Stéphane Dumas
Matthieu Fèvre
Roland Gorlier

Questions de maths

PSI
PSI*

- Mémentos de cours
- Questions, exercices
- Solutions détaillées



ellipses

Références sciences

PSI
PSI*

Questions de maths

- Mémentos de cours
- Questions, exercices
- Solutions détaillées

Stéphane Dumas

Matthieu Fèvre

Roland Gorlier

ellipses

Collection Références sciences

dirigée par Paul de Laboulaye
paul.delaboulaye@editions-ellipses.fr

Retrouvez tous les livres de la collection et des extraits sur www.editions-ellipses.fr

ISBN 9782340-106161
Dépôt légal : septembre 2025
©Ellipses Édition Marketing S.A.
8/10 rue la Quintinie 75015 Paris

DANGER LE PHOTOCOPILLAGE TUE LE LIVRE

Le Code de la propriété intellectuelle et artistique n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article L. 122-5, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite » (alinéa 1er de l'article L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

Cet ouvrage est destiné en priorité aux étudiants en classe préparatoire PSI ou PSI*. Divisé en quinze chapitres, il est conçu pour être utilisé par des étudiants de tout niveau. Dans chaque chapitre, on trouvera les éléments suivants.

◇ **Un mémento du cours**
Celui-ci contient un récapitulatif exhaustif des définitions et résultats du cours. Ces éléments sont présentés assortis de perspectives sur leur utilisation. Ces perspectives sont introduites par les symboles ♥ ou ✍.
Le symbole ♥ signale des précisions sur des situations où l'on aimera appliquer le théorème ou la propriété énoncés.
Le symbole ✍ signale une remarque concernant des écueils à éviter ou des points de vigilance.

◇ **Une sélection de questions à résoudre**
Les premières questions portent sur des applications classiques et élémentaires du cours. Les suivantes demandent plus de réflexion et peuvent être plus originales. Tous les énoncés sont courts de façon à ce qu'un étudiant puisse s'y pencher dès qu'il dispose de quelques minutes.

◇ **Des éclairages**
Pour chaque question, sont proposés des liens avec le cours et des tactiques de résolution classiques, des points d'attention à la lumière desquels la résolution des questions sera facilitée.

◇ **Des réponses**
Une réponse détaillée est donnée à chaque question. Le lecteur trouvera au début de chaque réponse des renvois aux principaux résultats de cours qu'il est utile d'avoir en mémoire pour comprendre cette réponse.

L'ouvrage est conçu comme un complément et non un substitut à un cours en classe où seraient présentées les preuves des résultats. Chaque étudiant pourra s'assurer de connaître son cours avant de se lancer dans la résolution des questions.
Pour préserver le plaisir de la recherche et la possibilité de la joie de trouver sa propre solution, il est conseillé de prendre un temps suffisant pour l'étude de chaque question avant de lire les éclairages puis les solutions.

Le livre porte en priorité sur le programme de deuxième année PSI-PSI*. Cependant, les aspects importants ou souvent oubliés du programme de première année sont réactivés ici. Les premiers chapitres sont conçus pour être travaillés dès la fin de la première année, par exemple lors de révisions estivales.

Nous avons pris beaucoup de plaisir à mettre au point cet ouvrage et espérons susciter de l'intérêt dans l'étude des questions proposées. Nous remercions nos élèves pour leurs remarques bienveillantes et leurs relectures appliquées. Nous remercions également nos amis et collègues, en particulier Anne GORLIER et Frédéric MATHÉUS.

Table des matières

I Petits outils **15**
I.1 Cours . . . 15
I.1.1 Généralités . . . 15
I.1.2 Fonctions continues . . . 16
I.1.3 Intégration des fonctions continues . . . 17
I.1.4 Fonctions dérivables . . . 18
I.1.5 Convexité . . . 20
I.1.6 Formule de Stirling . . . 21
I.1.7 Formules de Taylor . . . 22
I.1.8 Décomposition des fractions rationnelles . . . 23
I.2 Questions . . . 24
I.3 Éclairages . . . 26
I.4 Réponses . . . 28
[R I. 1] (Développement) . . . 28
[R I. 2] (Inégalité triangulaire) . . . 28
[R I. 3] (Inégalité triangulaire dans $\mathbb{C}$) . . . 29
[R I. 4] (Calcul d'une somme classique) . . . 29
[R I. 5] (Une fonction constante par endroits) . . . 30
[R I. 6] (Encadrement usuel de sin) . . . 31
[R I. 7] (Fonction définie par une intégrale) . . . 32
[R I. 8] (Fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$) . . . 34
[R I. 9] (Application de la formule de Taylor reste intégral) . . . 35
[R I. 10] (Calcul de limites avec des équivalents) . . . 36
[R I. 11] (Application du théorème de Rolle) . . . 36
[R I. 12] (Un peu de décomposition en éléments simples) . . . 36
[R I. 13] (Application de la formule de Taylor) . . . 38

II Intégration **39**
II.1 Cours . . . 39
II.1.1 Intégrales de fonctions continues par morceaux . . . 39
II.1.2 Intégrales généralisées . . . 41
II.1.3 Propriétés de l'intégrale généralisée . . . 43
II.1.4 Fonctions intégrables . . . 46
II.1.5 Critères de convergence par comparaison . . . 48
II.2 Questions . . . 49
II.3 Éclairages . . . 52
II.4 Réponses . . . 55
[R II. 1] (Fonctions continues par morceaux) . . . 55
[R II. 2] (Décomposition en éléments simples) . . . 56
[R II. 3] (Changement de variables) . . . 58
[R II. 4] (Calcul d'intégrale à l'aide d'une série) . . . 59
[R II. 5] (Convergence d'intégrale et limites) . . . 60
[R II. 6] (Fonction non intégrable sur $\mathbb{R}$) . . . 62
[R II. 7] (Intégrale de Dirichlet généralisée) . . . 63
[R II. 8] (Intégrale semi-convergente) . . . 64
[R II. 9] (Exemples d'études d'intégrabilité) . . . 65
[R II. 10] (Être ou ne pas être... intégrable) . . . 67
[R II. 11] (Calcul d'intégrale par récurrence) . . . 68
[R II. 12] (Calcul d'équivalent) . . . 69
[R II. 13] (Intégration de o) . . . 70
[R II. 14] (Savoir positiver) . . . 71
[R II. 15] (Une fonction décroissante) . . . 71

III Séries numériques **73**
III.1 Cours . . . 73
III.1.1 Généralités . . . 73
III.1.2 Séries de référence . . . 76
III.1.3 Séries à termes positifs . . . 77
III.1.4 Comparaisons séries-intégrales . . . 78
III.1.5 Étude des séries complexes ou de signe quelconque . . . 79
III.1.6 Théorème spécial des séries alternées . . . 80
III.1.7 Produit de Cauchy de deux séries . . . 81
III.2 Questions . . . 82
III.3 Éclairages . . . 84
III.4 Réponses . . . 87
[R III. 1] (Nature de séries) . . . 87
[R III. 2] (Utilisation de la règle de d'Alembert) . . . 89
[R III. 3] (Théorème de Cesàro : généralisation) . . . 90

[R III. 4] (Étude d'une suite récurrente) 92
[R III. 5] (Suite définie de manière implicite) 93
[R III. 6] (Étude d'une suite implicite : le retour) 94
[R III. 7] (Équivalent d'une somme partielle) 95
[R III. 8] (Théorème d'équivalence suite / série) 96
[R III. 9] (Une série de signe non constant) 96
[R III. 10] (Comparaison d'un reste avec une intégrale) 97
[R III. 11] (Transformation d'Abel : application) 98
[R III. 12] (Comparaison série intégrale non monotone) 99
[R III. 13] (Application du résultat précédent) 101
[R III. 14] (Recherche d'un équivalent) 101

IV Compléments d'algèbre linéaire 103
IV.1 Cours 104
IV.1.1 Produits d'espaces vectoriels 104
IV.1.2 Sommes de sous-espaces vectoriels 104
IV.1.3 Sommes directes 105
IV.1.4 En dimension finie 106
IV.1.5 Projecteurs et symétries 108
IV.1.6 Matrices par blocs et sous-espaces stables 110
IV.1.7 Matrices semblables 113
IV.1.8 Formes linéaires et hyperplans 114
IV.1.9 Trace 115
IV.1.10 Polynômes d'endomorphismes et de matrices carrées 115
IV.1.11 Rappel sur les polynômes de Lagrange 118
IV.2 Questions 118
IV.3 Éclairages 121
IV.4 Réponses 123
[R IV. 1] (Étude d'un projecteur) 123
[R IV. 2] (Caractérisation d'un projecteur dans $\mathbb{R}^3$) 124
[R IV. 3] (Interpolation de Lagrange : application) 125
[R IV. 4] (Projecteur $p - q$) 126
[R IV. 5] (La 4ème dimension) 127
[R IV. 6] (Matrice semblable à une matrice nilpotente) 127
[R IV. 7] (Déterminant d'une matrice tridiagonale) 128
[R IV. 8] (Chaîne des noyaux) 129
[R IV. 9] (Inverse et polynôme annulateur) 130
[R IV. 10] (Dimension de $A_n(\mathbb{R})$ et $S_n(\mathbb{R})$) 130
[R IV. 11] (Caractérisation d'un isomorphisme de E^* dans $\mathbb{R}^n$) 131
[R IV. 12] (Matrice de trace nulle) 132
[R IV. 13] (Puissances d'une matrice et polynôme annulateur) . 134

[R IV. 14] (Somme de projecteurs) 135
[R IV. 15] (Dimension paire : propriété du déterminant) 136
[R IV. 16] (Un théorème de factorisation) 137

V Réduction **139**
V.1 Cours 139
V.1.1 Éléments propres d'un endomorphisme 139
V.1.2 Éléments propres d'une matrice carrée 141
V.1.3 Éléments propres des endomorphismes en dimension finie 143
V.1.4 Théorème de Cayley-Hamilton 144
V.1.5 Multiplicité d'une valeur propre 144
V.1.6 Diagonalisation en dimension finie 146
V.1.7 Diagonalisation des matrices carrées 147
V.1.8 Trigonalisation en dimension finie 148
V.2 Questions 149
V.3 Éclairages 153
V.4 Réponses 156
[R V. 1] (Exemples de réductions de matrices) 156
[R V. 2] (Diagonalisation d'une matrice de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$) 158
[R V. 3] (Une matrice circulante de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$) 160
[R V. 4] (Liberté d'une famille de fonctions) 162
[R V. 5] (Utilisation d'un polynôme annulateur) 162
[R V. 6] (Trigonalisation dans $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$) 162
[R V. 7] (L'invasion des 1) 164
[R V. 8] (Diagonalisation d'une matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$) 165
[R V. 9] (Étude d'une suite récurrente linéaire) 165
[R V. 10] (Diagonalisation d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$) . . . 167
[R V. 11] (Résolution d'une équation matricielle) 168
[R V. 12] (Réduction d'une matrice circulante) 170
[R V. 13] (Critère de nilpotence) 172
[R V. 14] (Une matrice antidiagonale par blocs) 172
[R V. 15] (Polynôme caractéristique du produit) 173
[R V. 16] (Suivre une matrice à la trace) 173
[R V. 17] (Réduction d'une matrice triangulaire par blocs) . . . 174
[R V. 18] (Diagonalisabilité d'une matrice définie par blocs) . . 175
[R V. 19] (Codiagonalisation) 177
[R V. 20] (CNS de codiagonalisabilité) 177
[R V. 21] (CNS de diagonalisibilité) 178
[R V. 22] (Localisation des valeurs propres) 179
[R V. 23] (Encore un critère de diagonalisabilité) 179

VI Espaces vectoriels normés **181**
VI.1 Cours . . . 181
VI.1.1 Convexité . . . 181
VI.1.2 Normes et distances . . . 182
VI.1.3 Parties bornées . . . 185
VI.1.4 Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé . . . 185
VI.1.5 Éléments de topologie dans un espace vectoriel normé 187
VI.1.6 Applications entre espaces vectoriels normés . . . 189
VI.1.7 Continuité des applications multilinéaires . . . 196
VI.2 Questions . . . 197
VI.3 Éclairages . . . 200
VI.4 Réponses . . . 202
[R VI. 1] (Norme produit) . . . 202
[R VI. 2] (Une norme sur $\mathcal{L}(E)$) . . . 203
[R VI. 3] (Exemples de normes non équivalentes) . . . 203
[R VI. 4] (Norme subordonnée) . . . 205
[R VI. 5] (Un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ fermé, borné et convexe) . . 206
[R VI. 6] ($S_n(\mathbb{R})$ et $S_n^+(\mathbb{R})$ sont des fermés) . . . 207
[R VI. 7] (Exponentielle de matrice) . . . 207
[R VI. 8] (Propriétés topologiques de $O_n(\mathbb{R})$) . . . 209
[R VI. 9] (Des propriétés topologiques de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$) . . . 209
[R VI. 10] (Densité de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$) . . . 210
[R VI. 11] (Divergence d'une suite de matrices) . . . 210
[R VI. 12] (Continuité de la distance à une partie) . . . 211
[R VI. 13] (Applications linéaires continues : caractérisation) . . 212
[R VI. 14] (Convexe or not convexe, that is the question) . . . 212
[R VI. 15] (Application ouverte) . . . 213
[R VI. 16] (Un fermé comme intersection d'ouverts) . . . 214
[R VI. 17] (Ensemble des familles liées) . . . 215

VII Dérivation **217**
VII.1 Cours . . . 217
VII.1.1 Dérivabilité . . . 217
VII.1.2 Opérations sur les dérivées . . . 219
VII.1.3 Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ . . . 221
VII.2 Questions . . . 224
VII.3 Éclairages . . . 225
VII.4 Réponses . . . 226
[R VII. 1] (Dérivée d'une application) . . . 226
[R VII. 2] (Calcul d'un vecteur tangent) . . . 227
[R VII. 3] (Wronskien) . . . 228

[R VII. 4] (Accélération centrale) 229
[R VII. 5] (Mouvement rectiligne) 229
[R VII. 6] (Une version du lemme de Grönwall) 230
[R VII. 7] (Une utilisation du lemme de Grönwall) 231

VIII Suites et séries de fonctions **233**
VIII.1 Cours 233
VIII.1.1 Modes de convergence d'une suite de fonctions . . . 233
VIII.1.2 Modes de convergence d'une série de fonctions . . . 235
VIII.1.3 Régularité de la limite d'une suite de fonctions . . . 237
VIII.1.4 Régularité de la somme d'une série de fonctions . . 239
VIII.1.5 Dérivation terme à terme d'une série de fonctions . 241
VIII.2 Questions 243
VIII.3 Éclairages 245
VIII.4 Réponses 247
[R VIII. 1] (Convergences de suites de fonctions) 247
[R VIII. 2] (Convergences de séries de fonctions) 248
[R VIII. 3] (Non-permutabilité des symboles lim et $\int$) 250
[R VIII. 4] (μ est de classe $\mathcal{C}^\infty$) 250
[R VIII. 5] (Échange limite - intégrale) 251
[R VIII. 6] (Étude d'une série de fonctions) 253
[R VIII. 7] (Produit infini simple) 254
[R VIII. 8] (Utilisation du théorème de la double limite) 255
[R VIII. 9] (Intégrabilité d'une fonction) 256
[R VIII. 10] (Somme de série de classe $\mathcal{C}^2$) 258
[R VIII. 11] (Continuité et limite d'une série de fonctions) . . . 259
[R VIII. 12] (Suite de fonctions définie par récurrence) 260

IX Endomorphismes des espaces euclidiens **263**
IX.1 Cours 263
IX.1.1 Rappels de première année 263
IX.1.2 Isométries vectorielles 270
IX.1.3 Matrices orthogonales 272
IX.1.4 Espaces euclidiens orientés 273
IX.1.5 Isométries vectorielles en dimension 2 275
IX.1.6 Angles et rotations vectorielles 275
IX.1.7 Réflexions vectorielles du plan 276
IX.1.8 Isométries vectorielles positives en dimension 3 . . . 277
IX.1.9 Endomorphismes autoadjoints, matrices symétriques 278
IX.1.10 Autoadjoints positifs et définis positifs 279
IX.2 Questions 280

IX.3 Éclairages 283
IX.4 Réponses 286
[R IX. 1] (Distances dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{R}_n[X]$) 286
[R IX. 2] (Caractérisation d'une symétrie orthogonale) 288
[R IX. 3] (Produit scalaire et matrice de rotation) 289
[R IX. 4] (Le produit mixte, forme trilinéaire alternée) 291
[R IX. 5] (Produit mixte et produit vectoriel) 292
[R IX. 6] (Matrice de rotation) 293
[R IX. 7] (Spectre d'une matrice de $S_n(\mathbb{R})$) 294
[R IX. 8] (Des noyaux et des pépins !) 294
[R IX. 9] (Convergence et limite d'une suite d'applications) . . 296
[R IX. 10] (« Racine carrée » d'un endomorphisme de $S^+(E)$) . 297
[R IX. 11] (« Racine carrée » d'une matrice de $S_n^{++}(\mathbb{R})$) 299
[R IX. 12] (Co-réduction dans $S_n(\mathbb{R})$ et $S_n^{++}(\mathbb{R})$) 300
[R IX. 13] (Déterminants de matrices de $S_n(\mathbb{R})$ et $S_n^{++}(\mathbb{R})$) . . 300
[R IX. 14] (Un cas particulier de projecteur orthogonal) 301
[R IX. 15] (CNS d'antisymétrie) 301
[R IX. 16] (Caractérisation d'une symétrie orthogonale) 302
[R IX. 17] (Ça va laisser des traces !) 303
[R IX. 18] (Inégalité de Kantorovich) 304
[R IX. 19] (Formes linéaires sur $S_n(\mathbb{R})$) 305

X Séries entières 307
X.1 Cours 307
X.1.1 Définition et rayon de convergence 307
X.1.2 Calcul du rayon de convergence 308
X.1.3 Régularité de la somme d'une série entière 310
X.1.4 Développement en série entière 312
X.1.5 Développements usuels 313
X.1.6 Fonctions exponentielles et fonctions rationnelles d'une variable complexe 315
X.2 Questions 316
X.3 Éclairages 318
X.4 Réponses 320
[R X. 1] (Calculs de rayons de convergence) 320
[R X. 2] (Calculs de sommes) 322
[R X. 3] (Fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$) 324
[R X. 4] (Utilisation de la série de Taylor associée) 324
[R X. 5] (Théorème de convergence radiale d'Abel) 325
[R X. 6] (Encadrement d'un rayon de convergence) 326
[R X. 7] (Somme et rayon de convergence) 327

[R X. 8] (Comparaison au bord du disque de convergence) . . . 329
[R X. 9] (Limite au bord du disque de convergence) 330
[R X. 10] (Limite d'une fonction) 331

XI Intégration avancée **333**
XI.1 Cours 333
XI.2 Questions 339
XI.3 Éclairages 341
XI.4 Réponses 343
[R XI. 1] (Limite d'une intégrale à paramètre) 343
[R XI. 2] (Faire la bonne interversion) 344
[R XI. 3] (Dérivation d'une intégrale à paramètre) 345
[R XI. 4] (Fonction $\mathcal{C}^\infty$ définie par une intégrale) 346
[R XI. 5] (Définition d'Euler de la fonction Γ) 347
[R XI. 6] (Une limite inattendue) 348
[R XI. 7] (Calcul étrange de l'intégrale de Dirichlet) 350
[R XI. 8] (Un équivalent classique) 352
[R XI. 9] (Calcul d'une intégrale) 354
[R XI. 10] (Échange somme intégrale) 355
[R XI. 11] (Série de Taylor divergente) 356
[R XI. 12] (Cas où l'on ne peut pas intégrer terme à terme) . . 357
[R XI. 13] (L'art de la transformation) 358

XII Équations différentielles **361**
XII.1 Cours 361
XII.1.1 Équations différentielles linéaires scalaires du premier ordre 361
XII.1.2 Équations différentielles linéaires scalaires du second ordre 362
XII.2 Questions 363
XII.3 Éclairages 365
XII.4 Réponses 367
[R XII. 1] (Recollement) 367
[R XII. 2] (Résolution par développement en série entière) . . . 369
[R XII. 3] (Système fondamental, version basique) 372
[R XII. 4] (Une équation différentielle bien mignonne) 373
[R XII. 5] (Utilisation du wronskien) 375
[R XII. 6] (Variation des constantes : méthode) 377
[R XII. 7] (Variation des constantes : mise en oeuvre) 378
[R XII. 8] (Abaissement de l'ordre) 380

XIII Calcul différentiel **381**
XIII.1 Cours . . . 381
XIII.1.1 Différentielle des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ . . . 381
XIII.1.2 Différentielle et gradient . . . 383
XIII.1.3 Règle de la chaîne . . . 384
XIII.1.4 Applications géométriques dans le plan . . . 385
XIII.1.5 Applications géométriques dans l'espace . . . 387
XIII.1.6 Dérivées partielles d'ordre 2 . . . 388
XIII.1.7 Recherches d'extrema . . . 389
XIII.2 Questions . . . 392
XIII.3 Éclairages . . . 394
XIII.4 Réponses . . . 395
[R XIII. 1] (Exemple de tangente à une courbe) . . . 395
[R XIII. 2] (Le phare de Citroën 2CV) . . . 396
[R XIII. 3] (Étude des extrema d'une fonction de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}$) . . . 397
[R XIII. 4] (Extrema d'une fonction sur un ouvert) . . . 398
[R XIII. 5] (Extrema d'une fonction sur un fermé borné) . . . 399
[R XIII. 6] (Périmètre maximal) . . . 401
[R XIII. 7] (Minimum et convexité sur $\mathbb{R}^n$) . . . 402
[R XIII. 8] (Convexité et matrice hessienne) . . . 402
[R XIII. 9] (Fonction coercive) . . . 403
[R XIII. 10] (Équation aux dérivées partielles) . . . 404
[R XIII. 11] (Minimum d'une fonction convexe) . . . 406

XIV Familles sommables **409**
XIV.1 Cours . . . 409
XIV.1.1 Dénombrabilité . . . 409
XIV.1.2 Sommes de familles de réels positifs . . . 410
XIV.1.3 Familles sommables de nombres complexes . . . 412
XIV.2 Questions . . . 415
XIV.3 Éclairages . . . 416
XIV.4 Réponses . . . 417
[R XIV. 1] (Un calcul de somme double de réels positifs) . . . 417
[R XIV. 2] (Interversion en triangle) . . . 418
[R XIV. 3] (Sommes de familles non sommables) . . . 418
[R XIV. 4] (Famille de carré sommable) . . . 420
[R XIV. 5] (Utilisation d'un développement en série entière) . . . 420

XV Variables aléatoires discrètes **423**
XV.1 Cours . . . 423
XV.1.1 Espaces probabilisés . . . 423
XV.1.2 Probabilité . . . 425
XV.1.3 Probabilité sur un ensemble dénombrable ou fini . . . 427
XV.1.4 Probabilités conditionnelles . . . 427
XV.1.5 Indépendance . . . 429
XV.1.6 Variables aléatoires discrètes . . . 430
XV.1.7 Couples de variables aléatoires . . . 432
XV.1.8 Espérance d'une variable aléatoire discrète . . . 433
XV.1.9 Variance d'une variable aléatoire réelle discrète . . . 436
XV.1.10 Indépendance de variables aléatoires . . . 439
XV.1.11 Séries génératrices d'une variable à valeurs dans $\mathbb{N}$ . . . 441
XV.1.12 Lois usuelles . . . 443
XV.1.13 Inégalités probabilistes . . . 445
XV.2 Questions . . . 446
XV.3 Éclairages . . . 450
XV.4 Réponses . . . 453
[R XV. 1] (Tirages dans une urne) . . . 453
[R XV. 2] (Espérance conditionnelle) . . . 454
[R XV. 3] (Loi binomiale négative) . . . 455
[R XV. 4] (Variables décorrélées mais non indépendantes) . . . 456
[R XV. 5] (Couplage loi de Poisson - loi binomiale) . . . 456
[R XV. 6] (Fonctions génératrices et lois de Poisson) . . . 457
[R XV. 7] (Formule de Wald) . . . 457
[R XV. 8] (Convergence uniforme d'une suite de polynômes) . . . 458
[R XV. 9] (Convergence presque sûre) . . . 461
[R XV. 10] (Le reste et un quotient) . . . 463
[R XV. 11] (Loi d'entropie maximale à espérance fixée) . . . 465
[R XV. 12] (Maximisation d'une variance) . . . 466
[R XV. 13] (Somme de variables indépendantes) . . . 467
[R XV. 14] (Loi forte des grands nombres) . . . 468
[R XV. 15] (Une inégalité probabiliste) . . . 470
[R XV. 16] (Graphes peu denses) . . . 471
[R XV. 17] (Marche aléatoire dans $\mathbb{Z}$) . . . 473
[R XV. 18] (Une chaîne de Markov) . . . 475

Index **477**

Chapitre I
Petits outils

Ce chapitre a pour objectif de réviser quelques notions et techniques usuelles développées pendant l'année de sup. Il ne se veut pas une révision exhaustive du programme de première année mais permet un retour sur des notions essentielles ou parfois vite oubliées. On revient en particulier dans ce chapitre sur un certain nombre de points de calculs et sur des méthodes permettant d'obtenir des majorations ou minorations.
On désigne par la lettre $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$.

I.1 - Cours

I.1.1 - Généralités

[Définition I.1] Segment de $\mathbb{R}$
Si a et b sont deux réels tels que $a \leq b$, on appelle **segment** de $\mathbb{R}$ tout ensemble de la forme $[a,b] = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; a \leq x \leq b \right\}$.

[Définition I.2] Intervalle
Si a et b désignent deux réels tels que $a \leq b$, on appelle **intervalle** de $\mathbb{R}$ un ensemble de l'une des formes suivantes :
$]a,b[= \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; a < x < b \right\}$, $[a,b[= \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; a \leq x < b \right\}$,
$]a,b] = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; a < x \leq b \right\}$, $[a,b] = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; a \leq x \leq b \right\}$,
$]-\infty,b] = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \leq b \right\}$, $]-\infty,b[= \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x < b \right\}$,
$[a,+\infty[= \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; a \leq x \right\}$, $]a,+\infty[= \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; a < x \right\}$,
$]-\infty,+\infty[= \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; -\infty < x < +\infty \right\} = \mathbb{R}$, ou l'ensemble vide $\emptyset$.

[Propriété I.3] Caractérisation des intervalles de $\mathbb{R}$
Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont les convexes de $\mathbb{R}$. Autrement dit, un sous-ensemble K de $\mathbb{R}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ si et seulement si : $\forall (x,y) \in K^2, [x,y] \subset K$.

> ✍ *On veillera à bien distinguer les trois notions : sous-ensemble (ou partie) de $\mathbb{R}$, intervalle de $\mathbb{R}$ et segment de $\mathbb{R}$. On comprendra qu'un intervalle est un type particulier de sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Un segment de $\mathbb{R}$ est un exemple d'intervalle de $\mathbb{R}$: c'est un intervalle fermé et borné.*

[Propriété I.4] Inégalités triangulaires
Si u et v sont deux complexes alors :

$$|u+v| \leq |u| + |v|$$

$$||u| - |v|| \leq |u-v| \leq |u| + |v|\,.$$

On a l'égalité $|u+v| = |u| + |v|$ si et seulement si u et v sont positivement liés, c'est-à-dire s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $u = \lambda v$ ou $v = \lambda u$.
Si $u_1, \ldots, u_n$ sont des complexes, alors : $\left|\sum_{i=1}^{n} u_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |u_i|\,.$

I.1.2 - Fonctions continues

Dans toute la suite, la lettre I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ de longueur non nulle.

[Définition I.5] Continuité sur un intervalle de $\mathbb{R}$
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction de I vers $\mathbb{C}$. On dit que la fonction f est **continue** sur I si et seulement si elle est continue en tout point de I.

> ✍ *On évitera de parler de fonctions continues sur des parties de $\mathbb{R}$ qui ne sont pas des intervalles, on risquerait alors d'être tenté d'utiliser les théorèmes qui suivent dans des cas où ils ne sont pas valables.*

[Propriété I.6] Théorème des valeurs intermédiaires
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction continue de I vers $\mathbb{R}$.
Soit α et β deux éléments de $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Si α et β appartiennent à $f(I)$ ou sont limites de suites d'éléments de $f(I)$ alors tout réel strictement compris entre α et β appartient à $f(I)$.
On retient que l'image d'un intervalle par une fonction réelle continue est un intervalle.

[Propriété I.7] Théorème des bornes atteintes
Toute fonction (réelle ou complexe) continue sur un segment de $\mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes.
L'image d'un segment par une fonction réelle continue est un segment.

♥ *En particulier, si f est une fonction réelle ou complexe de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment K, alors sa dérivée f' est bornée sur K.*

I.1.3 - Intégration des fonctions continues

[Propriété I.8] Théorème fondamental de l'analyse
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction continue de I vers $\mathbb{C}$.
Alors f admet des primitives et l'on peut, pour tout réel a de I, définir la fonction de I vers $\mathbb{C}$: $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ qui est l'une des primitives de f.
C'est la seule primitive de la fonction f qui s'annule en a.

♥ *Voir l'exercice :* [Q I.7 p. 25]

[Propriété I.9] Intégrale de fonctions positives
Soit a et b deux réels avec $a \leq b$.
Soit f une fonction continue du segment $[a, b]$ vers $\mathbb{R}$.
(−) Si la fonction f est positive sur $[a, b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$.
(−) Si la fonction f est positive sur $[a, b]$ et si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$,
alors : $\forall t \in [a, b]\,, f(t) = 0$.

✍ *On déduit du premier item que si f et g sont continues sur le segment $[a, b]$ et $a \leq b$, alors : $f \leq g \implies \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.*
Il faudra cependant veiller à ce que les bornes a et b soient dans l'ordre croissant. [Q I.7 p. 25]

[Propriété I.10] Sommes de Riemann à pas constant
Soit a et b deux réels avec $a \leq b$.
Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ à valeurs complexes. On a :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{(b-a)}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{(b-a)}{n}\right) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

♥ *On doit penser à cette formule lorsque l'on s'intéresse aux calculs de limites d'expressions de la forme* $\sum_{k=0}^{n} u_{n,k}$. [Q I.12 p. 25]

♥ *On peut se ramener à* $a = 0$ *et* $b = 1$ *avec une fonction* f *ad hoc.*

I.1.4 - Fonctions dérivables

[Propriété I.11] Dérivabilité d'une fonction
Soit f une fonction à valeurs complexes définie sur un intervalle ouvert contenant le réel a. Les propositions suivantes sont équivalentes.

i) La fonction f est dérivable en a.

ii) Il existe $d \in \mathbb{C}$ tel que $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = d$.

iii) La fonction f admet un développement limité à l'ordre 1 en a, c'est-à-dire qu'il existe un complexe d tel qu'au voisinage de a on ait :

$$f(x) = f(a) + d(x - a) + \underset{a}{o}(x - a).$$

Dans ce cas, $f'(a) = d$.

Une fonction est dérivable sur un intervalle si et seulement si elle est dérivable en tout point de cet intervalle.

[Propriété I.12] Caractérisation des fonctions constantes, monotones
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction réelle dérivable sur I.
$(-)$ La fonction f est constante sur l'intervalle I si et seulement si sa dérivée f' est nulle sur l'intervalle I.
$(-)$ La fonction f est croissante sur l'intervalle I si et seulement si sa fonction dérivée f' est positive sur l'intervalle I.
$(-)$ La fonction f est décroissante sur l'intervalle I si et seulement si sa fonction dérivée f' est négative sur l'intervalle I.
$(-)$ Si la fonction f' est strictement positive (respectivement strictement négative), sauf éventuellement en un nombre fini de points de I, alors la fonction f est strictement croissante (respectivement strictement décroissante) sur I.

✍ *Attention, ce théorème ne s'applique pas lorsque l'on remplace l'intervalle* I *par une réunion d'intervalles.* [Q I.5 p. 25]

✍ *Le dernier point permet d'affirmer qu'une fonction est strictement monotone même si sa dérivée s'annule en un nombre fini de points. Par exemple :* $x \mapsto x^3$ *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$.

[Propriété I.13] Théorème de la bijection
Si f est une fonction réelle strictement monotone définie et continue sur un intervalle de $\mathbb{R}$ de bornes a et b, alors f est bijective.
Les bornes de l'intervalle image sont les limites de f en a et b.
La bijection réciproque est de même monotonie que f, définie et continue sur l'intervalle image.

[Propriété I.14] Théorème de Rolle
Soit a et b deux réels tels que $a < b$. Soit f une fonction du segment $[a, b]$ vers $\mathbb{R}$. Si
$(-)$ la fonction f est continue sur le segment $[a, b]$,
$(-)$ dérivable (au moins) sur l'ouvert $]a, b[$,
$(-)$ et vérifie $f(a) = f(b)$,
alors il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

✍ *Le résultat n'est pas valable pour une application à valeurs complexes.*
♥ *Ce théorème permet de prouver l'existence de zéros des dérivées successives d'une fonction réelle qui s'annule plusieurs fois.* [Q I.11 p. 25]

[Propriété I.15] Inégalité des accroissements finis
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit f une application de I vers $\mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Supposons que le réel K soit un majorant de $|f'|$ sur l'intervalle I. Alors, la fonction f est K-**lipschitzienne** sur I, autrement dit :

$$\forall (a, b) \in I^2, |f(a) - f(b)| \leq K |b - a| .$$

♥ *S'il existe $k \in [0, 1[$ tel que $|f'| \leq k$, on dit que f est* ***contractante****, et l'on peut utiliser ce théorème pour prouver que des suites récurrentes vérifiant une relation de type $u_{n+1} = f(u_n)$ convergent.*
On peut aussi en déduire une estimation de l'écart entre u_n et sa limite pour une valeur de n donnée.

[Propriété I.16] Théorème limite de la dérivée
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in I$. Soit f une fonction de I vers $\mathbb{C}$. Si
$(-)$ la fonction f est continue sur I,
$(-)$ la fonction f est dérivable sur $I \setminus \{a\}$,
$(-)$ il existe un complexe ℓ tel que $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f'(x) = \ell$,

alors la fonction f est dérivable en a et $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$.
La fonction f' est donc continue en a.

♥ *Si f est une fonction à valeurs réelles continue sur I, dérivable sur $I \setminus \{a\}$ avec $\lim\limits_{x\to a} f'(x) = \pm\infty$, alors $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \pm\infty$.*

[Propriété I.17] Théorème de prolongement de classe $\mathcal{C}^k$
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in I$. Soit f une fonction de I vers $\mathbb{C}$ et $k \in \mathbb{N}^*$.
Si
$(-)$ la fonction f est continue sur I,
$(-)$ la fonction f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $I \setminus \{a\}$,
$(-)$ pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, il existe un complexe ℓ_i tel que $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x\neq a}} f^{(i)}(x) = \ell_i$,
alors
la fonction f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, $f^{(i)}(a) = \ell_i$.

♥ *Soit f une fonction définie par une expression de type :*
$$f : x \mapsto \begin{cases} \varphi(x) \text{ si } x \in I \setminus \{a\} \\ \ell \text{ si } x = a \end{cases}.$$
Si φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, a[\cap I$ et $]a, +\infty[\cap I$, ce théorème permet, s'il s'applique, de prouver rapidement que la fonction f est dérivable sur l'intervalle I (et même de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle I). [Q I.8 p. 25]

I.1.5 - Convexité

[Définition I.18] Fonction convexe, concave
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction de I vers $\mathbb{R}$.
On dit que la fonction f est **convexe** sur I si l'on a :
$$\forall (x, y) \in I^2, \forall \lambda \in [0, 1],\ f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$
La fonction f est **concave** si et seulement si $-f$ est convexe et l'on a :
$$\forall (x, y) \in I^2, \forall \lambda \in [0, 1],\ f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

[Propriété I.19] Interprétation graphique
La fonction f est convexe sur l'intervalle I si et seulement si quels que soient les réels x et y de I, pour les abscisses comprises entre x et y, la courbe représentative de f est au-dessous de la corde reliant les points de coordonnées $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$.
La fonction f est concave si et seulement si sa courbe représentative est au-dessus de la corde reliant les points de coordonnées $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$.

♥ *Cette propriété est rarement utilisée pour prouver qu'une fonction réelle est convexe. On utilise plutôt la propriété [P I.21] si la régularité de la fonction le permet.* [Q I.6 p. 25]

[Propriété I.20] Convexité des fonctions dérivables
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction de I vers $\mathbb{R}$, dérivable sur I. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

i) La fonction f est convexe sur I.
ii) La fonction f' est croissante sur I.
iii) La courbe représentative de la fonction f est au-dessus de ses tangentes, c'est-à-dire :

$$\forall x_0 \in I,\, \forall x \in I,\, f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Les propriétés suivantes sont équivalentes.

i) La fonction f est concave sur I.
ii) La fonction f' est décroissante sur I.
iii) La courbe représentative de la fonction f est en-dessous de ses tangentes, c'est-à-dire :

$$\forall x_0 \in I,\, \forall x \in I,\, f(x) \leq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

♥ *Voir l'exercice :* [Q I.6 p. 25]

[Propriété I.21] Convexité des fonctions deux fois dérivables
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction de I vers $\mathbb{R}$, deux fois dérivable sur l'intervalle I. On note f'' sa dérivée seconde.
$(-)$ La fonction f est convexe si et seulement si f'' est positive sur I.
$(-)$ La fonction f est concave si et seulement si f'' est négative sur I.

♥ *Ces propriétés permettent d'établir des inégalités assez fines. On montre qu'une fonction f donnée est convexe à l'aide du signe de f'', on établit ensuite un encadrement de f à l'aide des propriétés [P I.19] et [P I.20].* [Q I.6 p. 25]

I.1.6 - Formule de Stirling

[Propriété I.22] Équivalent de la factorielle

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-n} n^n \sqrt{2\pi n}.$$

♥ *Voir l'exercice :* [Q I.10 p. 25]

I.1.7 - Formules de Taylor

[Propriété I.23] Formule de Taylor-Young
Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit f une fonction réelle ou complexe de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ contenant a. On a le développement limité suivant :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!} + \underset{a}{o}\left((x-a)^n\right).$$

✍ *Cette formule, comme le sparadrap, est à usage local. Elle ne permet pas, par exemple, d'établir une égalité sur tout un intervalle.*

[Propriété I.24] Formule de Taylor avec reste intégral
Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit f une fonction réelle ou complexe de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit a et b deux réels de I. On a l'égalité suivante :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(b-a)^k}{k!} + \int_a^b f^{(n+1)}(t)\frac{(b-t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t.$$

♥ *Voir l'exercice :* [Q I.9 p. 25]
♥ *Il est souvent plus facile d'appliquer la formule sous la forme*

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(b-a)^k}{k!} + \frac{(b-a)^{n+1}}{n!}\int_0^1 f^{(n+1)}(ua+(1-u)b)u^n\,\mathrm{d}u.$$

Cela permet notamment d'éviter d'avoir à se préoccuper de l'ordre de a et b.

[Propriété I.25] Inégalité de Taylor-Lagrange
Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit f une fonction réelle ou complexe de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit a et b deux réels de I. Soit M un majorant de $\left|f^{(n+1)}\right|$ sur le segment de bornes a et b. Alors :

$$\left|f(b) - \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(b-a)^k}{k!}\right| \leq M\frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

✍ *Pour obtenir ces deux dernières formules à l'ordre n, on remarque qu'on utilise une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.*
✍ *On remarque également que l'on peut avoir $a \leq b$ ou $b \leq a$.*
✍ *La fonction f étant de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, $f^{(n+1)}$ est continue sur le segment de bornes a et b donc le théorème des bornes atteintes [P I.7] garantit l'existence d'un majorant M.*

[Propriété I.26] Formule de Taylor polynomiale
On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$.

$$\forall P \in \mathbb{K}[X], \forall a \in \mathbb{K},\ P = \sum_{k=0}^{+\infty} P^{(k)}(a)\frac{(X-a)^k}{k!}.$$

♥ *Voir l'exercice :* [Q I.13 p. 26]

I.1.8 - Décomposition des fractions rationnelles

[Propriété I.27] Décomposition en éléments simples des fractions rationnelles
On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$.
Soit P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ premiers entre eux.
$(-)$ S'il existe des scalaires λ_1, ..., λ_n deux à deux distincts tels que Q s'écrive $\prod_{i=1}^{n}(X-\lambda_i)$ alors la fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$ admet une **décomposition en éléments simples** de la forme : $\frac{P}{Q} = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{X-\lambda_i}$

où pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $a_i = \frac{P(\lambda_i)}{\prod_{j\in[\![1,n]\!]\setminus\{i\}}(\lambda_i-\lambda_j)} = \frac{P(\lambda_i)}{Q'(\lambda_i)}$.

$(-)$ Si P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$ et Q s'écrit $\prod_{i=1}^{n} Q_i$ où les Q_i sont des polynômes irréductibles deux à deux premiers entre eux, alors la fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$ admet **une décomposition en éléments simples** de la forme : $\frac{P}{Q} = \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i}{Q_i}$ où, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, P_i est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1 si Q_i est un trinôme irréductible du second degré et P_i est une constante si Q_i est un polynôme de degré 1. Ainsi $\deg(P_i) < \deg(Q_i)$.

♥ *Dans la situation de la première proposition de cette propriété, il existe une méthode simple pour calculer le scalaire a_i : il suffit de multiplier chaque membre de l'égalité $\frac{P}{Q} = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{X-\lambda_k}$ par $(X-\lambda_i)$. Après simplification, on obtient une fraction rationnelle que l'on peut évaluer en λ_i, ce qui donne directement la valeur de a_i.* [Q I.12 p. 25]

✍ *Dans le cas plus général où P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$ et le polynôme Q s'écrit $Q = \prod_{i=1}^{r} Q_i^{k_i}$ où $k_1, \dots, k_r$ sont des entiers strictement positifs et $Q_1, \dots, Q_r$ sont des polynômes irréductibles deux à deux premiers entre eux, l'expression de la décomposition en éléments simples est un peu plus compliquée.*

Elle s'écrit dans ce cas $\dfrac{P}{Q} = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} \left(\sum_{j=1}^{k_i} \frac{U_{i,j}}{Q_i^j} \right)$ *où, pour tout i de $[\![1, r]\!]$ et tout j de $[\![1, k_i]\!]$, $U_{i,j}$ désigne un polynôme de degré strictement inférieur à* $\deg(Q_i)$.

I.2 - Questions

[Question I.1] Soit $a_1, \dots, a_n$ des réels.

Développer la somme $\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i \right)^2$. (*Éclairage page* 26, *Réponse page* 28)

[Question I.2] Soit $a_1, \dots, a_n$ des réels.

Montrer que $\left| \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i \right| = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |a_i|$ si et seulement si les réels de la famille $(a_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ sont tous de même signe. (*Éclairage page* 26, *Réponse page* 28)

[Question I.3] Soit $a_1, \dots, a_n$ des nombres complexes non nuls.

Montrer que $\left| \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i \right| = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |a_i|$ si et seulement si les complexes de la famille $(a_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ sont tous de même argument. (*Éclairage page* 26, *Réponse page* 29)

[Question I.4] Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$. Résoudre l'équation $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(k\theta) = 0$,

d'inconnue $\theta \in \mathbb{R}$. (*Éclairage page* 26, *Réponse page* 29)

[Question I.5] Simplifier au maximum l'expression de la fonction
$$f : t \mapsto \operatorname{Arc\,tan}\left(\tfrac{2t}{1-t^2}\right) + \operatorname{Arc\,sin}\left(\tfrac{2t}{1+t^2}\right)$$
définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. (*Éclairage page* 26, *Réponse page* 30)

[Question I.6] Montrer que, pour tout $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, on a : $\dfrac{2x}{\pi} \leq \sin(x) \leq x$.
(*Éclairage page* 26, *Réponse page* 31)

[Question I.7] Étudier le plus complètement possible la fonction F définie par $F : x \mapsto \displaystyle\int_x^{x^3} \frac{\mathrm{e}^{t^2}}{t}\,\mathrm{d}t$. (*Éclairage page* 26, *Réponse page* 32)

[Question I.8] Montrer que la fonction $g : x \mapsto \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x \in \mathbb{R}_*^+ \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}^- \end{cases}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. (*Éclairage page* 27, *Réponse page* 34)

[Question I.9] Soit $a \in \mathbb{R}_*^+$. Soit f une application de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, a[$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)} \geq 0$. Montrer que la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)x^k}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$ pour tout $x \in [0, a[$. (*Éclairage page* 27, *Réponse page* 35)

[Question I.10] Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!(2n-2)!(3n)!432^n}{(6n)!}$.
(*Éclairage page* 27, *Réponse page* 36)

[Question I.11] Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme scindé, de degré n et à racines simples. Montrer que son polynôme dérivé est encore scindé et à racines simples. (*Éclairage page* 27, *Réponse page* 36)

[Question I.12] On rappelle que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Que vaut $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2(2k+1)}$?
(*Éclairage page* 27, *Réponse page* 36)

[Question I.13] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré n admettant n racines deux à distinctes que l'on note $x_1, \ldots, x_n$.
Montrer que pour tout i fixé dans $[\![1, n]\!]$: $\displaystyle 2 \sum_{j \in [\![1,n]\!] \setminus \{i\}} \frac{1}{x_j - x_i} = \frac{P''(x_i)}{P'(x_i)}$.

(*Éclairage page* 27, *Réponse page* 38)

I.3 - Éclairages

[Éclairage I.1] Remarquons que l'on peut écrire :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right).$$

Il est nécessaire de ne pas mettre le même indice dans deux sommes dont on fait le produit pour bien faire apparaître les doubles produits. (*Réponse page* 28)

[Éclairage I.2] Utilisons le résultat de la question 1 et élevons au carré.
(*Réponse page* 28)

[Éclairage I.3] En multipliant par $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$ où θ est un argument de $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i$, on se ramène à un calcul avec des réels. (*Réponse page* 29)

[Éclairage I.4] Pensons aux sommes de termes consécutifs d'une suite géométrique. (*Réponse page* 29)

[Éclairage I.5] On pourra commencer par dériver la fonction f en faisant attention aux ensembles sur lesquels f est dérivable. (*Réponse page* 30)

[Éclairage I.6] On pense aux inégalités liées à la convexité. [P I.19 p.20] et [P I.20 p.21]. (*Réponse page* 31)

[Éclairage I.7] Il n'est pas possible de calculer cette intégrale par les moyens classiques que sont la primitivation, l'intégration par parties et le changement de variable.

On est donc conduit à utiliser des moyens indirects et à étudier d'abord la définition et la monotonie de F puis les limites à partir d'encadrements de l'intégrande. Pour l'étude du comportement au voisinage de 0, on pourra utiliser l'intégration d'un développement limité et pour celle du comportement au voisinage de $+\infty$, on pourra utiliser une intégration par parties. [P I.9 p.17].

(*Réponse page* 32)

[Éclairage I.8] On peut montrer que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ en exprimant ses dérivées successives comme des produits d'expressions polynomiales en $\dfrac{1}{x}$ par $\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$ puis appliquer le théorème limite de la dérivée [P I.16 p.19] ou le théorème de prolongement de classe $\mathcal{C}^k$ [P I.17 p.20]. (*Réponse page* 34)

[Éclairage I.9] La forme du terme général de la suite nous incite à utiliser une formule de Taylor [P I.23 p.22]. (*Réponse page* 35)

[Éclairage I.10] Il est préférable d'utiliser la propriété des factorielles avant d'utiliser l'équivalent de Stirling.[P I.22 p.21]. (*Réponse page* 36)

[Éclairage I.11] On peut utiliser la fonction polynomiale associée à P et utiliser le théorème de Rolle [P I.14 p.19] pour découvrir entre deux racines consécutives de P une racine de P'. (*Réponse page* 36)

[Éclairage I.12] On peut effectuer une décomposition en éléments simples [P I.27 p.23] de la fraction rationnelle $\dfrac{1}{X^2(2X+1)}$ qui permettra d'exprimer la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2(2k+1)}$ en fonction de sommes de la forme : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
On pourra alors utiliser une somme de Riemann [P I.10 p.17] pour conclure.

(*Réponse page* 36)

[Éclairage I.13] On peut utiliser la formule de Taylor polynomiale [P I.26 p.23] et une décomposition en éléments simples de $\dfrac{P'}{P}$.

(*Réponse page* 38)

I.4 - Réponses

[Réponse I.1] (**Développement**)

(*Relire la question : page* 24)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j$.

Donc $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{1\leq i<j\leq n} a_i a_j + \sum_{1\leq j<i\leq n} a_i a_j$.

D'où :

$$\boxed{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} a_i a_j.}$$

[Réponse I.2] (**Inégalité triangulaire**)

(*Relire la question : page* 24)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$.

Les sommes proposées vérifient : $\left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right| \in \mathbb{R}_+$ et $\sum_{i=1}^{n} |a_i| \in \mathbb{R}_+$. Donc

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |a_i| &\iff \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|\right)^2 \\
&\iff \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} a_i a_j = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} |a_i a_j| \\
&\iff \sum_{1\leq i<j\leq n} (|a_i a_j| - a_i a_j) = 0 \\
&\iff \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, (i \neq j \Longrightarrow |a_i a_j| - a_i a_j = 0)\,.
\end{aligned}$$

En effet, pour tous les indices i et j, par définition de la valeur absolue, les nombres $|a_i a_j| - a_i a_j$ sont positifs.

Conclusion : Il y a égalité dans l'inégalité triangulaire si et seulement si tous les réels de la famille $(a_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ sont de même signe.

[Réponse I.3] (**Inégalité triangulaire dans** $\mathbb{C}$)

(*Relire la question : page* 24)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, \ldots, a_n) \in (\mathbb{C}^*)^n$. Supposons que $\left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |a_i|$ et notons θ un argument de $\sum_{i=1}^{n} a_i$. Alors $\sum_{i=1}^{n} a_i \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} \in \mathbb{R}_+$ et par conséquent :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \mathcal{R}\mathrm{e}\left(a_i \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right) = \mathcal{R}\mathrm{e}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right) &= \left|\sum_{i=1}^{n} a_i \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right| \\ &= \left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |a_i| = \sum_{i=1}^{n} \left|a_i \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right|\end{aligned}$$

Par conséquent, $\sum_{i=1}^{n} \left(\left|a_i \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right| - \mathcal{R}\mathrm{e}\left(a_i \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)\right) = 0$ et c'est une somme de réels positifs puisque pour tout nombre complexe z, $\mathcal{R}\mathrm{e}\,(z) \leq |z|$.
Ainsi, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\left|a_i \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right| = \mathcal{R}\mathrm{e}\left(a_i \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)$ donc chaque $a_i \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$ est un réel positif noté r_i. Autrement dit, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $a_i = r_i \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ et finalement les complexes de la famille $(a_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ sont tous de même argument θ.
Réciproquement, si on suppose que les complexes de la famille $(a_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ sont tous de même argument noté θ, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, il existe un réel positif r_i tel que $a_i = r_i \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. On en déduit directement que :

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} r_i \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} r_i\right| \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} r_i\right| = \sum_{i=1}^{n} r_i = \sum_{i=1}^{n} |a_i|$$

Finalement, pour $(a_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une famille de nombres complexes non nuls, on a l'égalité : $\left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |a_i|$ si et seulement si les complexes de la famille $(a_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ sont tous de même argument.

[Réponse I.4] (**Calcul d'une somme classique**)

(*Relire la question : page* 24)

Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
$(-)$ Si $\theta \equiv 0 \ [2\pi]$, on a : $\sum_{k=1}^{n} \cos(k\theta) = \sum_{k=1}^{n} 1 = n \neq 0$ donc θ n'est pas solution de l'équation $\sum_{k=1}^{n} \cos(k\theta) = 0$.

$(-)$ Si $\theta \not\equiv 0\ [2\pi]$ alors $\exp(\mathrm{i}k\theta) \neq 1$ et en reconnaissant la somme des termes d'une suite géométrique de raison différente de 1, on calcule :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \cos(k\theta) &= \mathcal{R}\mathrm{e}\left(\sum_{k=1}^{n} \exp(\mathrm{i}k\theta)\right)\\ &= \mathcal{R}\mathrm{e}\left(\exp(\mathrm{i}\theta) \times \frac{1-\exp(\mathrm{i}n\theta)}{1-\exp(\mathrm{i}\theta)}\right)\\ &= \mathcal{R}\mathrm{e}\left(\exp(\mathrm{i}\theta)\, \frac{\exp\left(\mathrm{i}\frac{n\theta}{2}\right)\left(\exp\left(-\mathrm{i}\frac{n\theta}{2}\right) - \exp\left(\mathrm{i}\frac{n\theta}{2}\right)\right)}{\exp\left(\mathrm{i}\frac{\theta}{2}\right)\left(\exp\left(-\mathrm{i}\frac{\theta}{2}\right) - \exp\left(\mathrm{i}\frac{\theta}{2}\right)\right)}\right)\\ &= \mathcal{R}\mathrm{e}\left(\exp\left(\mathrm{i}\frac{(n+1)\theta}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right)\end{aligned}$$

Donc finalement, $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(k\theta) = \cos\left(\tfrac{(n+1)\theta}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}.}$

Dès lors :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \cos(k\theta) = 0 &\iff \sin\left(\frac{n\theta}{2}\right) = 0 \quad \text{ou} \quad \cos\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right) = 0\\ &\iff \frac{n\theta}{2} \equiv 0\ [\pi] \quad \text{ou} \quad \frac{(n+1)\theta}{2} \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]\\ &\iff \theta \equiv 0\ \left[\frac{2\pi}{n}\right] \quad \text{ou} \quad \theta \equiv \frac{\pi}{n+1}\ \left[\frac{2\pi}{n+1}\right]\end{aligned}$$

Dans le deuxième cas, il est impossible que $\theta \equiv 0\ [2\pi]$ donc on peut finalement conclure que dans tous les cas

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \cos(k\theta) = 0 \iff \left(\theta \equiv 0\ \left[\frac{2\pi}{n}\right] \text{ et } \theta \not\equiv 0\ [2\pi]\right) \text{ ou } \theta \equiv \frac{\pi}{n+1}\ \left[\frac{2\pi}{n+1}\right].}$$

[Réponse I.5] (**Une fonction constante par endroits**)

(*Relire la question : page* 25, *le cours :* [P I.12 p.18])
La fonction Arc tan est dérivable partout sur $\mathbb{R}$ tandis que la fonction Arc sin est continue sur $[-1,1]$ et dérivable sur $]-1,1[$.
Or pour $t \in \mathbb{R}$, $\left|\dfrac{2t}{1+t^2}\right| \leq 1$ et $\left|\dfrac{2t}{1+t^2}\right| = 1 \Leftrightarrow t \in \{-1,1\}$ donc par composée, f est dérivable sur chacun des trois intervalles $]-\infty,-1[$, $]-1,1[$ et $]1,+\infty[$.

Pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, on calcule alors :

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{\frac{2(1-t^2)-(2t)\times(-2t)}{(1-t^2)^2}}{1+\left(\frac{2t}{1-t^2}\right)^2} + \frac{\frac{2(1+t^2)-(2t)\times(2t)}{(1+t^2)^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2}} \\ &= \frac{2+2t^2}{(1-t^2)^2+(2t)^2} + \frac{2-2t^2}{(1+t^2)\sqrt{(1+t^2)^2-(2t)^2}} \\ &= \frac{2\left(1+t^2\right)}{\left(1+t^2\right)^2} + \frac{2\left(1-t^2\right)}{\left(1+t^2\right)|1-t^2|} \\ &= \frac{2}{1+t^2}\left(1+\frac{1-t^2}{|1-t^2|}\right) \end{aligned}$$

Par conséquent, si $t \in]-1, 1[$, $f'(t) = \dfrac{4}{1+t^2}$ et sinon $f'(t) = 0$.
Ainsi, la fonction f est constante sur l'intervalle $]-\infty, -1[$ et sa valeur est égale à sa limite en $-\infty$ donc nulle. De même, elle est constante sur l'intervalle $]1, +\infty[$ et sa valeur est égale à sa limite en $+\infty$ donc nulle. Enfin, sur l'intervalle $]-1, 1[$, elle a la même dérivée que $t \mapsto 4\operatorname{Arc}\tan(t)$ et la même valeur en $0 \in]-1, 1[$. Par conséquent,

$$\boxed{\forall t \in]-1, 1[\,,\ f(t) = 4\operatorname{Arc}\tan(t) \text{ et } f(t) = 0 \text{ lorsque } |t| > 1.}$$

[Réponse I.6] (**Encadrement usuel de** sin)

(*Relire la question : page* 25, *le cours :* [P I.19 p.20], [P I.20 p.21] [P I.21 p.21])

La fonction sinus est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle $I = \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et on sait que $\forall x \in I$, $\sin''(x) = -\sin(x) \leq 0$. Donc, d'après la propriété [P I.21], la fonction sinus est concave sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.
Une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0 est $y = x$.
Une équation de la corde passant par les points $(0, 0)$ et $\left(\dfrac{\pi}{2}, 1\right)$ est $y = \dfrac{2}{\pi}x$.
D'après les propriétés [P I.19] et [P I.20], par concavité sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, la courbe de la fonction sinus est en dessous de la tangente et au-dessus de cette corde, ce qui se traduit par :

$$\boxed{\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ \frac{2x}{\pi} \leq \sin(x) \leq x.}$$

[Réponse I.7] (**Fonction définie par une intégrale**)

(*Relire la question : page* 25, *le cours :* [P I.8 p.17], [P I.9 p.17])

> ☞ Il est impossible de calculer cette intégrale, c'est pour cela que l'on emploie les méthodes qui suivent.

Tout d'abord, la fonction $g : t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{t^2}}{t}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_*^-$ et $\mathbb{R}_*^+$ et n'est pas définie en 0.

(−) Étudions la définition de la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_x^{x^3} \frac{\mathrm{e}^{t^2}}{t}\,\mathrm{d}t$.
Si $x > 0$, l'intervalle de bornes x et x^3 est inclus dans $\mathbb{R}_*^+$, donc $F(x)$ est bien définie en tant qu'intégrale de la fonction continue g.
Si $x < 0$, il est inclus dans $\mathbb{R}_*^-$ donc pour la même raison, $F(x)$ est bien définie.
La fonction F n'est pas définie en 0. Ainsi

$$\boxed{F \text{ est définie sur } D_F = \mathbb{R}^*.}$$

(−) Étudions la parité de la fonction F.
$\forall x \in D_F$, $-x \in D_F$. $F(-x) = \displaystyle\int_{-x}^{-x^3} \frac{\mathrm{e}^{t^2}}{t}\,\mathrm{d}t$. En effectuant le changement de variable $u = -t$ on obtient : $F(-x) = \displaystyle\int_x^{x^3} -\frac{\mathrm{e}^{u^2}}{-u}\,\mathrm{d}u = F(x)$.

$$\boxed{F \text{ est paire.}}$$

On limite alors l'étude de F à $\mathbb{R}_*^+$.

(−) Étudions les variations de la fonction F.
La fonction g étant continue sur $\mathbb{R}_*^+$, elle y admet des primitives [P I.8]. Soit G une primitive (nécessairement de classe $\mathcal{C}^1$) de g sur $\mathbb{R}_*^+$.
Alors $\forall x \in \mathbb{R}_*^+$, $F(x) = G(x^3) - G(x)$.
Ainsi, par composition, F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_*^-$ et $\mathbb{R}_*^+$ et l'on a :
$\forall x \in \mathbb{R}_*^+$, $F'(x) = 3x^2G'(x^3) - G'(x) = 3x^2g(x^3) - g(x) = 3x^2\dfrac{\mathrm{e}^{x^6}}{x^3} - \dfrac{\mathrm{e}^{x^2}}{x}$.

Donc $$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_*^+,\ F'(x) = \frac{3\mathrm{e}^{x^6} - \mathrm{e}^{x^2}}{x}.}$$

Or si $x \in]0,1[$, $x^2 \leq \ln(3) < x^6 + \ln(3)$ et si $x \geq 1$, $x^2 \leq x^6 < x^6 + \ln(3)$ donc pour tout $x > 0$, $F'(x) > 0$. Par conséquent, la fonction F est strictement croissante sur $\mathbb{R}_*^+$.
Comme de plus $F(1) = 0$, F est strictement négative sur $]0,1[$ et strictement positive sur $]1,+\infty[$.

Au voisinage de 0, on remarque que $\dfrac{\mathrm{e}^{t^2}}{t} = \dfrac{1}{t} + t + \underset{t\to 0}{o}(t)$. En particulier, si l'on prolonge la fonction $\alpha : t \mapsto g(t) - \frac{1}{t}$ par la valeur 0 en 0, la fonction α ainsi prolongée est continue sur $\mathbb{R}$. Si l'on note A la primitive de α qui s'annule en 0, puisque $\alpha(t) = t + \underset{t\to 0}{o}(t)$, par théorème d'intégration des développements limités, $A(t) = A(0) + \dfrac{t^2}{2} + \underset{t\to 0}{o}(t^2)$. Ainsi, on peut en déduire que pour $x > 0$:

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_x^{x^3} \left(\frac{1}{t} + \alpha(t)\right) \mathrm{d}t \\
&= \int_x^{x^3} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t + A(x^3) - A(x) \\
&= \ln(x^3) - \ln(x) + \left(\frac{x^6}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^6)\right) - \left(\frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right) \\
&= 2\ln(x) - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{En particulier, } F(x) \underset{x\to 0}{\sim} 2\ln(x).}$$

Pour déterminer le comportement de F au voisinage de $+\infty$, on procède par intégration par parties. Pour $x > 0$, on a

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_x^{x^3} \left(2t\mathrm{e}^{t^2} \times \frac{1}{2t^2}\right) \mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{\mathrm{e}^{t^2}}{2t^2}\right]_x^{x^3} - \int_x^{x^3} \mathrm{e}^{t^2} \times \left(\frac{-1}{t^3}\right) \mathrm{d}t \\
&= \frac{\mathrm{e}^{x^6}}{2x^6} - \frac{\mathrm{e}^{x^2}}{2x^2} + \int_x^{x^3} \frac{\mathrm{e}^{t^2}}{t^3}\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

On peut également affirmer que si $x \geq 1$ alors $x^3 \geq x$ donc

$$\left|\int_x^{x^3} \frac{\mathrm{e}^{t^2}}{t^3}\,\mathrm{d}t\right| \leq \frac{1}{x^2}\int_x^{x^3} \frac{\mathrm{e}^{t^2}}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{F(x)}{x^2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

et d'autre part $x^4\mathrm{e}^{x^2-x^6} = \dfrac{x^2}{1-x^4} \times \left(x^2 - x^6\right)\mathrm{e}^{x^2-x^6} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ par croissances comparées.

$$\boxed{\text{finalement } F(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{x^6}}{2x^6}.}$$

[Réponse I.8] (**Fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$**)

(*Relire la question : page* 25, *le cours :* [P I.17 p.20])

Soit g la fonction définie par $g(x) = 0$ si $x \leq 0$ et $g(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$ si $x > 0$.

La fonction g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur les intervalles $\mathbb{R}_*^-$ et $\mathbb{R}_*^+$ et, pour tout $x < 0$ et tout entier n, $g^{(n)}(x) = 0$.
Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, comme $\lim\limits_{x\to 0^-} g^{(n)}(x) = 0$, il suffit de prouver que $g^{(n)}$ admet la même limite nulle à droite de 0 pour appliquer le théorème [P I.17].

$\diamond$ Déterminons, pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, la valeur de $g^{(n)}(x)$.

$$\forall x > 0,\ g'(x) = \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} \text{ et } g''(x) = \left(\frac{1}{x^4} - \frac{2}{x^3}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}.$$

On conjecture que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists P_n \in \mathbb{R}[X]$, $\forall x > 0$, $g^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$.
Montrons alors par récurrence que la propriété H_n : « il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $x > 0$, $g^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$ » est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
H_0 est vérifiée avec $P_0 = 1$ car $\forall x \in \mathbb{R}_*^+, g(x) = P_0\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons H_n vraie.
Il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $x > 0$, $g^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$ donc :

$$\forall x > 0,\ g^{(n+1)}(x) = \left(\frac{1}{x^2}P_n\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2}P_n'\left(\frac{1}{x}\right)\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}.$$

Ainsi, si l'on note $P_{n+1} = X^2P_n - X^2P_n' \in \mathbb{R}[X]$ alors

$$\forall x > 0,\ g^{(n+1)}(x) = P_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}.$$

Donc H_{n+1} est vraie et on conclut par récurrence que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \exists P_n \in \mathbb{R}[X] \text{ tel que : } \forall x > 0,\ g^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}.}$$

$\diamond$ Par croissances comparées, on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{x\to 0^+} g^{(n)}(x) = 0$. Ainsi on a bien :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \lim_{x\to 0^+} g^{(n)}(x) = \lim_{x\to 0^-} g^{(n)}(x) = 0.}$$

D'après le théorème de prolongement de classe $\mathcal{C}^k$ [P I.17], la fonction g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

[Réponse I.9] (**Application de la formule de Taylor reste intégral**)

(*Relire la question : page* 25, *le cours :* [P I.24 p.22])

Soit $a \in \mathbb{R}_*^+$. Soit f une application de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, a[$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)} \geq 0$.

$(-)$ Soit $x \in [0, a[$. Montrons que la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)x^k}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

$\forall k \in \mathbb{N}$, $\frac{f^{(k)}(0)x^k}{k!} \geq 0$ donc la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)x^k}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Notons $R_n(x) = \int_0^x (x-t)^n \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}\,\mathrm{d}t$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La positivité de $f^{(n+1)}$ implique que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_n(x) \geq 0$.

D'après la formule de Taylor reste intégral [P I.24], on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)x^k}{k!} + R_n(x) = f(x),$$

donc la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)x^k}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par $f(x)$. Ainsi le théorème de la limite monotone assure la convergence de cette suite.

Donc la suite $(R_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi convergente.

$(-)$ Soit maintenant $y \in [0, a[$ et $x \in]y, a[$. On a pour tout $t \in]0, y[$, $\frac{y-t}{x-t} < \frac{y}{x}$.

Donc par croissance de l'intégrale, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq R_n(y) \leq \left(\frac{y}{x}\right)^n \int_0^y \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t \leq \left(\frac{y}{x}\right)^n R_n(x).$$

De plus, la suite $(R_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée car convergente et $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{y}{x}\right)^n = 0$ car $\left|\frac{y}{x}\right| < 1$. Donc, par encadrement, $\lim_{n\to+\infty} R_n(y) = 0$. On en déduit, d'après la formule de Taylor, que $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)y^k}{k!} = f(y)$.

Ainsi $\boxed{\forall y \in [0, a[,\ \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)y^k}{k!} = f(y).}$

[Réponse I.10] (**Calcul de limites avec des équivalents**)

(*Relire la question : page* 25, *le cours :* [P I.22 p.21])

Posons $u_n = \dfrac{(n+1)!(2n-2)!(3n)!432^n}{(6n)!}$ pour tout entier n supérieur ou égal à 1. On peut écrire alors $u_n = \frac{(n+1)}{(2n)(2n-1)} \times \frac{n!(2n)!(3n)!}{(6n)!} \times 432^n$.
Avec l'équivalent de Stirling [P I.22], on en déduit que

$$\begin{aligned} u_n &\underset{+\infty}{\sim} \frac{n}{4n^2} \times \frac{\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n}\left(\frac{2n}{\mathrm{e}}\right)^{2n} \sqrt{4\pi n}\left(\frac{3n}{\mathrm{e}}\right)^{3n} \sqrt{6\pi n}}{\left(\frac{6n}{\mathrm{e}}\right)^{6n} \sqrt{12\pi n}} \times 432^n \\ &\underset{+\infty}{\sim} \frac{2^{4n}3^{3n}}{4n} \times \frac{2^{2n}3^{3n}}{6^{6n}} \times \sqrt{\frac{(2\pi n)(4\pi n)(6\pi n)}{12\pi n}} \quad \text{d'où} \\ u_n &\underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement, } \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!(2n-2)!(3n)!432^n}{(6n)!} = \frac{\pi}{2}.}$$

[Réponse I.11] (**Application du théorème de Rolle**)

(*Relire la question : page* 25, *le cours :* [P I.14 p.19])

Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme scindé, de degré n et à racines simples notées $a_1, \ldots, a_n$ avec $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$.
Pour chaque $i \in [\![1, n-1]\!]$, $P(a_i) = P(a_{i+1}) = 0$ et l'application polynomiale associée au polynôme P est dérivable sur $[a_i, a_{i+1}]$ donc, d'après le théorème de Rolle [P I.14], il existe un réel $b_i \in]a_i, a_{i+1}[$ tel que $P'(b_i) = 0$.
On a donc exhibé $n-1$ racines $b_1, \ldots, b_{n-1}$ de P' telles que $b_1 < b_2 < \ldots < b_{n-1}$ et comme P' est de degré $n-1$, P' est encore scindé et à racines simples.

[Réponse I.12] (**Un peu de décomposition en éléments simples**)

(*Relire la question : page* 25, *le cours :* [P I.27 p.23], [P I.10 p.17])

Soit k un entier naturel non nul. D'après la propriété [P I.27], nous savons qu'il existe des réels a, b et c tels que :

$$\frac{1}{X^2(2X+1)} = \frac{aX+b}{X^2} + \frac{c}{2X+1} \quad (E).$$

Multiplions l'égalité (E) par $2X+1$ et évaluons en $\dfrac{-1}{2}$. On obtient $c = 4$.

En soustrayant $\dfrac{4}{2X+1}$ à $\dfrac{1}{X^2(2X+1)}$, on obtient la fin de la décomposition en éléments simples : $\dfrac{1}{X^2(2X+1)} - \dfrac{4}{2X+1} = \dfrac{1-4X^2}{X^2(2X+1)} = \dfrac{1-2X}{X^2}$.
Donc, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k^2(2k+1)} = \dfrac{1}{k^2} - \dfrac{2}{k} + \dfrac{4}{2k+1}$ et en sommant on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2(2k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{4}{2k+1}.}$$

Décomposons la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k}$ en la somme des termes d'indices impairs et la somme des termes d'indices pairs. On obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$\displaystyle\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}$. Donc $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1}\right) + 1 = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

$$\begin{aligned}
\text{Alors :}\quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2(2k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + 4\left(\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 1\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} - 4\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 4 + 4\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} - 4 + 4\sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} - 4 + 4\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} - 4 + \frac{4}{2n+1} + \frac{4}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}
\end{aligned}$$

On reconnaît dans la dernière somme une somme de Riemann [P I.10] de la fonction continue $f : t \mapsto \dfrac{1}{1+t}$ sur l'intervalle $[0,1]$. Par conséquent,
$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \int_0^1 \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = \ln(2)$. Par passage à la limite, on obtient :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2(2k+1)} = \frac{\pi^2}{6} - 4 + 4\ln(2).}$$

[Réponse I.13] (**Application de la formule de Taylor**)

(*Relire la question : page* 26, *le cours :* [P I.26 p.23])

☞ On remarque que $P'(x_i) \neq 0$ car x_i est une racine simple de P.

$(-)$ Montrons tout d'abord que pour tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ qui se factorise en $P = \mu\prod_{i=1}^{n}(X - x_i)$ on a : $\dfrac{P'}{P} = \sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{X - x_i}$.
En utilisant la formule de dérivation d'un produit, une récurrence prouve que si $P_1, \ldots, P_n$ sont des polynômes, alors

$$\left(\prod_{i=1}^{n} P_i\right)' = \sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{i-1} P_j\right) P_i' \left(\prod_{j=i+1}^{n} P_j\right).$$

En appliquant cette formule de dérivation avec $P_i = (X - x_i)$ pour $i \in [\![1, n]\!]$ et en multipliant par μ, on obtient :

$$P' = \mu\sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{i-1}(X - x_j)\right) \times \left(\prod_{j=i+1}^{n}(X - x_j)\right). \quad \boxed{\text{Donc } \frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X - x_i}.}$$

$(-)$ Fixons i dans $[\![1, n]\!]$: $\dfrac{P'}{P} - \dfrac{1}{X - x_i} = \dfrac{(X - x_i)P' - P}{(X - x_i)P} = \sum_{j\in[\![1,n]\!]\setminus\{i\}}\dfrac{1}{X - x_j}$.

D'après la formule de Taylor [P I.26], $P = \sum_{k=0}^{n}\dfrac{P^{(k)}(x_i)}{k!}(X - x_i)^k$.

Or $P(x_i) = 0$ donc $P - (X - x_i)P'(x_i) = (X - x_i)^2\sum_{k=2}^{n}\dfrac{P^{(k)}(x_i)}{k!}(X - x_i)^{k-2}$ et donc

$$\frac{P'}{P} - \frac{1}{X - x_i} = \sum_{j\in[\![1,n]\!]\setminus\{i\}}\frac{1}{X - x_j} = -\frac{\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{P^{(k)}(x_i)}{k!}(X - x_i)^{k-2}}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{P^{(k)}(x_i)}{k!}(X - x_i)^{k-1}}.$$

En évaluant en $X = x_i$, seuls les termes $(X - x_i)$ d'exposant nul subsistent. On obtient donc, après multiplication par -2 :

$$\boxed{2\sum_{j\in[\![1,n]\!]\setminus\{i\}}\frac{1}{x_j - x_i} = \frac{P''(x_i)}{P'(x_i)}.}$$

Chapitre II
Intégration

Pour bien aborder ce chapitre, il est impératif de maîtriser les notions de première année concernant l'intégration des fonctions continues sur un segment, les relations de comparaison et les développements limités.
On désigne par la lettre $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$.

II.1 - Cours

II.1.1 - Intégrales de fonctions continues par morceaux

[Définition II.1] Sur un segment
Soit a et b deux réels. Soit f une fonction définie sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.
On dit que la fonction f **est continue par morceaux sur** $[a,b]$ s'il existe une subdivision $\sigma = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ du segment $[a,b]$ telle que :
$(-)$ pour tout $k \in \{0, ..., n-1\}$, f est continue sur $]a_k, a_{k+1}[$,
$(-)$ pour tout $k \in \{1, ..., n-1\}$, f admet une limite finie à gauche et à droite en a_k, et f admet une limite finie à droite en $a = a_0$ et une limite finie à gauche en $b = a_n$.
On dit alors que σ est une **subdivision du segment** $[a,b]$ **adaptée à** f.

♥ *Voir l'exercice :* [Q II.1 p. 49]

[Propriété II.2] Fonction bornée
Si a et b sont des réels avec $a \leq b$, toute fonction continue par morceaux sur le segment $[a,b]$ est bornée.

♥ *Voir l'exercice :* [Q II.1 p. 49]

[Définition II.3] Sur un intervalle
Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.
On dit que f est **continue par morceaux sur l'intervalle** I, si elle est continue par morceaux sur tout segment $[a,b]$ inclus dans I.

✍ *On constate donc qu'une fonction est continue par morceaux sur un segment si et seulement si on peut subdiviser ce segment en un nombre fini de segments sur l'intérieur desquels la fonction est continue et aux extrémités desquels elle possède des limites finies.*
Pour qu'une fonction soit continue par morceaux sur un intervalle, on peut avoir besoin d'un nombre infini de tels segments. [Q II.1 p. 49]

[Propriété II.4] Espace vectoriel des fonctions continues par morceaux
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. L'ensemble noté $\mathrm{Cpm}\,(I,\mathbb{K})$ des fonctions continues par morceaux sur l'intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel comme sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}\,(I,\mathbb{K})$, espace vectoriel des fonctions de I dans $\mathbb{K}$. Il est stable par le produit de fonctions.

[Propriété II.5] Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment
Soit a et b deux réels tels que $a<b$. Soit $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$. Soit $\sigma=(a_0,\ldots,a_n)$ une subdivision du segment $[a,b]$ adaptée à f. Pour tout $i\in[\![0,n-1]\!]$, on note f_i le prolongement continu sur $[a_i,a_{i+1}]$ de la restriction de f à l'ouvert $]a_i,a_{i+1}[$. On définit alors $\displaystyle\int_{[a,b]}f=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{[a_i,a_{i+1}]}f_i$. Cette quantité ne dépend pas du choix de la subdivision adaptée à f, on l'appelle **intégrale de a à b de f**.

[Propriété II.6] Intégrale de fonctions égales sauf en un nombre fini de points
Soit f et g deux fonctions à valeurs complexes continues par morceaux sur le segment $[a,b]$. Si f et g sont égales excepté en un nombre fini de points alors $\displaystyle\int_{[a,b]}f=\int_{[a,b]}g$.

[Propriété II.7] Fonction d'intégrale nulle
Soit $f\in\mathrm{Cpm}\,([a,b],\mathbb{R})$. Si $f\geq 0$ et $\displaystyle\int_{[a,b]}f=0$ alors f n'est pas nécessairement nulle, mais le nombre de points où elle ne s'annule pas est fini.

II.1.2 - Intégrales généralisées

[Définition II.8] Intégrale généralisée convergente, divergente
$(-)$ Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in]a, +\infty[\cup \{+\infty\}$.
Soit $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux sur $[a, b[$.
On dit que **l'intégrale** $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$**, impropre en** b, est **convergente** si $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie en b^-.
On note alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.
Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ **diverge**.

$(-)$ Soit $a \in \mathbb{R}$ et $c \in \{-\infty\} \cup]-\infty, a[$.
Soit $f :]c, a] \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux sur $]c, a]$.
On dit que **l'intégrale** $\displaystyle\int_c^a f(t)\,\mathrm{d}t$**, impropre en** c, est **convergente** si $x \mapsto \displaystyle\int_x^a f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie en c^+.
On note alors : $\displaystyle\int_c^a f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x \to c^+} \int_x^a f(t)\,\mathrm{d}t$.
Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_c^a f(t)\,\mathrm{d}t$ **diverge**.

♥ *Cette proposition n'est utilisée que lorsque l'on souhaite prouver que l'intégrale converge et en même temps déterminer sa valeur.*
Pour prouver seulement la convergence, on utilisera souvent d'autres méthodes. On préférera notamment comparer l'intégrale à étudier à des intégrales connues. [Q II.2 p. 49], [Q II.4 p. 50], [Q II.5 p. 50]
[Q II.7 p. 50], [Q II.11 p. 51]

♥ *Soit* $a \in \mathbb{R}$ *et* $b \in]a, +\infty[\cup \{+\infty\}$. *Soit* $c \in [a, b[$.
Soit $f \in \mathrm{Cpm}([a, b[, \mathbb{R})$. *Alors l'intégrale* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge si et seulement si l'intégrale* $\displaystyle\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge, et l'on a :*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

La relation de Chasles [P II.15] généralisera cette notion.

✍ *Conformément à la caractérisation séquentielle des limites, la convergence de l'intégrale* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *implique que pour toute suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de limite* b*, la suite* $\left(\displaystyle\int_a^{x_n} f(t)\,\mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$*.*
Cependant, l'existence d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de limite* b *telle que la suite* $\left(\displaystyle\int_a^{x_n} f(t)\,\mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge ne suffit pas à assurer la convergence de l'intégrale* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$*.* [Q II.4 p. 50], [Q II.5 p. 50]

[Propriété II.9] Fonction prolongeable par continuité en $b \in \mathbb{R}$
Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in]a, +\infty[$. Si $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{C}$ est une application continue par morceaux sur $[a, b[$ qui admet une limite finie en b^-, alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

♥ *Voir l'exercice :* [Q II.5 p. 50]

[Propriété II.10] Condition nécessaire mais non suffisante de convergence au voisinage de $+\infty$
Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $f : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{C}$ une application continue par morceaux sur $[a, +\infty[$. Si f admet une limite en $+\infty$ et si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors la limite de f en $+\infty$ est nulle.

✍ *L'implication réciproque est fausse.*
Par exemple, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ *n'est pas convergente bien que* $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} = 0$*.*
Par ailleurs, il existe des fonctions qui n'admettent pas de limite en $+\infty$*, mais dont l'intégrale sur* $[a, +\infty[$ *converge.* [Q II.5 p. 50]
✍ *On retient donc que si le problème d'intégrabilité est en un point fini de* $\mathbb{R}$*, alors l'existence d'une limite finie de* f *au point étudié suffit à assurer la convergence de l'intégrale.*
Si le problème d'intégrabilité est en l'infini, le calcul de la limite de l'intégrande permet dans certains cas de prouver la divergence de l'intégrale, mais il ne permet jamais de prouver sa convergence. [Q II.6 p. 50]

[Propriété II.11] Intégrales sur un intervalle quelconque
Soit a et b deux éléments de $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ tels que $a < b$. Soit f une fonction continue par morceaux sur $]a, b[$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$.

On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge s'il existe $m \in]a,b[$ tel que les intégrales $\int_a^m f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_m^b f(t)\,\mathrm{d}t$ convergent. Dans ce cas, quel que soit le réel m' choisi dans $]a,b[$, les intégrales $\int_a^{m'} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_{m'}^b f(t)\,\mathrm{d}t$ convergent, la valeur de $\int_a^{m'} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{m'}^b f(t)\,\mathrm{d}t$ ne dépend pas du choix du réel m' et l'on note :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^m f(t)\,\mathrm{d}t + \int_m^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

✍ *L'existence de* $\lim_{x\to+\infty} \int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ *ne suffit pas à assurer la convergence de l'intégrale* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$. *En revanche, la convergence de l'intégrale* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ *implique la convergence de* $\int_{-\infty}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t$ *et* $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$, *et implique donc aussi l'existence des limites finies en* $+\infty$ *de* $x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ *et* $x \mapsto \int_{-x}^0 f(t)\,\mathrm{d}t$. *Si l'intégrale* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge, alors* $\lim_{x\to+\infty} \int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ *existe par somme de limites.* [Q II.6 p. 50]

II.1.3 - Propriétés de l'intégrale généralisée

Dans ce paragraphe, a et b sont des éléments de $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ tels que $a < b$.

[Propriété II.12] Linéarité de l'intégrale
Si f et g sont deux fonctions continues par morceaux sur $]a,b[$ telles que les intégrales $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ convergent, si $\lambda \in \mathbb{C}$, alors $\int_a^b (f+\lambda g)(t)\,\mathrm{d}t$ converge et : $\int_a^b (f+\lambda g)(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \lambda \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

♥ *On en déduit les propriétés (un peu abusivement formulées) suivantes :*
(−) *la somme de deux intégrales convergentes est convergente,*
(−) *la somme d'une intégrale convergente et d'une intégrale divergente est divergente.*

✍ *Cependant il faut faire attention dans nos calculs : il se peut que l'on puisse prouver que l'intégrale* $\displaystyle\int_a^b (f+\lambda g)(t)\,\mathrm{d}t$ *converge, mais que l'on ne puisse pas écrire :* $\displaystyle\int_a^b (f+\lambda g)(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \lambda\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ *car les deux intégrales* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *et* $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ *divergent.*

[Propriété II.13] Intégrale d'une fonction à valeurs complexes
Soit f une fonction continue par morceaux sur $]a,b[$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.
(−) Les fonctions $\mathcal{R}\mathrm{e}(f)$ et $\mathcal{I}\mathrm{m}(f)$ sont continues par morceaux sur $]a,b[$.
(−) L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si les intégrales $\displaystyle\int_a^b \mathcal{R}\mathrm{e}(f(t))\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b \mathcal{I}\mathrm{m}(f(t))\,\mathrm{d}t$ convergent. Dans ce cas, on a alors :

$$\mathcal{R}\mathrm{e}\left(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right) = \int_a^b \mathcal{R}\mathrm{e}(f(t))\,\mathrm{d}t,$$
$$\mathcal{I}\mathrm{m}\left(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right) = \int_a^b \mathcal{I}\mathrm{m}(f(t))\,\mathrm{d}t.$$

(−) L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_a^b \overline{f(t)}\,\mathrm{d}t$ converge. En cas de convergence, on a : $\displaystyle\overline{\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t} = \int_a^b \overline{f(t)}\,\mathrm{d}t$.

♥ *Voir les exercices :* [Q II.5 p. 50], [Q II.15 p. 52]

[Propriété II.14] Positivité et croissance de l'intégrale
Soit f et g des fonctions continues par morceaux sur $]a,b[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
(−) Si $f \geq 0$ et si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$.
(−) Si $f \geq g$ et si les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ convergent, alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geq \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

♥ *Voir les exercices :* [Q II.12 p. 51], [Q II.13 p. 51], [Q II.14 p. 52]

[Propriété II.15] Relation de Chasles
Soit $c \in]a,b[$. Soit f une fonction continue par morceaux sur $]a,b[$.
Si les intégrales $\displaystyle\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ convergent, alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

[Propriété II.16] Changement de variables
Soit α et β des éléments de $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Soit φ une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ strictement croissante de $]\alpha,\beta[$ dans $]a,b[$ (respectivement strictement décroissante de $]\beta,\alpha[$ dans $]a,b[$) et $f :]a,b[\longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux sur $]a,b[$.
Alors l'intégrale $\displaystyle\int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)(u)\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ est convergente si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente, et en cas de convergence :

$$\int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)(u)\varphi'(u)\,\mathrm{d}u = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

♥ *Voir les exercices :* [Q II.2 p. 49], [Q II.3 p. 49], [Q II.5 p. 50]

[Propriété II.17] Intégration par parties
Soit f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a,b[$. Si la fonction fg admet une limite finie à droite en a et une limite finie à gauche en b, alors les intégrales $\displaystyle\int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature et si elles convergent, on a :

$$\int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t.$$

♥ *On retient que pour que l'on puisse écrire une intégration par parties, il suffit de prouver l'existence de* 2 *termes sur* 3*, parmi les deux intégrales et le crochet. Leur existence entraîne alors l'existence du troisième.*
En cas de doute, le plus sûr reste de se ramener à des intégrales de fonctions continues par morceaux sur un segment avant de faire tendre les bornes vers les valeurs souhaitées. [Q II.12 p. 51], [Q II.14 p. 52] [Q II.15 p. 52]

♥ *Comme pour les intégrales de fonctions continues, il y a essentiellement trois tactiques pour déterminer la valeur d'une intégrale généralisée.*
(−) *Faire apparaître la dérivée d'une fonction connue.*
(−) *Procéder à une intégration par parties.*
(−) *Effectuer un changement de variable.*
Pour ces trois cas, voir l'exercice [Q II.2 p. 49]

II.1.4 - Fonctions intégrables

[Propriété II.18] Convergence par majoration
Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que $a < b$.
Soit f une fonction continue par morceaux et positive sur $[a, b[$.
L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée.

On peut facilement adapter ce théorème au cas où l'intégrale est impropre en la borne inférieure de l'intervalle d'intégration.

[Propriété II.19] Comparaison entre intégrales de fonctions positives
Soit a et b deux éléments de $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ tels que $a < b$.
Soit f et g des fonctions continues par morceaux sur $]a, b[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que $0 \leq f \leq g$.
Si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, et dans ce cas :

$$0 \leq \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

[Propriété II.20] Convergence absolue
Soit a et b deux éléments de $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ tels que $a < b$.
Soit f une fonction continue par morceaux sur $]a, b[$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.
Si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
On dit alors que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est **absolument convergente**.

$$\text{Dans ce cas,} \quad \left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

[Définition II.21] Fonction intégrable
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction continue par morceaux sur I. On dit que f est **intégrable** sur I si son intégrale sur I est absolument convergente. On note alors $\displaystyle\int_I f$ ou $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ son intégrale sur I.

✍ *Soulignons que l'intégrale sur I de f peut être convergente sans que f ne soit intégrable sur $[a,b]$. L'intégrale est dite alors* ***semi-convergente****. Par exemple, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$, qui converge mais ne converge pas absolument, est semi-convergente.* [Q II.7 p. 50]

[Propriété II.22] Espace des fonctions intégrables
L'ensemble des fonctions intégrables sur l'intervalle I est un espace vectoriel que l'on note $L^1(I,\mathbb{K})$.

[Propriété II.23] Fonctions intégrables de référence
Soit $\alpha\in\mathbb{R}$.
(−) Fonctions exponentielles : la fonction $x\mapsto \mathrm{e}^{-\alpha x}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ si et seulement si $\alpha>0$.
(−) Fonctions de Riemann : la fonction $x\mapsto\dfrac{1}{x^\alpha}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ si et seulement si $\alpha>1$.
(−) Soit a, A et B des réels tels que $A<a<B$. La fonction $x\mapsto\dfrac{1}{|x-a|^\alpha}$ est intégrable sur $]a,B]$ et $[A,a[$ si et seulement si $\alpha<1$.
(−) La fonction $x\mapsto\ln(x)$ est intégrable sur $]0,1]$.

♥ *Voir les exercices :* [Q II.5 p. 50], [Q II.8 p. 50]

[Propriété II.24] Lien avec un problème d'intégrabilité en 0
Soit a et b deux réels tels que $a<b$. Soit f une fonction continue par morceaux sur $]a,b]$. La fonction f est intégrable sur $]a,b]$ si et seulement si la fonction $t\mapsto f(t+a)$ est intégrable sur $]0,b-a]$.

♥ *Pour étudier un problème d'intégrabilité en une borne finie autre que* 0*, on se ramène donc usuellement par changement de variable en un problème en* 0*. C'est plus pratique puisque les formules usuelles de développements limités se font en* 0 *et que les intégrales de référence concernent des problèmes d'intégrabilité en* 0 *(ou en une borne infinie).*