MPSI/MP2I

Colles de mathématiques

Rémi Coutens

NOUVEAUX PROGRAMMES !

380 EXERCICES CORRIGÉS

- Exercices de calcul
- Exercices de raisonnement
- Exercices avec questions ouvertes

ellipses

MPSI/MP2I

NOUVEAUX PROGRAMMES

Colles de **Mathématiques**

Rémi Coutens

Sous la direction de François Pantigny

ellipses

Collection Colles de Prépas
dirigée par François Pantigny

Retrouvez tous les titres de la collection et des extraits sur
www.editions-ellipses.fr

Je remercie M. Pantigny pour ses pertinents conseils, ses compétences en LaTeX et ses magnifiques illustrations. Ce livre doit beaucoup à mon amie Emmanuelle Guillant qui, j'espère, découvre en échange le monde énigmatique des mathématiques.

J'aimerais saluer les professeurs qui m'ont transmis l'amour des mathématiques et de l'enseignement : Mme Marguet et Mme Duru du collège Laurent-Mourguet à Écully, Mme Buchwalter et M. Mosse du lycée Jean-Perrin, Mme Vuchot et M. Belouze du lycée du Parc. J'ai eu beaucoup de satisfactions en enseignant en MPSI au lycée Dessaignes à Blois et au lycée Pothier à Orléans. J'espère que les étudiants gardent également un bon souvenir de leur professeur.

Ce livre est dédié à la promeneuse de l'exercice 25 du chapitre 7 qui m'accompagne, me supporte, me soutient et me motive depuis vingt-cinq ans.

ISBN 9782340-048683
©Ellipses Édition Marketing S.A., 2021
8/10 rue la Quintinie 75015 Paris

DANGER LE PHOTOCOPILLAGE TUE LE LIVRE

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5.2° et 3°a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

Bienvenue en MP2I et en MPSI !
En arrivant en classe préparatoire, les interrogations orales de mathématiques suscitent quelques appréhensions. Elles deviendront rapidement moins impressionnantes et vous comprendrez que cette spécificité du système des « prépas » est extrêmement efficace pour assimiler les notions et progresser.

Néanmoins, le cours étant conséquent, l'étudiant ne se sent pas toujours au point le jour de l'interrogation hebdomadaire. Nous proposons une gamme d'exercices pour permettre de s'entraîner davantage.

Dans l'objectif d'une préparation efficace, les exercices de ce livre sont classés en trois catégories :

- Les « exercices axés sur le calcul ». Souvent application quasiment directe du cours, ils ont pour objectif, via la pratique calculatoire, de vérifier la connaissance et la compréhension des notions du cours.
- Les « exercices axés sur le raisonnement ». Ces exercices demandant plus de recul, leur objectif est de renforcer l'assimilation des concepts.
- Les « exercices avec questions ouvertes ». Ces exercices amènent l'étudiant à avoir sa propre réflexion, à construire sa démonstration ou son contre-exemple selon les cas.

Plutôt que l'originalité ou la difficulté, nous avons privilégié des exercices qui nous ont paru formateurs. Néanmoins, certains exercices, signalés par une ou deux étoiles, sont d'un niveau plus élevé.

Les corrections des exercices figurent après la liste des énoncés. Chaque exercice est entièrement corrigé, parfois de plusieurs manières lorsque cela nous a semblé utile.

En début de chaque chapitre se trouve une figure, réalisée par M. Pantigny, qui illustre soit une notion, soit un exercice. Nous encourageons le lecteur à faire le plus souvent possible ses propres représentations.

Enfin permettons-nous un conseil. Parmi vos camarades de classe, les membres de votre « trinôme » seront ceux que vous côtoierez le plus. N'hésitez pas à en faire de véritables partenaires en partageant les exercices de ce livre. Vous pourrez soit travailler le même exercice et confronter vos solutions, soit travailler chacun un exercice différent, lire le corrigé proposé et exposer oralement une solution à vos camarades.

Nous adressons tous nos vœux de réussite aux lecteurs de ce livre.

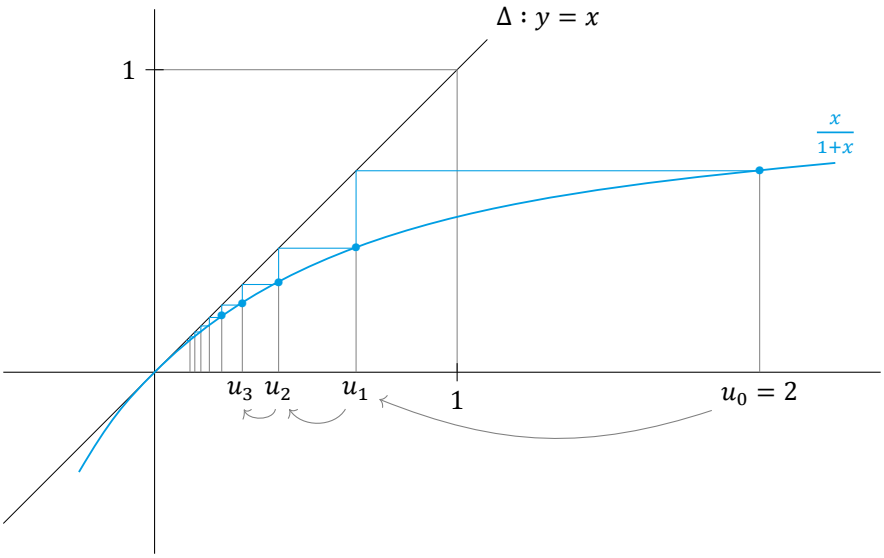
Sommaire

1	Techniques de raisonnements	7
2	Compléments de calcul algébrique	25
3	Minorations, majorations	37
4	Fonctions usuelles	51
5	Fonctions circulaires réciproques	69
6	Suites numériques	79
7	Continuité, dérivabilité	91
8	Fonctions convexes	113
9	Études locales	123
10	Primitives et intégrales	141
11	Équations différentielles linéaires	157
12	Intégration	171
13	Séries numériques	183
14	Injections, surjections	201
15	Trigonométrie, nombres complexes	213
16	Arithmétique	235
17	Groupes, anneaux	251
18	Calcul matriciel	263
19	Polynômes et fractions rationnelles	275
20	Espaces vectoriels	291

21	**Applications linéaires**	**311**
22	**Matrices des applications linéaires**	**325**
23	**Groupe symétrique, déterminants**	**345**
24	**Espaces préhilbertiens**	**359**
25	**Dénombrement, probabilités**	**377**
26	**Variables aléatoires**	**391**

Techniques de raisonnements

1



Dans l'exercice n° 2, on étudie la suite u définie par la donnée de u_0 et par la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}$

Sur la figure ci-dessus, on a représenté graphiquement les premiers termes de cette suite.

Exercices axés sur le calcul

Exercice 1

On considère les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $a_0 = 1$, $b_0 = 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_{n+1} = a_n + 2b_n \\ b_{n+1} = a_n + b_n \end{cases}.$$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left(1+\sqrt{2}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{2}$.
2) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n et b_n sont des entiers naturels.
3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n^2 - 2b_n^2 = (-1)^n$.

Exercice 2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant $u_0 \in]0, +\infty[$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n+1}$.

1) Préciser u_1 et u_2 en fonction de u_0.
2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
3) Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer u_n en fonction de n et u_0.
   Indication : On pourra considérer $1/u_n$.

Exercice 3

Soit $x \in]-1, +\infty[\setminus \{0\}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, on a :

$$(1+x)^n > 1 + nx.$$

Exercice 4 *Classique*

Soit $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $W_0 = \frac{\pi}{2}$, $W_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}W_n$.

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)W_{n+1}W_n = \frac{\pi}{2}$.
2) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $W_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$.
3) Préciser pour $p \in \mathbb{N}$, W_{2p}.

Exercices axés sur le raisonnement

Exercice 5

Montrer, à l'aide d'arguments élémentaires, que pour un entier naturel n :

n est un multiple de 6 $\iff$ n est un multiple de 3 et est pair.

Exercice 6

1) Résoudre l'équation $|x+1| = 2x+1$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
2) Résoudre l'équation $\sqrt{2x^2+1} = x^2$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 7

Les nombres x et y étant réels, résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} (x-1)(y-2)(x+y) &= 0 \\ (x+2)(y+1)(x-y) &= 0 \end{cases}.$$

Exercice 8

Soient les quatre assertions suivantes :

1) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \quad x+y>0$;
2) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, \quad x+y>0$;
3) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \quad x+y>0$;
4) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \quad y^2>x$.

Traduire chacune d'elles par une phrase en français. Préciser si elles sont vraies ou fausses. Lorsqu'elle est fausse, écrire sa négation avec des quantificateurs.

Exercice 9

Soient A, B et C des ensembles.

1) Établir l'équivalence :

$$(A \cup B = B \cap C) \quad \Leftrightarrow \quad (A \subset B \subset C).$$

2) Établir l'implication :

$$B \neq C \quad \Longrightarrow \quad (A \cap B \neq A \cap C \text{ ou } A \cup B \neq A \cup C).$$

Indication : On pourra raisonner par contraposition.

Exercice 10

Démontrer, en le déterminant, qu'il existe un entier n_0 tel que :

$$\forall n \geqslant n_0, \qquad 2^n \geqslant (n+2)^2.$$

Exercice 11 ⋆⋆ *Inégalité arithmético-géométrique*

1) Soit $\mathcal{A}$ une partie de $\mathbb{N}^*$ contenant 1, stable par passage au prédécesseur et par passage au double. On a donc pour tout $n \in A$, les deux implications suivantes :
   - $n \in \mathcal{A} \quad \Longrightarrow \quad 2n \in \mathcal{A}$,
   - $(n+1) \in \mathcal{A} \quad \Longrightarrow \quad n \in \mathcal{A}$.

   Montrer que $\mathcal{A} = \mathbb{N}^*$.
2) Application

   En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tous $a_1, a_2, \ldots, a_n$ réels strictement positifs :

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geqslant (a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n}.$$

Exercice 12 ⋆⋆

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs et croissante.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1, n]\!]$, on pose :

$$p_{n,k} = (u_1 u_2 \cdots u_k)^n \qquad \text{et} \qquad q_{n,k} = (u_1 u_2 \cdots u_k \cdots u_n)^k.$$

1) Préciser les expressions de $p_{2,2}$, $q_{2,2}$, $p_{3,2}$ et de $q_{3,2}$.
2) On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est une longueur exprimée en mètre.
En quelle(s) unité(s) seront exprimés $p_{n,k}$ et $q_{n,k}$ (pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $1 \leqslant k \leqslant n$) ?
3) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$(u_1 u_2 \cdots u_k)^n \leqslant (u_1 u_2 \cdots u_k \cdots u_n)^k.$$

4) Application
Soit $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs tels que :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \qquad M_p \leqslant 2^{1/2} M_{p-1}^{1/2} M_{p+1}^{1/2}.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in [\![0, n]\!]$:

$$M_k \leqslant 2^{k(n-k)/2} M_0^{1-k/n} M_n^{k/n}.$$

Indication : On pourra poser pour $k \in \mathbb{N}^*$, $u_k = 2^{k-1} \dfrac{M_k}{M_{k-1}}$.

D'après Centrale-Supelec 2001 PC 1

Exercice 13

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $a_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{2n} = a_n, \quad a_{2n+1} = 1 - a_n.$$

1) Déterminer a_{224}.
2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note d_n la somme des chiffres de l'écriture binaire de n.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \frac{1-(-1)^{d_n}}{2}$.

Exercice 14 ⋆⋆

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction vérifiant $f(n+1) > f\big(f(n)\big)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1) Montrer que pour tous n et m entiers naturels :

$$f(m) \leqslant n \quad \Longrightarrow \quad m \leqslant n.$$

2) En déduire que $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$.

Exercices avec questions ouvertes

Exercice 15

Soient x et y deux rationnels positifs tels que $\sqrt{x}$ et $\sqrt{y}$ ne soient pas rationnels.
Le nombre $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ peut-il être rationnel ?

Exercice 16

On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties d'un ensemble E.
Soient A et B des parties de E.
Est-il vrai que $\mathcal{P}(A\cap B)=\mathcal{P}(A)\cap\mathcal{P}(B)$? et $\mathcal{P}(A\cup B)=\mathcal{P}(A)\cup\mathcal{P}(B)$?

Exercice 17 ⋆⋆ *Nombres harmoniques*

Pour $n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$, le nombre rationnel $u_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$ peut-il être un entier ?

Corrections

Exercices axés sur le calcul

Exercice 1

1) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$: « $\left(1+\sqrt{2}\right)^n=a_n+b_n\sqrt{2}$ ».
   - Initialisation
     On a $a_0+b_0\sqrt{2}=1+0=0$ et $\left(1+\sqrt{2}\right)^0=1$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   - Hérédité
     Soit $n\in\mathbb{N}$. On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie. On a alors :
     $$\begin{aligned}\left(1+\sqrt{2}\right)^{n+1}&=\left(1+\sqrt{2}\right)^n\left(1+\sqrt{2}\right)\\&=\left(a_n+b_n\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)\quad\text{d'après }\mathcal{P}(n)\\&=a_n+2b_n+(a_n+b_n)\sqrt{2}\\&=a_{n+1}+b_{n+1}\sqrt{2}.\quad a_{n+1}=a_n+2b_n,\ b_{n+1}=a_n+b_n\end{aligned}$$
     Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

   On a montré par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\left(1+\sqrt{2}\right)^n=a_n+b_n\sqrt{2}$.

2) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note $\mathcal{Q}(n)$: « $a_n\in\mathbb{N}$ et $b_n\in\mathbb{N}$ ».
   - Initialisation
     L'assertion $\mathcal{Q}(0)$ est vraie, car $a_0=1$ et $b_0=0$ sont des entiers naturels.
   - Hérédité
     Soit $n\in\mathbb{N}$. On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie.
     On a alors $a_n\in\mathbb{N}$ et $b_n\in\mathbb{N}$, donc $a_{n+1}=a_n+2b_n\in\mathbb{N}$.
     Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On a montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n et b_n sont des entiers naturels.

3) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $x_n = a_n^2 - 2b_n^2$.
On a $x_0 = 1^2 - 0 = 1$. Et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= a_{n+1}^2 - 2b_{n+1}^2 \\ &= (a_n + 2b_n)^2 - 2(a_n + b_n)^2 \\ &= -a_n^2 + 2b_n^2 \\ &= -x_n. \end{aligned}$$

$(a+2b)^2 = a^2 + 4b^2 + 4ab$
$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

On a ainsi une suite géométrique de raison $q = -1$ et de premier terme 1, donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad x_n = a_n^2 - 2b_n^2 = (-1)^n.$$

Remarque
On pouvait aussi remarquer $a_n^2 - 2b_n^2 = \left(a_n + b_n\sqrt{2}\right)\left(a_n - b_n\sqrt{2}\right)$, montrer par récurrence $a_n - b_n\sqrt{2} = \left(1 - \sqrt{2}\right)^n$ et conclure par :

$$a_n^2 - 2b_n^2 = \left(1 + \sqrt{2}\right)^n \left(1 - \sqrt{2}\right)^n = \left(1 - 2\right)^n = (-1)^n.$$

Exercice 2

1) On obtient $u_1 = \frac{u_0}{u_0+1}$ puis $u_1 + 1 = \frac{2u_0+1}{u_0+1}$ d'où $u_2 = \frac{u_1}{u_1+1} = \frac{u_0}{2u_0+1}$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$: « $u_n > 0$ ».

- Initialisation
  On a $u_0 \in]0, +\infty[$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Hérédité
  Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie.
  On a alors $u_n > 0$, donc $u_n + 1 > 0$, puis $u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n+1} > 0$. Donc, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On a montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

Remarque
Cela prouve que tous les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bien définis.

3) Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $v_n = 1/u_n$ (u_n est non nul d'après la question précédente).
Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{u_n+1}{u_n} = 1 + \frac{1}{u_n} = 1 + v_n$.
Donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison 1 : $v_n = v_0 + n$.
On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{v_0+n} = \frac{u_0}{1+nu_0}$.

Remarque
On pouvait conjecturer « $u_n = \frac{u_0}{nu_0+1}$ » dès la question 1) et le prouver par récurrence.

Exercice 3

Soit $x \in]-1, +\infty[\setminus \{0\}$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$: « $(1+x)^n > 1 + nx$ ».

- Initialisation
  On a $(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 > 1 + 2x$, car x étant différent de 0, $x^2 > 0$.
- Hérédité
  Soit $n \geqslant 2$. On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie.
  On a alors :

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)(1+x)^n \\ &> (1+x)(1+nx) \quad \text{d'après } \mathcal{P}(n) \text{ et } 1+x>0 \\ &= 1 + (n+1)x + nx^2 \\ &> 1 + (n+1)x. \quad x^2 > 0\end{aligned}$$

  Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On a montré par récurrence que pour $n \geqslant 2$, $(1+x)^n > 1 + nx$.

Remarque

Pour $x > 0$, on peut prouver le résultat à l'aide de la formule du binôme :

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} x + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

comme $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$ et, x étant positif, $\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^k$ l'est aussi, on en déduit le résultat.

Exercice 4

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$: « $(n+1)W_{n+1}W_n = \frac{\pi}{2}$ ».
   - Initialisation
     On a $W_1 = 1$ et $W_0 = \frac{\pi}{2}$ donc $(0+1)W_1W_0 = \frac{\pi}{2}$.
     Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   - Hérédité
     Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie. On a alors :

$$\begin{aligned}(n+2)W_{n+2}W_{n+1} &= (n+2)\tfrac{n+1}{n+2} W_nW_{n+1} \\ &= (n+1)W_nW_{n+1} \quad \text{d'après } \mathcal{P}(n) \\ &= \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

     Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

   On a montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)W_{n+1}W_n = \frac{\pi}{2}$.

2) Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{Q}(p)$: « $W_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$ ».
   - Initialisation
     On a $0! = 1$, $1! = 1$ et $2^0 = 1$ donc $\frac{2^0(0!)^2}{1!} = 1$ et comme $W_1 = 1$, $\mathcal{Q}(0)$ est vraie.

• Hérédité

Soit $p \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathcal{Q}(p)$ vraie. On a alors :

$$\begin{aligned} W_{2(p+1)+1} &= W_{2p+3} \\ &= \frac{2p+2}{2p+3} W_{2p+1} \\ &= \frac{2p+2}{2p+3} \cdot \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} \qquad \text{d'après } \mathcal{Q}(p) \\ &= (2p+2)^2 \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+3)(2p+2)(2p+1)!} \qquad (2p+3)! = (2p+3)(2p+2)! \\ &= 2^2(p+1)^2 \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+3)!} \qquad = (2p+3)(2p+2)(2p+1)! \\ &= \frac{2^{2p+2}((p+1)!)^2}{(2p+3)!}. \qquad (p+1)! = (p+1)p! \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{Q}(p+1)$ est vraie.

On a montré par récurrence que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $W_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$.

3) En utilisant les deux questions précédentes :

$$W_{2p} = \frac{\pi}{2(2p+1)W_{2p+1}} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Exercices axés sur le raisonnement

Exercice 5

On raisonne par double implication.

($\Rightarrow$) Soit n un multiple de 6. Il existe un entier naturel q tel que $n = 6q$.
Comme $q_2 = 3q \in \mathbb{N}$ et $n = 2q_2$, n est pair.
De même, $n = 3q_3$ avec $q_3 = 2q \in \mathbb{N}$ donc n est un multiple de 3.

($\Leftarrow$) Soit n un multiple de 3 et de 2. Il existe un entier naturel q tel que $n = 3q$.
Comme n est pair, q est pair (si q était impair, $3q$ le serait aussi).
Donc il existe un entier naturel q' tel que $q = 2q'$.
Finalement $n = 3(2q') = 6q'$ et n est un multiple de 6.

Exercice 6

1) L'équation faisant intervenir $|x+1|$, on envisage deux cas selon le signe de $x+1$.

• Premier cas $x \in]-\infty, -1[$

On a alors à résoudre $-(x+1) = 2x+1$ d'inconnue $x < -1$.

$$-x - 1 = 2x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad 3x = -2 \quad \Leftrightarrow \quad x = -2/3.$$

Or $-2/3 \notin]-\infty, -1[$, il n'y a pas de solution $x < -1$.

- Second cas $x \in [-1, -\infty[$
  On a alors à résoudre $x + 1 = 2x + 1$ d'inconnue $x \geqslant -1$.

$$x + 1 = 2x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad 3x = -0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0.$$

  Il y a une seule solution dans $[-1, -\infty[$ qui est $x = 0$.

Finalement, 0 est l'unique solution réelle de l'équation $|x + 1| = 2x + 1$.

2) L'équation faisant intervenir une racine carrée, on commence par une élévation au carré.

- Analyse
  Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $\sqrt{2x^2 + 1} = x^2$. En élevant au carré, on obtient $x^4 - 2x^2 - 1 = 0$. En posant $y = x^2$, on a $y \geqslant 0$ et $y^2 - 2y - 1 = 0$. On en déduit $y = 1 \pm \sqrt{2}$. Comme $1 - \sqrt{2} < 0$, le seul cas possible est $y = 1 + \sqrt{2}$. Donc $x = \pm\sqrt{1 + \sqrt{2}}$.
- Synthèse
  Réciproquement si $x = \pm\sqrt{1 + \sqrt{2}}$, on aura $x^4 = 2x^2 + 1$.
  Comme $x^2 > 0$, $\sqrt{x^4} = x^2$ et finalement $x^2 = \sqrt{2x^2 + 1}$.

L'equation $\sqrt{2x^2 + 1} = x^2$ admet deux solutions réelles $\sqrt{1 + \sqrt{2}}$ et $-\sqrt{1 + \sqrt{2}}$.

Exercice 7

Soient x et y deux réels. On a :

$$(x - 1)(y - 2)(x + y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x = 1 \text{ ou } y = 2 \text{ ou } y = -x).$$

On envisage alors trois cas.

- Premier cas $x = 1$
  La seconde ligne devient $3(y + 1)(1 - y) = 0$ qui a pour solutions $y = 1$ et $y = -1$.
  On obtient deux solutions du système $c_1 = (1, -1)$ et $c_2 = (1, 1)$.
- Deuxième cas $y = 2$
  La seconde ligne devient $3(x + 2)(x - 2) = 0$ qui a pour solutions $x = 2$ et $x = -2$.
  On obtient deux autres solutions du système $c_3 = (-2, 2)$ et $c_4 = (2, 2)$.
- Dernier cas $y = -x$
  La seconde ligne devient $2(x + 2)(-x + 1)x = 0$. On obtient à nouveau $c_3 = (-2, 2)$ et $c_1 = (1, -1)$ et une nouvelle solution $c_0 = (0, 0)$.

Le système a cinq solutions distinctes $(0, 0)$, $(1, -1)$, $(1, 1)$, $(-2, 2)$ et $(2, 2)$.

Exercice 8

1) « Il existe (au moins) un réel x tel que pour tout réel y, $x + y$ est strictement positif ».
Cette assertion est fausse. Sa négation est :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, \quad x + y \leqslant 0.$$

Remarque

Pour montrer que l'assertion est fausse, on peut raisonner par l'absurde :
On suppose qu'il existe un réel x tel que pour tout réel y, $x + y > 0$. En utilisant le réel $y = -x$, on aurait $0 = x + y > 0$ ce qui est faux.

Pour montrer directement que sa négation est juste, on peut rédiger ainsi :
Soit $x \in \mathbb{R}$. Notons y le réel $-|x|$. Comme $x \leqslant |x|$, on a $x + y \leqslant 0$.

2) « Pour tout réel x, il existe un réel y tel que $x + y$ soit strictement positif ». Cette assertion est vraie (pour x donné, le réel $y = 1 - x$ convient).

3) « Pour tous réels x et y, $x + y$ est strictement positif ». Cette assertion est clairement fausse. Sa négation est :
$$\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, \quad x + y \leqslant 0.$$

4) « Il existe (au moins) un réel x tel que pour tout réel y, y^2 est strictement supérieur à x ». Cette assertion est vraie ($x = -1$ convient).

Exercice 9

1) On raisonne par double implication.

⟸ Si $A \subset B$ et $B \subset C$ alors $A \cup B = B$ et $B \cap C = B$. Donc, $A \cup B = B \cap C$.

⟹ Si $A \cup B = B \cap C$. Montrons les inclusions $A \subset B$ et $B \subset C$:
On a $A \subset A \cup B$, donc $A \subset B \cap C$. Or $B \cap C \subset B$, donc $A \subset B$ par transitivité de l'inclusion.
De même $B \subset A \cup B$, donc $B \subset B \cap C$. Or $B \cap C \subset C$, donc $B \subset C$.

2) Nous allons montrer l'implication :
$$(A \cap B = A \cap C \text{ et } A \cup B = A \cup C) \quad \Longrightarrow \quad B = C.$$
On suppose $A \cap B = A \cap C$ et $A \cup B = A \cup C$.
Soit $x \in B$. On raisonne par disjonction de cas.
- Premier cas $x \in A$
  Si $x \in A$ alors $x \in A \cap B$. Donc, $x \in B \cap C$ et en particulier $x \in C$.
- Second cas $x \notin A$
  Si $x \notin A$ alors $x \in A \cup B$. Donc, $x \in A \cup C$ et, comme $x \notin A$, $x \in C$.

Dans tous les cas $x \in C$.
On a montré que $B \subset C$.
Les rôles de B et C étant identiques, on a aussi $C \subset B$.
Par double inclusion $B = C$.
On a montré l'implication voulue et donc par contraposition :
$$B \neq C \quad \Longrightarrow \quad (A \cap B \neq A \cap C \text{ ou } A \cup B \neq A \cup C).$$

À noter : De façon assez générale, il est plus efficace de manipuler des égalités que leurs négations.

Exercice 10

L'étude des petites valeurs de n montre que $2^n < (n+2)^2$ pour $n \in [\![0,5]\!]$. En revanche, pour $n = 6$, on a $2^6 = 64 \geqslant 8^2 = (6+2)^2$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$: « $2^n \geqslant (n+2)^2$ ».

- Initialisation

  On a vu que $\mathcal{P}(6)$ est vraie.
- Hérédité

  Soit $n \geqslant 6$. On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie.
  On a alors $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geqslant 2(n+2)^2$. Et $2(n+2)^2 - (n+3)^2 = n^2 + 2n - 1 \geqslant n - 1 \geqslant 0$ (car $n \geqslant 6$).
  Donc $2^{n+1} \geqslant (n+3)^2$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ vraie.

On a montré par récurrence que pour $n \geqslant 6$, $2^n \geqslant (n+2)^2$.

Remarque

L'implication $\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, mais l'initialisation ne peut pas se faire avant le rang 6.

Exercice 11 *Inégalité arithmético-géométrique*

1) Puisque $\mathcal{A} \subset \mathbb{N}^*$, il suffit de montrer l'inclusion réciproque.

On raisonne par l'absurde.

On suppose que $\mathbb{N}^*$ n'est pas inclus dans $\mathcal{A}$. On pose alors $\mathcal{B} = \mathbb{N}^* \setminus \mathcal{A}$.

Par hypothèses, $\mathcal{B}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}^*$. On note n_0 son plus petit élément. Comme $1 \in \mathcal{A}$ on a $n_0 \geqslant 2$. Donc $n_0 - 1 \in \mathbb{N}^*$ et comme $n_0 - 1 < n_0$, on a $n_0 - 1 \notin \mathcal{B}$ donc $n_0 - 1 \in \mathcal{A}$.

On a alors, par passage au double, $2(n_0 - 1) = 2n_0 - 2 \in \mathcal{A}$. On a $2n_0 - 2 \geqslant n_0$, car $n_0 \geqslant 2$. En passant au prédécesseur $n_0 - 2$ fois, on a $n_0 = 2n_0 - 2 - (n_0 - 2) \in \mathcal{A}$. Cela contredit $n_0 \in \mathcal{B}$.

On a montré par l'absurde $\mathbb{N}^* \subset \mathcal{A}$.

Par double inclusion $\mathcal{A} = \mathbb{N}^*$.

2) On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des $n \in \mathbb{N}^*$ tels que pour tous $a_1, a_2, \dots, a_n$ réels strictement positifs :

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geqslant (a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n} \qquad (\star)$$

On va montrer $\mathcal{A} = \mathbb{N}^*$ à l'aide de la question précédente.

- Initialisation
- $1 \in \mathcal{A}$ puisque pour tout $a_1 > 0$, $a_1^{1/1} = a_1 \leqslant a_1 = \frac{a_1}{1}$.
- Passage au double

  Soit $n \in \mathcal{A}$. Soient $a_1, a_2, \dots, a_{2n}$ des réels strictement positifs. On pose :

$$a'_1 = \frac{a_1 + a_{n+1}}{2}, a'_1 = \frac{a_2 + a_{n+2}}{2}, \dots, a'_n = \frac{a_n + a_{n+n}}{2}.$$

  Les réels $a'_1, a'_2, \dots, a'_n$ sont strictement positifs et on a :

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2n}}{2n} = \frac{a'_1+a'_2+\cdots+a'_n}{n}$$
$$\geqslant (a'_1a'_2\cdots a'_n)^{1/n}. \quad \big\downarrow\ n \in \mathcal{A}$$

Classiquement*, pour x et y positifs $x+y \geqslant 2\sqrt{xy}$, car $x+y-2\sqrt{xy} = \left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2 \geqslant 0$. On en déduit que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $a'_k = \frac{a_k+a_{n+k}}{2} \geqslant (a_ka_{n+k})^{1/2} > 0$. En multipliant ces inégalités entre elles, on obtient :

$$a'_1a'_2\cdots a'_n \geqslant (a_1a_{n+1}\cdots a_ka_{n-k}\cdots a_na_{n+n})^{1/2} = (a_1a_2\cdots a_{2n-1}a_{2n})^{1/2}$$

D'où, par transitivité de la relation d'ordre :

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2n}}{2n} \geqslant \left((a_1a_2\cdots a_{2n-1}a_{2n})^{1/2}\right)^{1/n} = (a_1a_2\cdots a_{2n-1}a_{2n})^{1/(2n)}.$$

On a montré la relation $(\star)$ au rang $2n$, donc $2n \in \mathcal{A}$.

- Passage au prédécesseur

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n+1 \in \mathcal{A}$. Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des réels strictement positifs. On pose :

$$a_{n+1} = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

de sorte à avoir $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n+a_{n+1}}{n+1} = \frac{na_{n+1}+a_{n+1}}{n+1} = a_{n+1}$. Donc :

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = a_{n+1}$$
$$= \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n+a_{n+1}}{n+1}$$
$$\geqslant (a_1a_2\cdots a_na_{n+1})^{1/(n+1)} \quad \big\downarrow\ n+1 \in \mathcal{A}$$
$$\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^{n+1} \geqslant a_1a_2\cdots a_na_{n+1} \quad \big\downarrow\ \text{élévation à la puissance } n+1$$
$$\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^{n} \geqslant a_1a_2\cdots a_n \quad \big\downarrow\ \text{division par } a_{n+1} > 0$$
$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geqslant (a_1a_2\cdots a_n)^{1/n}. \quad \big\downarrow\ \text{élévation à la puissance } 1/n$$

Donc $n \in \mathcal{A}$.

D'après la première question $\mathcal{A} = \mathbb{N}^*$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $(\star)$.

Remarque

L'inégalité $(\star)$ est souvent démontrée avec un argument de convexité.

Exercice 12

1) On a $p_{2,2} = q_{2,2} = (u_1u_2)^2$, $p_{3,2} = p_{n,k} = (u_1u_2)^3$ et $q_{3,2} = (u_1u_2u_3)^2$.

*C'est d'ailleurs l'inégalité $(\star)$ au rang 2.

2) Si les termes de la suite sont des longueurs exprimées en mètres, alors $u_1u_2\cdots u_k$ étant un produit de k facteurs est exprimé en m^k et $p_{n,k}$ est exprimée en m^{kn}. De même, $q_{n,k}$ est exprimée en m^{nk} (élévation à la puissance k d'un produit de n facteurs).

3) La première question encourage à raisonner par récurrence sur n.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{P}(n)$: « $\forall k \in [\![1,n]\!], p_{n,k} \leqslant q_{n,k}$ ».

- Initialisation
  On a $p_{1,1} = u_1 = q_{1,1}$, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie (1 est le seul entier de $\ell\ell bracket 1,1]\!]$).
- Hérédité
  Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie.
  Soit $k \in [\![1,n+1]\!]$.
  • Si $k = n+1$, on a $p_{n+1,n+1} = (u_1u_2\cdots u_{n+1})^{n+1} = q_{n+1,n+1}$.
  • Si $k \in [\![1,n]\!]$, on a :

$$\begin{aligned} p_{n+1,k} &= (u_1u_2\cdots u_k)^{n+1} \\ &= (u_1u_2\cdots u_k)^n(u_1u_2\cdots u_k) \\ &\leqslant (u_1u_2\cdots u_k\cdots u_n)^k(u_1u_2\cdots u_k) \\ &\leqslant (u_1u_2\cdots u_k\cdots u_n)^k u_{n+1}^k \\ &\leqslant (u_1u_2\cdots u_k\cdots u_nu_{n+1})^k. \end{aligned}$$

d'après $\mathcal{P}(n)$
la suite est croissante et $k \leqslant n$
donc $0 \leqslant u_j \leqslant u_{n+1}$ pour $j \in [\![1,k]\!]$

  Donc pour tout $k \in [\![1,n+1]\!]$, $p_{n+1,k} \leqslant q_{n+1,k}$.
  Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On a montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in [\![1,n]\!]$, on a :

$$(u_1u_2\cdots u_k)^n \leqslant (u_1u_2\cdots u_k\cdots u_n)^k.$$

4) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $u_k > 0$ et $\frac{u_{k+1}}{u_k} = 2\frac{M_{k+1}M_{k-1}}{M_k^2} \geqslant 1$. Donc, la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite croissante de réels strictement positifs.
Après simplifications, $u_1u_2\cdots u_n = \frac{M_n}{M_0}2^{0+1+\cdots+(n-1)} = \frac{M_n}{M_0}2^{n(n-1)/2}$, car $\sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}$.
De même, $u_1u_2\cdots u_k = \frac{M_n}{M_0}2^{k(k-1)/2}$.
D'après la question précédente, on a donc $\frac{M_k^n}{M_0^n}2^{nk(k-1)/2} \leqslant \frac{M_n^k}{M_0^k}2^{kn(n-1)/2}$.
D'où $M_k^n \leqslant M_n^k M_0^{n-k}2^{kn(n-1)/2-nk(k-1)/2}$ et finalement :

$$M_k \leqslant M_n^{k/n}M_0^{1-k/n}2^{k(n-k)/2}.$$

Exercice 13

1) À l'aide de divisions successives par 2, on a :

$$a_{224} = a_{112} = a_{56} = a_{28} = a_{14} = a_7 = 1 - a_3 = 1 - (1 - a_1) = a_1 = 1 - a_0 = 1.$$

Remarque

Les mêmes divisions par 2 permettent d'obtenir $224 = \overline{11100000}$ en binaire.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{P}(n)$: « $a_n = \frac{1-(-1)^{d_n}}{2}$ ».

- Initialisation

  On a $a_1 = 1 - a_0 = 1$. D'autre part, $d_1 = 1$ et $\frac{1-(-1)^{d_1}}{2} = \frac{2}{2} = 1$. Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

- Hérédité

  Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathcal{P}(k)$ est vraie.

  On envisage deux cas selon la parité de $n+1$.

  - Si $n+1$ est pair, alors il existe $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $n+1 = 2k$. L'écriture binaire de n s'obtenant en ajoutant un zéro à droite de celle de k, on a $d_{n+1} = d_k$.

    Et $a_{n+1} = a_{2k} = a_k = \frac{1-(-1)^{d_k}}{2}$ d'après $\mathcal{P}(k)$. Donc $a_{n+1} = \frac{1-(-1)^{d_{n+1}}}{2}$.
  - Sinon $n+1$ est impair et supérieur à 2, donc il existe $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $n+1 = 2k+1$. L'écriture binaire de n s'obtenant en ajoutant un 1 à celle de k, on a $d_{n+1} = d_k + 1$.

    Et $a_{n+1} = 1 - a_k = 1 - \frac{1-(-1)^{d_k}}{2}$ d'après $\mathcal{P}(k)$. Donc $a_{n+1} = \frac{1+(-1)^{d_k}}{2} = \frac{1-(-1)^{d_k+1}}{2}$.

  Dans tous les cas, $a_{n+1} = \frac{1-(-1)^{d_{n+1}}}{2}$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On a montré par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \frac{1-(-1)^{d_n}}{2}$.

Remarque

Comme $(-1)^{d_n} = -1$ ou 1 selon la parité de d_n, on a $a_n = 1$ ou 0. Plus précisément, $a_n = 0$ si le nombre de 1 de l'écriture binaire de n est pair, et $a_n = 1$ sinon.

Exercice 14

1) Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$: « $\forall m \in \mathbb{N}, \quad f(m) \leqslant n \implies m \leqslant n$ ».

- Initialisation

  Soit $m \in \mathbb{N}$ tel que $f(m) \leqslant 0$. Comme f est à valeurs dans $\mathbb{N}$, on a $f(m) = 0$.

  On raisonne par l'absurde. On suppose que $m > 0$. On aurait $m - 1 \in \mathbb{N}$ et donc

  $$0 = f(m) > f\big(f(m-1)\big)$$

  ce qui est impossible, car $f\big(f(m-1)\big) \in \mathbb{N}$. Donc $m \leqslant 0$.

  On a ainsi montré que $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

- Hérédité

  Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie. Soit alors $m \in \mathbb{N}$ tel que $f(m) \leqslant n+1$.

  Première méthode (par l'absurde)

  On suppose que $m > n+1$. On aurait $m - 1 \in \mathbb{N}$ et donc

  $$n + 1 = f(m) > f\big(f(m-1)\big)$$

  donc $f\big(f(m-1)\big) \leqslant n$. D'après $\mathcal{P}(n)$, on a $f(m-1) \leqslant n$, puis $m - 1 \leqslant n$. Ce qui contredirait $m > n+1$.

On a donc $m \leqslant n+1$.
On a ainsi montré que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Seconde méthode (par disjonction de cas)

- Si $f(m) \leqslant n$ alors, d'après $\mathcal{P}(n)$, $m \leqslant n$ et en particulier $m \leqslant n+1$.
- Sinon $f(m) = n+1$. Si $m = 0$, on a $m \leqslant n+1$. Si $m > 0$, on a

$$n+1 = f(m) > f\big(f(m-1)\big).$$

Les nombres étant des entiers, on a $f\big(f(m-1)\big) \leqslant n$.
D'après $\mathcal{P}(n)$, on a $f(m-1) \leqslant n$, puis $m-1 \leqslant n$ et donc $m \leqslant n+1$.
Dans tous les cas, $m \leqslant n+1$. On a ainsi montré que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On a ainsi montré par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que pour tous n et m entiers naturels :

$$f(m) \leqslant n \quad \Longrightarrow \quad m \leqslant n.$$

2) On commence par montrer que f est strictement croissante :
Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $f(n+1) > f\big(f(n)\big)$.
Les nombres étant des entiers, on a $f\big(f(n)\big) \leqslant f(n+1) - 1$.
D'après la question précédente (avec $m = f(n)$), on a $f(n) \leqslant f(n+1) - 1 < f(n+1)$.
Cela montre que f est strictement croissante.

Classiquement, on obtient alors (par récurrence) que $f(n) \geqslant n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Or, l'inégalité $f(n+1) > f\big(f(n)\big)$ et la stricte croissance de f entraînent $n+1 > f(n)$ puis $n \geqslant f(n)$.
Par antisymétrie de la relation d'ordre, on a $f(n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On a montré que $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$.

Exercices avec questions ouvertes

Exercice 15

Nous allons démontrer par l'absurde que $\sqrt{x} + \sqrt{y} \notin \mathbb{Q}$.
On suppose $\sqrt{x} + \sqrt{y} \in \mathbb{Q}$.

- Première méthode : élévation au carré
  Le carré d'un rationnel étant rationnel, on a $\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)^2 = x + y + 2\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} \in \mathbb{Q}$.
  On en déduit $\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} \in \mathbb{Q}$.
  Or $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{x}\left(1 + \frac{\sqrt{x}\sqrt{y}}{x}\right)$, donc on obtient $\sqrt{x} = \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{1+\frac{\sqrt{x}\sqrt{y}}{x}} \in \mathbb{Q}$ ce qui contredit $\sqrt{x} \notin \mathbb{Q}$.
- Seconde méthode : utilisation de la quantité conjuguée
  On sait que $\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right) = x - y \in \mathbb{Q}$. Donc $\sqrt{x} - \sqrt{y} = \frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \in \mathbb{Q}$.
  Donc $\sqrt{x} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{x} - \sqrt{y}\right) \in \mathbb{Q}$ ce qui contredit $\sqrt{x} \notin \mathbb{Q}$.

On a donc montré, par l'absurde, que $\sqrt{x} + \sqrt{y} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 16

• $\mathcal{P}(A \cap B)$ et $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$

Pour une partie C de E, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} C \in \mathcal{P}(A \cap B) &\iff C \subset A \cap B \\ &\iff C \subset A \text{ et } C \subset B \\ &\iff C \in \mathcal{P}(A) \text{ et } C \in \mathcal{P}(B) \\ &\iff C \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B). \end{aligned}$$

$A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$

Ceci montre l'égalité $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

• $\mathcal{P}(A \cup B)$ et $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$

On a facilement $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A \cup B)$, car pour $C \in \mathcal{P}(E)$:

$$\begin{aligned} C \in \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) &\iff C \in \mathcal{P}(A) \text{ ou } C \in \mathcal{P}(B) \\ &\iff C \subset A \text{ ou } C \subset B \\ &\implies C \subset A \cup B \\ &\iff C \in \mathcal{P}(A \cup B). \end{aligned}$$

$A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$

En revanche, l'inclusion réciproque n'est pas toujours vraie comme le montre le contre-exemple suivant : Si $A = \mathbb{R}^+$ et $B = \mathbb{R}^-$ alors $\mathbb{R}$ n'est ni une partie de A ni une partie de B mais est une partie de $A \cup B$.

Exercice 17 *Nombres harmoniques*

On va montrer que la réponse est négative.

On observe les premières valeurs : $u_2 = \frac{3}{2}$, $u_3 = \frac{11}{6}$, $u_4 = \frac{25}{12}$...

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$: « il existe un entier naturel impair p_n et un entier naturel q_n tels que $u_n = \frac{p_n}{2q_n}$ ».

• Initialisation

On a $u_2 = \frac{3}{2}$. En utilisant $p_2 = 3$ et $q_2 = 1$, on montre que $\mathcal{P}(2)$ est vraie.

• Hérédité

Soit $n \geqslant 2$. On suppose $\mathcal{P}(m)$ vraie pour tout $m \in [\![2, n]\!]$.

On a alors :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{p_n}{2q_n} + \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{(n+1)p_n + 2q_n}{2(n+1)q_n}. \end{aligned}$$

d'après $\mathcal{P}(n)$

• Si $n+1$ est impair, alors $p_{n+1} = (n+1)p_n + 2q_n$ est impair, $q_{n+1} = (n+1)q_n \in \mathbb{N}^*$ et $u_{n+1} = \frac{p_{n+1}}{2q_{n+1}}$.

• Si $n+1$ est pair.

En séparant les termes d'indices pairs et impairs et en notant $n+1 = 2k$, on a :

$$u_{n+1} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2k}\right) + \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2k-1}\right).$$

On a $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2k}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}\right)=\frac{1}{2}u_k=\frac{1}{2}\cdot\frac{p_k}{2q_k}$ d'après $\mathcal{P}(k)$ (car $k\in[\![2,n]\!]$).

D'autre part, le rationnel $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2k-1}$ s'écrit sous forme irréductible $\frac{a}{b}$ avec b impair, car il divise le produit de nombres impairs $1\cdot 3\cdots(2k-1)$.

Ainsi $u_{n+1}=\frac{p_k}{4q_k}+\frac{a}{b}=\frac{bp_k+4aq_k}{4bq_k}$. On a $q_{n+1}=2bq_k\in\mathbb{N}^*$, $p_{n+1}=bp_k+4aq_k$ est impair (car b et p_k le sont) et $u_{n+1}=\frac{p_{n+1}}{2q_{n+1}}$.

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On a montré que pour tout $n\geqslant 2$, $u_n=\frac{p_n}{2q_n}$ avec p_n impair.

On va montrer par l'absurde que cela entraîne que $u_n\notin\mathbb{N}$.
On suppose $u_n\in\mathbb{N}$. On aurait $p_n=2q_nu_n$ donc p_n serait pair ce qui contredit p_n impair.

On a montré que u_n est un entier uniquement pour $n=1$.

« Un quantificateur s'applique toujours à ce qui est à sa droite. »

Compléments de calcul algébrique 2

x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8	x^9	x^{10}	$x.\frac{1-x^{10}}{1-x}$
	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8	x^9	x^{10}	$x^2.\frac{1-x^9}{1-x}$
		x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8	x^9	x^{10}	$x^3.\frac{1-x^8}{1-x}$
			x^4	x^5	x^6	x^7	x^8	x^9	x^{10}	$x^4.\frac{1-x^7}{1-x}$
				x^5	x^6	x^7	x^8	x^9	x^{10}	$x^5.\frac{1-x^6}{1-x}$
					x^6	x^7	x^8	x^9	x^{10}	$x^6.\frac{1-x^5}{1-x}$
						x^7	x^8	x^9	x^{10}	$x^7.\frac{1-x^4}{1-x}$
							x^8	x^9	x^{10}	$x^8.\frac{1-x^3}{1-x}$
								x^9	x^{10}	$x^9.\frac{1-x^2}{1-x}$
									x^{10}	$x^{10}.\frac{1-x}{1-x}$
x	$2x^2$	$3x^3$	$4x^4$	$5x^5$	$6x^6$	$7x^7$	$8x^8$	$9x^9$	$10x^{10}$	

Une somme en triangle.

Le calcul de la somme de chaque colonne est immédiat.
La somme de chaque ligne est une somme de termes consécutifs d'une suite géométrique.
Le calcul se fait donc sans problème (on a supposé $x \neq 1$).
En égalant les deux manières de calculer la somme de tous les termes du carré, on obtient

$$\sum_{k=1}^{10} kx^k = \sum_{k=1}^{10} x^k \frac{1-x^{11-k}}{1-x}$$

Or le membre de droite se calcule aussi avec des suites géométriques... On retrouve le résultat de l'exercice n° 3.

Exercices axés sur le calcul

Exercice 1

Dans les deux cas suivants, résoudre le système d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} x - y + z = a \\ y + z = b \\ 2x + 3y + 7z = c \end{cases}$$

1) $(a, b, c) = (1, 1, 1)$.

2) $(a, b, c) = (-1, 1, 3)$.

Exercice 2

On considère le système $\begin{cases} a + 3b - 3c = 5 \\ a + 4b - 5c = 7 \end{cases}$ d'inconnue $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

1) Expliquer pourquoi le système a au moins une solution.
2) À l'aide d'une combinaison linéaire des deux équations, déterminer la valeur de $a + b + c$ lorsque (a, b, c) est solution du système.
3) Résoudre le système et retrouver la valeur de $a + b + c$.

Exercice 3 *Somme de termes d'une suite géométrique et application*

Soient x un réel et $n \in \mathbb{N}$. On pose :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + \cdots + x^n \text{ et } T_n(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = 1 + 2x + \cdots + nx^{n-1}.$$

1) Rappeler les valeurs de $S_n(1)$ et de $T_n(1)$.
2) Pour $x \neq 1$, rappeler la valeur de $S_n(x)$, calculer $(1 - x)T_n(x)$ et en déduire $T_n(x)$.
3) Pour $x \neq 1$, retrouver $T_n(x)$ en remarquant que $T_n(x) = S_n'(x)$.

Exercice 4 *Sommes doubles*

Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer les sommes suivantes :

1) $A_n = \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{n} (i + j) \right)$.

2) $B_n = \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{i} ij \right)$.

3) $C_n = \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{n} \max(i, j) \right)$.

Exercice 5 *Classique*

1) Expliciter deux réels a et b tels que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$.
2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer la somme $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.
3) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer le produit $P_n = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$.

Exercice 6 *Produit d'entiers pairs (respectivement impairs) consécutifs*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose :

$$p_n = \prod_{k=1}^{n} (2k) = 2 \cdot 4 \cdots (2n-2)(2n) \text{ et } q_n = \prod_{k=0}^{n-1} (2k+1) = 1 \cdot 3 \cdots (2n-3)(2n-1).$$

Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, p_n et q_n à l'aide de factorielles.

Exercice 7 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} = \sqrt{n+1} - 1$.

Exercice 8 Calculer la somme $S = \sum_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2} \binom{n}{i}(j+i)$.

Exercice 9

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$p_n = \cos(\pi/4)\cos(\pi/8)\cdots\cos(\pi/2^{n+2}) = \prod_{k=0}^{n} \cos(\pi/2^{k+2}).$$

1) Rappeler la valeur de p_0.
2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, simplifier p_n à l'aide de l'égalité $\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$.

Exercices axés sur le raisonnement

Exercice 10

Soit $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ solution de $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 16x_4 = 1 \\ 4x_1 + 9x_2 + 16x_3 + 25x_4 = 8 \\ 9x_1 + 16x_2 + 25x_3 + 36x_4 = 23 \end{cases}$.

Calculer la valeur de $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$.

Exercice 11

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On considère le système d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} \lambda x + 2y = 0 \\ x + \lambda y + z = 0 \\ 2y + \lambda z = 0 \end{cases}.$$

Pour quelles valeurs du réel λ, le système a-t-il une unique solution ?

Exercice 12 *Somme double*

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{i}{i+j}\right)=\frac{n^2}{2}.$$

Indication : On pourra remarquer que $\frac{i}{i+j}=\frac{i+j-j}{i+j}$.

Exercice 13 *Somme triangulaire*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Vérifier :

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=j}^{n}\frac{j}{i}\right)=\frac{n(n+3)}{4}.$$

Corrections

Exercices axés sur le calcul

Exercice 1

$$\begin{cases} x - y + z = a \\ y + z = b \\ 2x + 3y + 7z = c \end{cases} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x - y + z = a \\ y + z = b \\ 5y + 5z = c - 2a \end{cases}$$

En utilisant ensuite $L_3 \leftarrow L_3 - 5L_2$, la dernière équation devient $0 = c - 5b - 2a$.

1) Si $(a, b, c) = (1, 1, 1)$, alors $c - 5b - 2a = -6 \neq 0$ et le système n'a pas de solution.

2) Si $(a, b, c) = (-1, 1, 3)$, alors $c - 5b - 2a = 0$. Le système devient $\begin{cases} x - y + z = -1 \\ y + z = 1 \end{cases}$.

Le système est équivalent à $y = 1 - z$ et $x = y - z - 1 = -2z$.

L'ensemble des solutions est l'ensemble des triplets $(-2z, 1 - z, z)$ avec $z \in \mathbb{R}$.

Exercice 2

1) Le système est un système de 2 équations à 3 inconnues. Comme $2 < 3$, il y a au moins une solution.

2) En faisant une combinaison linéaire de $a+3b-3c=5$ et de $a+4b-5c=7$, on obtient une équation de la forme :

$$(\alpha+\beta)a+(3\alpha+4\beta)b-(3\alpha+5\beta)c=5\alpha+7\beta.$$

Pour obtenir la valeur de $a+b+c$, on souhaite que les 3 coefficients soient identiques c'est-à-dire $\alpha+\beta=3\alpha+4\beta$ et $\alpha+\beta=-3\alpha-5\beta$. Ces deux conditions donnent $2\alpha+3\beta=0$ (et $4\alpha+6\beta=0$).

En choisissant $\alpha=3$ et $\beta=-2$, on obtient $a+b+c=-9+10=1$.

3) $\begin{cases} a+3b-3c=5 \\ a+4b-5c=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+3b-3c=5 \\ b-2c=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1-3c \\ b=2+2c \end{cases}$.

L'ensemble des solutions est l'ensemble des triplets de forme $(-1-3c, 2+2c, c)$ avec $c\in\mathbb{R}$. On constate que pour tout $c\in\mathbb{R}$, $(-1-3c)+(2+2c)+c=1$.

Exercice 3 *Somme de termes d'une suite géométrique et application*

1) On a $S_n(1)=\sum_{k=0}^{n}1=n+1$ et on sait que $T_n(1)=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$.

2) On sait que pour $x\neq 1$, $S_n(x)=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ (somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison x).

$$\begin{aligned} T_n(x) &= 1+2x+\cdots+nx^{n-1} \\ xT_n(x) &= x+2x^2+\cdots+(n-1)x^{n-1}+nx^n \quad \leftarrow L_1-L_2 \\ (1-x)T_n &= 1+x+\cdots+x^{n-1}-nx^n \quad \leftarrow \sum_{k=0}^{n-1}x^k=S_{n-1}(x)=\frac{1-x^n}{1-x} \\ &= \frac{1-x^n}{1-x}-nx^n. \end{aligned}$$

Donc :

$$\forall x\neq 1,\quad T_n(x)=\frac{1-x^n-nx^n(1-x)}{(1-x)^2}.$$

3) Pour $x\neq 1$, $S_n(x)=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ et par linéarité de la dérivation, $T_n(x)=S_n'(x)$. Donc :

$$\forall x\neq 1,\quad T_n(x)=\frac{-(n+1)x^n(1-x)+(1-x^{n+1})}{(1-x)^2}.$$

Exercice 4

1) En utilisant la linéarité de la somme, on a :

$$\begin{aligned}
A_n &= \sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{n} i + \sum_{j=0}^{n} j\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n}\left((n+1)i + \frac{n(n+1)}{2}\right) \\
&= (n+1)\sum_{i=0}^{n} i + \sum_{i=0}^{n}\frac{n(n+1)}{2} \\
&= (n+1)\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2}(n+1) \\
&= n(n+1)^2.
\end{aligned}$$

i ne dépend pas de j

$\sum_{j=0}^{n} j = n(n+1)/2$

linéarité de la somme

$\text{Card}[\![0,n]\!] = n+1$

2) En utilisant la linéarité de la somme, on a :

$$\begin{aligned}
B_n &= \sum_{i=0}^{n}\left(i\sum_{j=0}^{i} j\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n} i\frac{i(i+1)}{2} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} i^3 + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} i^2 \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= \frac{n(n+1)}{24}(3n^2+3n+4n+2) \\
&= \frac{n(n+1)}{24}(3n^2+7n+2).
\end{aligned}$$

$\sum_{j=0}^{n} j = n(n+1)/2$

linéarité de la somme

$\sum_{i=0}^{n} i^2 = n(n+1)(2n+1)/6$

$\sum_{i=0}^{n} i^3 = n^2(n+1)^2/4$

3) • Première méthode

Pour $i \in [\![0,n]\!]$, on a :

$$\sum_{j=0}^{n} \max(i,j) = i + i + \cdots + i + (i+1) + (i+2) + \cdots + n.$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n} \max(i,j) &= \sum_{j=0}^{i} i + \sum_{j=i+1}^{n} j \\
&= i(i+1) + \sum_{j=0}^{n} j - \sum_{j=0}^{i} j \\
&= i(i+1) + \frac{n(n+1)}{2} - \frac{i(i+1)}{2} \\
&= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{i(i+1)}{2}.
\end{aligned}$$

i ne dépend pas de j

on fait apparaître $\sum_{j=0}^{n} j$

$\sum_{j=0}^{n} j = n(n+1)/2$

D'où :

$$\begin{aligned} C_n &= \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{n(n+1)}{2} + \frac{i(i+1)}{2} \right) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \sum_{i=0}^{n} 1 + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n} i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n} i \\ &= \frac{n(n+1)^2}{2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} + \frac{n(n+1)}{4} \\ &= \frac{n(n+1)}{12}(6n + 6 + 2n + 1 + 3) \\ &= \frac{n(n+1)}{6}(4n + 5). \end{aligned}$$

linéarité de la somme

$\sum_{i=0}^{n} i^2 = n(n+1)(2n+1)/6$

• Seconde méthode (par regroupement de termes)

Pour i et $j \in [\![0, n]\!]$, on a $\max(i, j) \in [\![0, n]\!]$.
Et pour $k \in [\![0, n]\!]$, on a :

$$\max(i, j) = k \iff (i = k \text{ et } j \leqslant k) \text{ ou } (i < k \text{ et } j = k).$$

Il y a donc $k + 1 + k = 2k + 1$ couples (i, j) d'entiers naturels tels que $\max(i, j) = k$.
D'où, en notant $M_k = \{(i, j) \in [\![0, n]\!] \mid \max(i, j) = k\}$:

$$\begin{aligned} C_n &= \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{(i,j) \in M_k} k \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} k(2k + 1) \\ &= 2 \sum_{k=0}^{n} k^2 + \sum_{k=0}^{n} k \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} + \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)}{6}(4n + 2 + 3) \\ &= \frac{n(n+1)}{6}(4n + 5). \end{aligned}$$

$\operatorname{card}(M_k) = 2k + 1$

linéarité de la somme

$\sum_{n=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\sum_{n=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

Exercice 5

1) On a $\frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} = \frac{(a+b)k+a}{k(k+1)}$.
En choisissant $a = 1$ et $b = -1$, on a $a + b = 0$ et $a = 1$, donc :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, à l'aide de la question précédente, on fait apparaître une somme télescopique :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

3) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $P_n = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$. Donc :

$$P_n = \frac{1}{1\cdot 2} \cdot \frac{1}{2\cdot 3} \cdots \frac{1}{(n-1)\cdot n} \cdot \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{1}{(n!)^2} \cdot \frac{1}{n+1}.$$

Remarque

On pouvait écrire $P_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{\prod_{k=1}^{n} k} \cdot \frac{1}{\prod_{k=1}^{n} (k+1)} = \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{(n+1)!}$.

Exercice 6 *Produit d'entiers pairs (respectivement impairs) consécutifs*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour p_n, on factorise par 2 dans chacun des n facteurs :

$$p_n = 2\cdot 4 \cdots (2n-2)(2n) = 2^n\big(1\cdot 2\cdots(n-1)(n)\big) = 2^n n!.$$

On pouvait écrire $p_n = \prod_{k=1}^{n} (2k) = 2^n \prod_{k=1}^{n} k = 2^n n!$.

Pour q_n, tous les facteurs sont impairs, on introduit les facteurs pairs de 2 à $2n$ et on divise par p_n :

$$q_n = 1\cdot 3\cdots(2n-3)(2n-1) = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots(2n-1)(2n)}{2\cdot 4\cdots(2n-2)(2n)} = \frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

On pouvait écrire $q_n = \prod_{k=0}^{n-1} (2k+1) = \frac{\prod_{k=1}^{2n} k}{p_n} = \frac{(2n)!}{2^n n!}$.

Exercice 7

Le membre de droite de l'égalité fait penser à une somme téléscopique. On transforme le quotient à l'aide la quantité conjuguée :

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} = \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}^2 - \sqrt{k}^2} = \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{k+1-k} = \sqrt{k+1}-\sqrt{k}.$$

On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} = \sum_{k=0}^{n} \left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right) = \sqrt{n+1} - 1.$$

Remarque

Si on ne pense pas à transformer les termes de la somme, on peut démontrer le résultat fourni par l'énoncé par récurrence.

Exercice 8

• Premier calcul par $S = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{i}(j+i)\right)$.

Pour $i \in [\![1,n]\!]$, on a :

$$\begin{aligned} s_i &= \sum_{j=1}^{n}\binom{n}{i}(j+i) \\ &= \binom{n}{i}\sum_{j=1}^{n} j + \binom{n}{i} i \sum_{j=1}^{n} 1 \\ &= \binom{n}{i}\frac{n(n+1)}{2} + \binom{n}{i} in. \end{aligned}$$

Puis $S = \sum_{i=1}^{n} s_i = \frac{n(n+1)}{2}\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i} + n\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i} i$.

D'une part, la somme de la ligne n du triangle de Pascal est une application classique de la formule du binôme :

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} 1^i 1^{n-i} = (1+1)^n.$$

Donc :

$$\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} - \binom{n}{0} = 2^n - 1.$$

D'autre part, pour $i \in [\![1,n]\!]$, on sait transformer $i\binom{n}{i}$ (égalité parfois appelée *formule du pion*) :

$$i\binom{n}{i} = i\frac{n!}{i!(n-i)!} = n\frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} = n\binom{n-1}{i-1}.$$

On obtient :

$$\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i} i = n\sum_{i=1}^{n}\binom{n-1}{i-1} = n\sum_{k=0}^{n}\binom{n-1}{k} = n(1+1)^{n-1}.$$

D'où finalement :

$$S = \frac{n(n+1)}{2}(2^n - 1) + n^2 2^{n-1}.$$

• Second calcul par $S = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}(j+i)\right)$.

Pour $j \in [\![1,n]\!]$, on a :

$$\begin{aligned} t_j &= \sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}(j+i) \\ &= j\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i} + \sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i} i \\ &= j(2^n - 1) + n2^{n-1}. \end{aligned}$$

(voir les calculs précédents)

Puis :

$$S = \sum_{j=1}^{n} t_j = (2^n - 1)\sum_{j=1}^{n} j + n2^{n-1}\sum_{j=1}^{n} 1 = (2^n - 1)\frac{n(n+1)}{2} + n^2 2^{n-1}.$$

Exercice 9

1) On sait que $p_0 = \cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$.
2) Pour $k \in \mathbb{N}$, on a $\sin(\pi/2^{k+1}) = 2\sin(\pi/2^{k+2})\cos(\pi/2^{k+2})$, en utilisant $\theta = \pi/2^{k+2}$. Comme $\pi/2^{k+2} \in]0, \pi[$, son sinus est nul et on a :

$$\begin{aligned} p_n &= \prod_{k=0}^{n} \frac{\sin(\pi/2^{k+1})}{2\sin(\pi/2^{k+2})} \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{\prod_{k=0}^{n} \sin(\pi/2^{k+1})}{\prod_{k=0}^{n} \sin(\pi/2^{k+2})} \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{\sin(\pi/2)}{\sin(\pi/2^{n+2})} \\ &= \frac{1}{2^{n+1}\sin(\pi/2^{n+2})}. \end{aligned}$$

(il y a $n+1$ facteurs ; on simplifie par $\prod_{k=1}^{n} \sin(\pi/2^{k+1}) = \prod_{k=0}^{n-1} \sin(\pi/2^{k+2})$; $\sin(\pi/2) = 1$)

Exercices axés sur le raisonnement

Exercice 10

Pour éviter une résolution complète du système, on remarque que les coefficients sont tous des carrés. Plus précisément, l'inconnue x_k a pour coefficients respectifs k^2, $(k+1)^2$ et $(k+2)^2$ dans les équations L_1, L_2 et L_3.
Or $k^2 - 2(k+1)^2 + (k+2)^2 = 0k^2 + 0k + 2$, donc en considérant $L_1 - 2L_2 + L_3$ on a :

$$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 - 16 + 23 = 8.$$

Donc $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4$.

Exercice 11

On commence par échanger L_1 et L_2 :

$$\begin{cases} \lambda x + 2y = 0 \\ x + \lambda y + z = 0 \\ 2y + \lambda z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \lambda y + z = 0 \\ \lambda x + 2y = 0 \\ 2y + \lambda z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \lambda y + z = 0 \\ (2-\lambda^2)y - \lambda z = 0 \\ 2y + \lambda z = 0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - \lambda L_1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \lambda y + z = 0 \\ 2y + \lambda z = 0 \\ (2-\lambda^2)y - \lambda z = 0 \end{cases} \quad L_2 \leftrightarrow L_3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \lambda y + z = 0 \\ 2y + \lambda z = 0 \\ \lambda(\lambda^2 - 4)z = 0 \end{cases} \quad L_3 \leftarrow 2L_3 - (2-\lambda^2)L_2$$

.

Le système a une unique solution si, et seulement si, $\lambda \notin \{-2, 0, 2\}$.

Exercice 12

En utilisant l'indication fournie, on a :

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{i}{i+j}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(1-\frac{j}{i+j}\right)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}1\right) - \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{j}{i+j}\right). \end{aligned}$$

$\frac{i}{i+j} = \frac{i+j-j}{i+j} = 1 - \frac{j}{i+j}$

par linéarité

On a $\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}1\right) = \sum_{i=1}^{n} n = n^2$. Regardons la seconde somme $S' = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{j}{i+j}\right)$:

$S' = S_1 + S_2 + \cdots S_n$ où $S_i = \sum_{j=1}^{n}\frac{j}{i+j} = \frac{1}{i+1} + \frac{2}{i+2} + \cdots + \frac{n}{i+n}$.

$S_1 = \frac{1}{1+1} + \frac{2}{1+2} + \cdots + \frac{n}{1+n}$

$S_2 = \frac{1}{2+1} + \frac{2}{2+2} + \cdots + \frac{n}{2+n}$

$\vdots = \quad \vdots$

$S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{2}{n+2} + \cdots + \frac{n}{n+n}$.

En groupant les termes par colonnes, on obtient :

$$S' = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} + \sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k+2} + \cdots + \sum_{k=1}^{n}\frac{n}{k+n} = \sum_{m=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{m}{k+m}\right).$$

Les indices étant muets, on obtient $S' = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{i}{j+i}\right) = S$, car $\frac{i}{j+i} = \frac{i}{i+j}$.

D'où $2S = n^2$ et donc $\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{i}{i+j}\right) = \frac{n^2}{2}$.

Exercice 13 *Somme triangulaire*

Utiliser $S = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=j}^{n}\frac{j}{i}\right) = \sum_{j=1}^{n} j\left(\sum_{i=j}^{n}\frac{1}{i}\right)$ ne permet pas de conclure.

On remarque qu'on a une somme double indexée par les couples (i, j) tels que $j \in [\![1, n]\!]$ et $i \in [\![j, n]\!]$. Notons T_n l'ensemble de ces couples. On a :

$$T_n = \left\{(i, j) \in [\![1, n]\!]^2 \mid j \leqslant i\right\}.$$

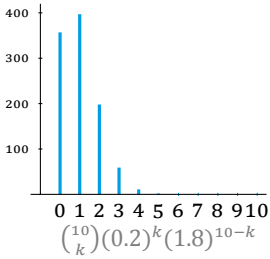
On peut décrire T_n comme étant l'ensemble des couples (i, j) tels que $i \in [\![1, n]\!]$ et $j \in [\![1, i]\!]$.

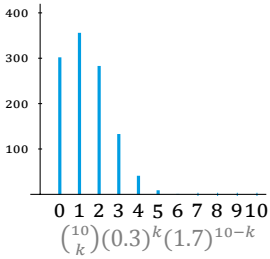
Écrivons alors :

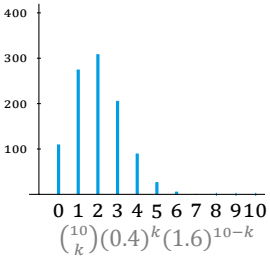
$$
\begin{aligned}
S &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i}\frac{j}{i}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\left(\sum_{j=1}^{i} j\right) && \text{i ne dépend pas de j} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{i+1}{2} && \sum_{j=1}^{i} j = \frac{i(i+1)}{2} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} 1 && \text{linéarité de la somme} \\
&= \frac{n(n+1)}{4} + \frac{n}{2} && \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2},\ \sum_{i=1}^{n} 1 = n \\
&= \frac{n(n+3)}{4}.
\end{aligned}
$$

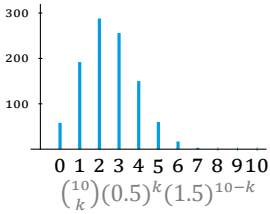
« *La somme de la ligne n du triangle de Pascal vaut 2^n.* »

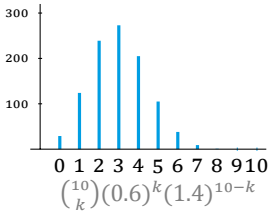
Minorations, majorations 3

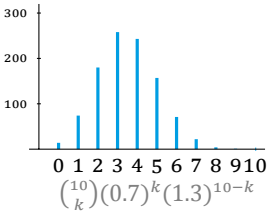


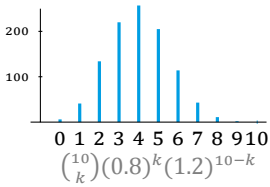


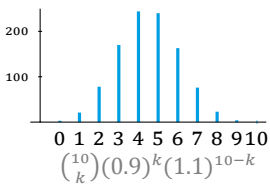


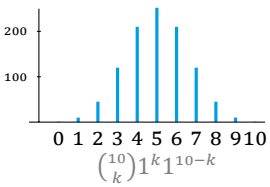












Dans l'exercice n° 9, on étudie les différents termes du développement de $(a+b)^n$, c'est-à-dire les nombres $\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$ pour déterminer quel est le plus grand. Sur les exemples de ces figures, on a pris $n = 10$ et a et b dont la somme vaut toujours 2 (la somme des termes vaut donc toujours 1024).

Pour un réel x, on note $\lfloor x \rfloor$ sa partie entière.
On rappelle que, sans précision contraire, « inférieur, supérieur, positif » sont toujours au sens large.

Exercices axés sur le calcul

Exercice 1

1) Montrer en les déterminant que $\{x(1-x), x \in [0,1]\}$ admet un minimum $\min\limits_{x\in[0,1]} x(1-x)$ et un maximum $\max\limits_{x\in[0,1]} x(1-x)$.
2) Soient a, b et c des réels positifs.
Montrer que l'un des trois réels $a(1-b)$, $b(1-c)$, $c(1-a)$ est inférieur à $1/4$.

Exercice 2 *Comparaison des moyennes arithmétique, géométrique et harmonique*

Soient x et y deux réels strictement positifs. On pose :

$$m = \frac{x+y}{2}, \quad g = \sqrt{xy}, \quad h = \frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}.$$

Montrer que $\min(x,y) \leqslant h \leqslant g \leqslant m \leqslant \max(x,y)$.

Exercice 3

Soient m et n deux entiers naturels non nuls.
1) Montrer que $\frac{m}{n}$ et $\frac{m+2n}{m+n}$ encadrent $\sqrt{2}$.
2) Montrer que $\frac{m+2n}{m+n}$ est plus proche de $\sqrt{2}$ que $\frac{m}{n}$.
3) Donner un encadrement de $\sqrt{2}$ entre deux rationnels d'amplitude inférieure à 10^{-2}.

Exercice 4

Soit $E = \left\{\frac{1}{n} + (-1)^n, n \in \mathbb{N}^*\right\}$.
1) Justifier l'existence d'une borne inférieure et d'une borne supérieure de E.
2) Préciser les valeurs de $\alpha = \inf(E)$ et $\beta = \sup(E)$.

Exercices axés sur le raisonnement

Exercice 5

Soit $x \in \mathbb{R}$.
1) Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $\lfloor 2x \rfloor = 2\lfloor x \rfloor$.
2) Proposer une généralisation.

Exercice 6

Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}.$$

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite.

Exercice 7

Établir pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor.$$

Exercice 8

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $E_n = \left\{ \frac{n}{k} + k, k \in \mathbb{N}^* \right\}$.

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   Montrer que E_n admet une borne inférieure. On la note a_n.
2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier $a_n \geqslant 2\sqrt{n}$.
   Indication : Étudier $f_n : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{n}{x} + x$.
3) Préciser a_1.
4) Étudier l'existence et préciser, en cas d'existences, la valeur de $\sup_{n\in\mathbb{N}^*} a_n$ et de $\inf_{n\in\mathbb{N}^*} a_n$.

Exercice 9 ⋆ *Comparaison des termes de la formule du binôme*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, a et b deux réels tels que $0 < a < b$.
Pour $k \in [\![0, n]\!]$, on rappelle que $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ et on pose $u_k = \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$.

1) Pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, exprimer le quotient $\frac{u_{k+1}}{u_k}$ en fonction de n, k, a et b.
   Vérifier :
   $$\frac{u_{k+1}}{u_k} = 1 \iff k = \frac{nb - a}{a + b}.$$
2) Montrer que si $n < b/a$, alors $u_0 < u_1 < \cdots < u_n$.
3) Montrer que si $n = b/a$, alors $u_0 < u_1 < \cdots < u_{n-1} = u_n$.
4) Que dire si $n > b/a$?

Exercice 10 *Une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^2$*

On note $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 5y \leqslant 0 \text{ et } 3x - 5y \leqslant 0\}$.
Pour $c_1 = (x_1, y_1)$ et $c_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on note $c_1 - c_2$ le couple $(x_1 - x_2, y_1 - y_2)$ et on définit $c_1 \prec c_2$ par :

$$c_1 \prec c_2 \quad \iff \quad c_1 - c_2 \in E.$$

Montrer que la relation $\prec$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^2$.
Préciser si cet ordre est total ou partiel.

Exercice 11 ⋆ *Une relation d'ordre sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$*

Pour toutes parties A et B de $\mathbb{R}$, on définit $A \preccurlyeq B$ par :

$$A \preccurlyeq B \quad \Leftrightarrow \quad (A \cap \mathbb{R}_+ \subset B \cap \mathbb{R}_+) \text{ et } (B \cap \mathbb{R}_-^* \subset A \cap \mathbb{R}_-^*).$$

1) Montrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.
2) Pour tout partie B de $\mathbb{R}$, montrer que :

$$\emptyset \preccurlyeq B \quad \Leftrightarrow \quad B \subset \mathbb{R}_+.$$

3) Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que $A \preccurlyeq \mathbb{R}$.
4) Pour toute partie A de E, montrer que $A \preccurlyeq \mathbb{R}_+$.
5) Existe-t-il un plus petit élément au sens de $\preccurlyeq$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{R})$?

Exercices avec questions ouvertes

Exercice 12

Soit $A = \left\{\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right), n \in \mathbb{N}\right\}$.

1) La partie A est-elle minorée ? majorée ?
2) En cas d'existences, préciser les valeurs de $\inf(A)$ et de $\sup(A)$.

Exercice 13 ⋆

Combien de solutions l'équation $x^2 - \lfloor x \rfloor = 3$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, admet-elle ?
Indication : On pourra représenter $x \mapsto x^2 - 3$ et $x \mapsto \lfloor x \rfloor$.

Exercice 14

Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$ non vides. On note $AB = \{ab, (a,b) \in A \times B\}$.

1) On suppose que A et B sont des parties de $\mathbb{R}^+$.
   Si A et B sont majorées, AB est-elle aussi majorée ? La réciproque est-elle vraie ?
2) Mêmes questions en supposant que A et B sont des parties de $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 15

Une relation binaire sur un ensemble E peut-elle être symétrique et antisymétrique, tout en n'étant pas réflexive ?