A Estática Lagrangiana 80

Introdução 81

O Conceito de Deslocamento Virtual 82

O Conceito de Trabalho 82

As Reações Vinculares e as Forças Aplicadas 83

O Princípio dos Trabalhos Virtuais 84

O Princípio da Libertação de Lagrange 87

As Forças de Atrito 88

As Forças Conservativas 93

O Conceito de Energia Potencial 94

O Equilíbrio num Campo Conservativo 95

Problemas 103

– Apêndice 109

– Respostas dos Problemas 111

– Bibliografia 115

Apresentação

Há um assunto que sempre me fascinou – desde o meu colegial – e que fez parte da disciplina Física Geral I, que por mais de trinta anos lecionei para futuros engenheiros na Universidade Federal de Uberlândia: a questão dos referenciais e as forças de inércia. Aprendi muito cedo este assunto de um professor que não conheci pessoalmente, mas que influenciou decisivamente minha carreira acadêmica, pelos seus escritos cheios de precisão e elegância, o professor da Universidade Federal do Rio de Janeiro, Luiz Paulo Mesquita Maia (1923-2016).

Transcorridos muitas décadas, ainda encontra-se nos livros de Física e de Dinâmica para Engenheiros seus autores denominarem as quatro forças de inércia de fictícias, como se elas não produzissem os mesmos efeitos das forças de interação, como se elas fossem um mero artifício matemático. É sobretudo o meu inconformismo com esta linguagem anacrônica que me levou a este empreendimento, planejado para ser utilizado em cursos de graduação de Física e de Engenharia.

Portanto, já tendo concluído a minha docência, mas com o desejo de colaborar com alunos e professores, resolvi voltar aos livros do professor L. P. M. MAIA, e assim deixar registrado esse material precioso, que julgo não poder se perder no tempo. Para tal solicitei e recebi a licença de publicar este trabalho que contém os ensinamentos do professor L. P. M. MAIA, utilizando, também, aquilo que se desenvolveu no meu próprio pensamento ao longo de uma vida dedicada ao ensino de Física.

Acrescentei dois outros tópicos, também eles importantes na área tecnológica, e uma série de problemas diversos de bom nível, que poderão testar o aprendizado e a evolução dos conceitos na mente do aluno.

Por fim, desejo registrar o meu reconhecimento e admiração ao saudoso professor, acrescentando que se houver aqui algum equívoco atribua-o a mim e não ao professor L. P. M. **Maia**.

Uberlândia, julho de 2020

Prof. Everaldo Ribeiro Franco

A natureza e as leis da natureza repousam quietas na noite: Deus disse,
Deixe Newton existir! E tudo tornou-se claro!
(Alexander Pope)

As Forças de Inércia

Introdução

A parte da Mecânica que apresento é uma Mecânica Clássica ou Mecânica Newtoniana, e na exposição, ao tratar da questão dos referenciais e das forças de inércia, procuro seguir a escola de Ernst Mach (1838-1916), físico e filósofo austríaco, naquilo que é compatível. Agindo coerentemente com a diretriz a que me propus, procurei dar o maior realce à questão do referencial na estrutura da Mecânica como tratei na mesma igualdade forças de interação e forças de inércia. E não poderia ser de outra forma, já que, em essência, resulta do próprio *Princípio da Equivalência* (da Teoria da Relatividade), que forças inerciais e forças gravitacionais (que são de interação) são indistinguíveis entre si. Ressalte-se, aliás, que resulta do próprio *Princípio de Mach* que as forças inerciais são de origem gravitacional.

A equivalência entre forças inerciais e forças de interação está firmemente assentada sobre bases experimentais. Até onde os meus conhecimentos alcançaram, no ano de 1960 R. H. Diche, P. Roll e R. Krotkov realizaram, nos laboratórios de Princeton University (USA), uma série de experimentações conclusivas, de grande precisão (0,000.000.001%), que confirmaram plenamente a equivalência entre uma força centrífuga de inércia e uma força gravitacional. Consequentemente, se uma força centrífuga de inércia não for uma força, ou for uma força *fictícia*, então o peso de um corpo também não será uma força, ou será também uma força fictícia[1].

Por fim, chamo a atenção para o fato de que o tratamento do assunto feito pelo professor L. P. M. Maia, e do qual me servirei aqui, nada tem a ver com o chamado Princípio de d'Alembert, como muitos grosseiramente pensam.

Os Fundamentos da Mecânica

Do ponto de vista histórico[2], a Mecânica é o primeiro dos ramos da Física, funcionando, por isso mesmo, como a base sobre a qual se assentam vários dentre os outros ramos desta ciência, como bem o acentuou o grande pensador Ernst Mach:

"A parte da Física que é a mais fundamental e antiga, e que, portanto, é considerada básica para a compreensão de outras partes dessa ciência, tem por objeto o estudo do movimento e do equilíbrio dos corpos. É chamada Mecânica".

[1] Desejo acrescentar, por questão de verdade e justiça, que o primeiro tratamento dos referencias não inerciais feito de acordo com o Princípio da Equivalência, no Brasil, é da lavra do professor L. P. M. Maia.
[2] O estudante que tiver interesse pelo desenvolvimento histórico da Mecânica poderá ler o seguinte texto de C. TRUESDELL, Ensayos de Historia de la Mecánica, Editorial Tecnos, Madrid. 1975, que é, sem dúvida alguma, uma das maiores autoridades contemporâneas da História da Mecânica.

Usando uma linguagem bastante simples, diremos que a Mecânica é aquele ramo da Física onde são estudados – onde são tratados – os dois problemas básicos seguintes:

1º) *conhecendo-se o movimento de um sistema material, caracterizar*, isto é, *determinar as forças que atuam sobre ele*;

2º) *conhecendo-se as forças que atuam sobre um sistema material, caracterizar*, isto é, *descrever o seu movimento*.

E assim, antes de prosseguir, uma pergunta surge, então, muito naturalmente. E a Mecânica apresenta alguma importância?

Bem, é claro que para se dizer se determinado ramo do conhecimento humano é ou não importante, é necessário, antes de mais nada, que se precise claramente qual a área da atividade humana relativamente à qual se está querendo saber do valor do ramo do conhecimento considerado, pois que dificilmente uma coisa é intrinsecamente importante. Assim é que, por exemplo, a Mecânica não tem importância alguma para um cirurgião que vai realizar um transplante de um órgão. Para ele seria mais importante poder conhecer quais as probabilidades do novo órgão não ser rejeitado pelo novo organismo hospedeiro, e tal conhecimento nada tem a ver com a Mecânica. Mas pensemos agora nas diversas naves espaciais, tripuladas ou não, que saem da Terra e que estão destinadas aos mais variados pontos do nosso Universo. Todas estão equipadas com giroscópios, e giroscópios são instrumentos tipicamente mecânicos. Então, por esse motivo, e por muitos outros, a Mecânica é importante para os homens que trabalham nas pesquisas espaciais. Mas a Mecânica não é importante somente aí. Em verdade, não se pode falar de Engenharia sem que a Mecânica esteja constantemente presente.

É interessante ainda assinalar, que as primeiras pesquisas de vulto, destinadas à construção de teorias que permitissem a manipulação racional da imensa massa de conhecimentos experimentais que o ser humano veio acumulando no decorrer dos séculos, são devidas aos gregos dos períodos Clássico e Helenístico, sobretudo devido aos trabalhos de Aristóteles (384a.C-322a.C) e Arquimedes (287a.C-212a.C). Mas a Mecânica, tal qual hoje a entendemos, é, na realidade, praticamente devida ao trabalho extraordinário do italiano Galileu Galilei (1564-1642) e do inglês Isaac Newton (1642-1727), os dois gigantes intelectuais do início da Modernidade. Galileu realizou, entre 1589 e 1591, uma série notável de experimentações, através das quais estabeleceu firmemente as bases da Mecânica que

conhecemos atualmente. E devemos acrescentar que tais bases diferiam completamente das existentes e aceitas até a sua época, as quais eram devidas, principalmente, a Aristóteles.

O Conceito de Força

Do já exposto acima, ainda mais esquematicamente podemos dizer que a Mecânica é aquele ramo da Física onde são estudadas as relações entre movimentos e forças. Ora, sabemos da Cinemática que é possível conhecer o movimento de uma partícula se conhecermos, para cada instante t, ou a posição, ou a velocidade, ou ainda, a aceleração da partícula considerada. Portanto, o problema de relacionar movimentos e forças ficará completamente resolvido se conseguirmos descobrir quais as relações existentes entre posição e força, ou entre velocidade e força, ou entre aceleração e força, ou então se conseguirmos provar que não existe relação alguma entre movimentos e forças. Não se conseguiu até hoje deduzir quais as relações existentes entre movimentos e forças, nem também provar que tais relações não existem. A solução do problema foi encontrada experimentalmente por Galileu, que descobriu que aceleração é *função* de força, enquanto que nem posição nem velocidade o são. Aliás, foi o próprio Galileu quem criou o conceito de aceleração, sendo definida como mudança no tempo do vetor velocidade. Mais adiante apresentaremos situações muito simples que nos permitirão ver claramente que a velocidade de um corpo num instante qualquer não é função das forças que naquele instante estejam agindo sobre o corpo considerado. Antes, porém, devemos precisar o que se entende por força.

O conceito científico de força foi introduzido nos quadros do pensamento humano por Johann Kepler (1571-1630), o astrônomo alemão que se tornou famoso principalmente por ter descoberto as leis do movimento dos planetas em torno do Sol. O conceito de força, dominante até a época de Kepler, era o dos aristotélicos: força podendo ser apenas um puxão ou um empurrão. O conceito a seguir exposto é o conceito clássico, construído por Galileu e Newton.

Imagine que o piso de certa sala seja plano e horizontal e que sobre ele exista uma camada de areia, de espessura uniforme. Se lançarmos, sobre tal piso, uma bola de aço, imprimindo-lhe uma certa velocidade inicial, observaremos que ela rolará, com movimento retilíneo, percorrendo uma certa distância ao fim da qual parará. Imagine, a seguir, que a areia seja retirada e que lançamos a mesma bola, com a mesma velocidade inicial do caso anterior, observaremos que ela ainda parará, mas que permanecerá mais tempo em movimento, percorrendo uma distância ainda maior. Se polirmos o piso e retirarmos o ar ambiente, e se

jogarmos a mesma esfera, observaremos que ela alcançará distâncias tanto maiores quanto menos áspero estiver o piso e quanto mais perfeito for o vácuo obtido. Admitimos, então, sem dificuldades, que se fosse possível obter um piso plano e horizontal, perfeitamente polido e situado num lugar onde o vácuo fosse perfeito, se lançássemos uma bola sobre ele, ela ficaria indefinidamente se movendo, com movimento retilíneo e uniforme, pois que não existiria "coisa alguma" que pudéssemos responsabilizar por variações na sua velocidade. Essa "alguma coisa" capaz de alterar a velocidade da bola é precisamente o ente ao qual Newton chamou força, e a incapacidade da bola alterar a sua própria velocidade é uma propriedade importante e que é chamada *inércia*[3].

As situações que acabamos de apresentar são, em linhas gerais, as que foram imaginadas por Galileu e sobre as quais Newton se apoiou para definir o ente que chamamos *força*. Elas fundamentam, essencialmente, a nossa crença de que: 1º) se um corpo estiver em repouso, para colocá-lo em movimento é necessário fazer agir *alguma coisa* sobre ele; 2º) se a velocidade de um corpo aumenta, é porque *alguma coisa* age sobre ele; 3º) se a velocidade de um corpo diminui, é porque *alguma coisa* age sobre ele; 4º) se a velocidade de um corpo muda de direção, é porque *alguma coisa* age sobre ele. A essa *alguma coisa* capaz de pôr um corpo que está em repouso em movimento, ou capaz de alterar de alguma forma a sua velocidade (aumentando-a, diminuindo-a, ou alterando a sua direção), é que Newton denominou *força*, sendo a seguinte a definição por ele apresentada:

A definição newtoniana de força. "Chama-se força atuante sobre um corpo a qualquer agente capaz de modificar o seu estado de repouso ou de movimento retilíneo e uniforme".

Analisando esta definição de força observamos, essencialmente, que ela fundamenta a nossa convicção de que: constatado, de alguma forma, que os diversos corpos que integram o nosso Universo não estão sempre em repouso, ou sempre em movimento retilíneo e uniforme (movimento unidimensional), mas sim que as suas velocidades sofrem, ou podem sofrer, alterações, achou-se conveniente pensar que as variações de velocidade de um corpo são consequência da ação de algum ente. Introduziu-se, portanto, no quadro dos elementos por meio dos quais estudamos os fenômenos observáveis no nosso Universo, uma grandeza física considerada responsável por variações de velocidades. Tal grandeza foi denominada força. E

[3] Imagine uma bola de aço rolando sobre um piso, plano e horizontal. Ninguém esperaria que ela pudesse "resolver", num determinado instante, fazer uma curva para a esquerda, ou para a direita, ou aumentar a sua velocidade, ou parar num certo ponto e começar a pular, etc., isto é, acreditamos que a sua velocidade só poderá ser alterada se "alguma coisa" agir sobre ela. Essa importante propriedade é que chamamos *inércia*.

como repouso e movimento são sempre relativos a um determinado referencial, consequentemente isso implica acrescentar que as forças atuantes sobre um corpo dependem estreitamente do referencial que se considere (mais adiante discutiremos o problema fundamental do referencial).

A Síntese Galileu-Newton-Euleriana

A Mecânica com a qual estamos a tratar – a *Mecânica Clássica* – está apoiada sobre quatro *princípios*, isto é, proposições aceitas como verdadeiras, sem demonstração matemática. Os primeiros três desses princípios são atualmente conhecidos como as *leis de Newton-Galileu*, uma vez que foram Newton e Galileu quem as estruturaram da forma coerente e racional tal como as conhecemos atualmente e que constitui uma das mais maravilhosas criações do espírito humano. Newton apresentou essas leis em 1686, em seu célebre *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. Nesse livro – que influenciou decisivamente a cultura ocidental – Newton apresentou uma concepção mecânica do Universo que foi, provavelmente, pela sua simplicidade, a responsável pelo extraordinário sucesso alcançado pela Mecânica Newtoniana. Apoiado numa extraordinária intuição, Newton adquiriu a convicção de que as leis que Galileu havia estabelecido para descrever o comportamento mecânico dos corpos aqui na Terra eram válidas também para os corpos celestes. De acordo com Newton, o Sol e os planetas, com os seus satélites, constituem um gigantesco sistema cujo comportamento satisfaz, com precisão matemática, um conjunto de leis – as leis de Newton – e o que mantém o imenso sistema funcionando com precisão é a força universal de atração gravitacional que se exerce entre os seus diversos elementos. Dentro desse quadro imponente, Newton estruturou uma Mecânica de grande simplicidade e funcionalidade.

O quarto é último axioma sobre o qual a Mecânica Clássica está estruturada, foi enunciado pelo suíço Leonhard Euler (1707-1783), de forma geral, em 1775[4]. É atualmente conhecido como a *2ª lei de Euler*, ou princípio do *momentum angular*.

A Primeira Lei de Newton

O primeiro fato físico que quero, de partida, realçar, é que a velocidade de um corpo, num instante qualquer, não é função (não depende) das forças que no instante considerado

[4] Em 16 de outubro de 1775, Euler apresentou para publicação nos *Novi Comentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae* (Rússia) um trabalho que praticamente estruturou a Mecânica dos Sistemas de mais de uma partícula. Nesse trabalho, cujo título é *Nova methodus motum corporum rigidorum determinandi* e cuja importância para a Mecânica logo se fez sentir, Euler postulou que a derivada temporal do momento angular, e envolvendo apenas forças externas, é válida não apenas para uma partícula, mas para qualquer sistema material.

estejam agindo sobre ele. Este não é um fato trivial. Aliás, o senso comum, havia indicado o contrário a Aristóteles, e toda a cultura ocidental acreditou – por cerca de dois mil anos – que a velocidade de um corpo devia ser função das forças que atuam sobre ele. Foi Galileu quem destruiu esse mito, pois que mostrou, de forma cabal e extremamente simples, que a velocidade de um corpo, num instante qualquer, não depende (não é função) das forças que no instante considerado estejam agindo sobre ele, ou seja, que a velocidade de um corpo não é função das forças que atuam sobre ele. Como este é um fato de importância básica para a Mecânica, julgo interessante relembrar o raciocínio histórico com que Galileu o apresentou ao mundo científico da sua época.

Imaginemos, disse Galileu, que de um ponto A, situado verticalmente acima de um outro ponto, B, se deixe cair uma pedra. Quando ela passar pelo ponto B, a sua velocidade terá um certo valor v e quando ela passar por outro ponto B', situado verticalmente abaixo de B, a sua velocidade terá um valor v' maior do que v (como você já aprendeu no estudo do movimento de queda livre), isto é, diferente de v. Ora, em ambos os pontos a única força atuante sobre a pedra é o seu próprio peso. Então, se velocidade fosse função de força[5], deveríamos ter que a velocidade de queda da pedra deveria ser constante, pois que o seu peso é constante. E como isto não se verifica, isto é, como a mesma força, agindo sobre um mesmo corpo, não corresponde uma mesma velocidade, concluímos, definitivamente, que velocidade não é função de força. Com essa experiência histórica, Galileu mudou o curso do pensamento na cultura ocidental[6].

Galileu observou também – como nós podemos observar – que se uma esfera metálica for lançada sobre uma rampa inclinada, ela descreverá um movimento acelerado quando estiver rolando para baixo, e um movimento retardado ao rolar para cima. A partir dessa observação experimental, Galileu, num rasgo de gênio, raciocinou que se a esfera fosse lançada sobre um plano horizontal (caso limite), a sua velocidade não deveria aumentar – pois que ela não estaria descendo – nem diminuir – pois que ela não estaria subindo.

---

[5] A palavra função é empregada aqui em sua acepção científica, isto é, no sentido de *Dirichlet-Moore*: correspondência unívoca. Resaltamos que Galileu já havia notado em 1622 que era obrigatoriamente matemática a linguagem por meio da qual os fatos físicos deviam ser explanados.

[6] Muitos anos depois, já prisioneiro da Santa Inquisição, e amargurado, Galileu fez a seguinte anotação na margem de uma das páginas do seu próprio exemplar do *Dialogo Sopra i Due Massimi Sistemi Del Mondo*: "Quem duvidará das más consequências que advirão do fato: de inteligências criadas livres por Deus serem obrigadas a se submeterem servilmente a uma vontade externa? de sermos ensinados a renegar nossas intuições e submetê-las ao capricho de outros? de pessoas sem competência serem arvoradas em juízes de competentes e terem autoridade assegurada para tratá-las ao seu arbítrio? Estas, sim, são inovações capazes de arruinar comunidades e subverter o Estado". (In: Rogers, E. M. – Physics for the Inquiring Mind. Princeton, Princeton University, 1960. p. 286).