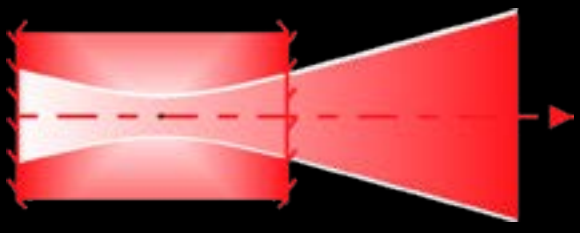
Pascal Olive

PHYSIQUE

en PC/PC*

Le cours complet



NOUVEAUX PROGRAMMES

ellipses

PHYSIQUE

en PC/PC*

Le cours complet

Pascal Olive

NOUVEAUX PROGRAMMES

ellipses

Du même, chez le même éditeur

Physique-Chimie en PSI/PSI - Le cours complet*, 928 pages, 2022.

ISBN 9782340-066571
©Ellipses Édition Marketing S.A., 2023
8/10 rue la Quintinie 75015 Paris



Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5.2° et 3°a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

AVANT-PROPOS

Cet ouvrage aborde l'ensemble du cours de Physique de la classe de PC / PC*. Il reprend également de nombreux points du programme de PCSI. Il est conforme au programme en vigueur depuis 2022.

☐ Le cours proposé est très complet. Sa rédaction est particulièrement rigoureuse et soignée, et s'appuie sur de nombreuses illustrations. Les points délicats sont discutés en détail, afin de fournir aux étudiants les plus exigeants des réponses à beaucoup de leurs questions. Les résultats et définitions les plus importants sont indiqués ainsi :

$\delta\mathscr{P} = J_x(x,t)\mathrm{d}t$ est le transfert de probabilité à l'abscisse x entre t et $t+\mathrm{d}t$.

Des résultats intermédiaires, ou un peu moins importants, sont grisés de la façon suivante :

Finalement, $\vec{a}_t(M) = \vec{g}(M) - \vec{g}(G)$.

Certaines définitions, ou points sur lesquels il est nécessaire de porter une attention particulière, sont mis en italique :

Les phénomènes ondulatoires, en présence de phénomènes dissipatifs, sont *irréversibles*.

☐ De très nombreuses applications sont intégrées au cours. Elles sont indiquées à l'aide du symbole ◎. Elles ont été choisies pour l'éclairage qu'elles lui apportent, leur intérêt culturel, et pour la diversité des techniques de résolution qu'elles font intervenir. Beaucoup d'applications classiques, qui font l'objet de nombreux sujets d'écrits et d'oraux, sont ainsi proposées.
— Si une section entière d'un chapitre est consacrée à des applications, elle est indiquée ainsi :

3. TURBORÉACTEUR ◎

— Une sous-section détaillant une application est indiquée ainsi :

3.1 Miroir de Lloyd ◎

☐ Le livre est scindé en sept parties conformément au programme. Les outils mathématiques nécessaires pour aborder les différents contenus du programme sont regroupés dans la première partie du livre.

☐ Quelques compléments hors-programmes sont présentés pour leur apport culturel, leur utilisation fréquente dans les T.I.P.E, ou pour mieux appréhender certaines notions. Ils peuvent être réservés à une deuxième

lecture plus approfondie. Ces compléments sont identifiés à l'aide d'une barre dans la marge de gauche et d'un interligne plus petit :

C'est un cas particulier du théorème de Reynolds :

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}_{\substack{\text{dérivée totale}\\ \text{(Lagrange)}}} = \frac{x(t+\mathrm{d}t)-x(t)}{\mathrm{d}t} = \underbrace{\iiint_{M\in\mathscr{V}_c} \frac{\partial \rho_x}{\partial t}\,\mathrm{d}^3\mathscr{V}}_{\text{dérivée locale (Euler)}} + \underbrace{\rho_{x2}(t)\,\mathscr{S}_2\,v_2(t) - \rho_{x1}(t)\,\mathscr{S}_1\,v_1(t)}_{\text{dérivée convective}}$$

Cet outil de travail complet, utile et agréable par la clarté du cours, la rigueur du contenu, la variété et la richesse des applications proposées, est écrit spécialement pour les étudiants qui préparent les concours d'entrée aux E.N.S. et aux plus grandes écoles d'ingénieurs, les étudiants en Master et les candidats aux concours d'enseignement (CAPES, Agrégation).

Je souhaite remercier ma compagne, Nathalie Martinez, qui m'a soutenu sans faiblir lors des longs mois d'écriture intense de cet ouvrage, et m'a prodigué de précieux conseils.

Je lui dédie ce livre, ainsi qu'à mon fils Pierre, ma fille Natalia et à mes parents Suzanne et Pierre.

Mes collègues Isabelle Bricaud, Catherine Métayer, Yann Millot et Valérie Monturet ont eu la gentillesse de relire certaines parties de l'ouvrage et de me faire des commentaires constructifs. Mention spéciale à Benoît Malet…

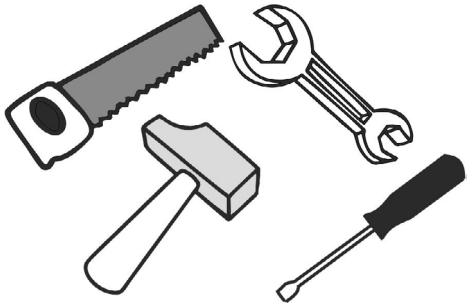
Je n'oublie pas mon collègue et ami de 30 ans, Lionel « Cocosinus » Cozar, qui a relu les parties les plus mathématiques.

Je remercie enfin mes étudiants, Olivier Baesen, Louis Bardinet, Naïs Baubry, Axel Brulavoine, Olivier Courmont, Amandine Darrigade, Anna Decrock, Achille Domens, Jules Morand, Florian Picq et Léo Simplet, ainsi que les étudiants de PC / PC* Thomas Fajolle et Baptiste Perrier, qui m'ont fait l'honneur de lire certains chapitres, de repérer des coquilles, et de me suggérer des améliorations.

Pascal OLIVE

[PREMIÈRE PARTIE]

BOÎTE À OUTILS



Les chapitres :

1. Différentielles et formes différentielles	3
2. Les systèmes de coordonnées	11
3. Analyse de Fourier	17
4. Champs et opérateurs différentiels	33
5. Grandeurs physiques : dimensions et unités	57

Dans cette première partie du livre sont exposés les outils nécessaires à l'étude des parties suivantes.

Le chapitre sur les champs et les opérateurs différentiels introduit de nouveaux opérateurs, ainsi que la notion de bilan local. Il doit impérativement être maîtrisé avant d'aborder les parties portant sur l'électromagnétisme, la mécanique, la thermodynamique et la Physique des ondes.

En mathématiques, une fonction est notée f ou bien $x \overset{f}{\mapsto} f(x)$ *, pour la distinguer de l'image f(x) de x par f. En Physique, la notation g(x,t) est souvent utilisée pour indiquer que la grandeur g dépend des variables x et t.*

[BOÎTE À OUTILS 1]

DIFFÉRENTIELLES ET FORMES DIFFÉRENTIELLES

1. FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

1.1 Dérivées partielles

On raisonne sur une fonction f de deux variables réelles : $(x,y)\overset{f}{\mapsto} f(x,y)$, à valeurs réelles, de classe C^1.

On note $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y$ la dérivée de la fonction f par rapport à la variable x, les autres variables (ici y) étant fixées.

On note simplement $\frac{\partial f}{\partial x}$ cette dérivée partielle lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté. Par exemple, en thermodynamique, une fonction d'état d'un corps pur sous une seule phase, comme l'entropie S, est une fonction de deux variables indépendantes. On peut choisir comme couple de variables la température T et la pression p, mais aussi T et le volume V. Il faut distinguer $\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p$ et $\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V$, qui sont *a priori* différentes.

1.2 Théorème de Schwarz

$(x,y)\mapsto \frac{\partial f}{\partial x}$ et $(x,y)\mapsto \frac{\partial f}{\partial y}$ sont des fonctions de deux variables qui peuvent être dérivées par rapport à x ou y si elles sont de classe C^1. On peut former $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$, et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. Si $(x,y)\mapsto \frac{\partial f}{\partial x}$ et $(x,y)\mapsto \frac{\partial f}{\partial y}$ sont de classe C^1, f est de classe C^2 et le *théorème de Schwarz* s'applique :

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$, soit $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$: peu importe l'ordre des dérivations.

Par exemple : $(x,y)\overset{f}{\mapsto} x^2\ln(y)$ est de classe C^2 sur son domaine de définition.

On calcule $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\ln(y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2}{y}$. On a bien $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{2x}{y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$.

2. DIFFÉRENTIELLES

2.1 Fonction d'une seule variable

La fonction $f : x \overset{f}{\mapsto} f(x)$ étant suffisamment régulière, elle admet au voisinage de x un développement de Taylor :

$$f(x+\delta x) = f(x) + \delta x \cdot f'(x) + \frac{(\delta x)^2}{2!} \cdot f''(x) + O\left[(\delta x)^3\right].$$

Intéressons-nous à la différence $f(x+\delta x) - f(x)$, quand δx est très petit :

$f(x+\delta x) - f(x) = \delta x \cdot f'(x) + \frac{(\delta x)^2}{2!} \cdot f''(x) + O\left[(\delta x)^3\right]$. On a donc :

$$\frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x} = f'(x) + \frac{\delta x}{2!} \cdot f''(x) + O\left[(\delta x)^2\right].$$

On note dx un accroissement δx *infiniment petit* :

$\frac{f(x+\mathrm{d}x) - f(x)}{\mathrm{d}x} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x} = f'(x)$, ce qu'on écrit sous la forme :

$f(x+\mathrm{d}x) - f(x) = f'(x)\mathrm{d}x$.

La différence $\mathrm{d}f = f(x+\mathrm{d}x) - f(x)$ est appelée *différentielle* de f en x.
On a $\mathrm{d}f = f'(x)\mathrm{d}x$ pour une fonction d'une seule variable.

Ceci fait tout l'intérêt de la notation de Leibniz : $f'(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$.

$\mathrm{d}f = f(x+\mathrm{d}x) - f(x)$ est la variation infinitésimale de f au voisinage de x, due à une variation infinitésimale dx de x.

Remarquons que, contrairement au cas d'un accroissement fini δx, il n'y a pas dans df de termes en $(\mathrm{d}x)^2$, $(\mathrm{d}x)^3$, etc. Ceci n'est pas une approximation car :

$$A\mathrm{d}x + B(\mathrm{d}x)^2 = \mathrm{d}x\left[A + B\mathrm{d}x\right] = \mathrm{d}x \cdot \lim_{\delta x \to 0}\left[A + B\delta x\right] = A\mathrm{d}x.$$

Un infiniment petit du premier ordre dx est infiniment plus grand qu'un infiniment petit du second ordre $(\mathrm{d}x)^2$. Des termes en $(\mathrm{d}x)^2$ n'interviennent que s'il n'y a pas de termes en dx ($A = 0$).

Pour le calcul de différentielles, on utilise souvent les dérivations composées. Si $x \overset{F}{\mapsto} F(x) = f\left[g(x)\right]$ alors $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}g} \cdot \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$: on retrouve la formule $(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$.

On en déduit $\mathrm{d}F = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}g}\cdot\dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$. Par exemple, si $F(x)=\exp(2\sqrt{x})$, $\mathrm{d}F = \dfrac{\exp(2\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

2.2 Fonction de plusieurs variables

On raisonne sur une fonction f de deux variables réelles : $(x,y)\overset{f}{\mapsto} f(x,y)$, de classe C^2, à valeurs réelles.

La fonction f étant suffisamment régulière, elle admet au voisinage de (x,y) un développement de Taylor à l'ordre 2 (à des termes d'ordre 3 près, comme $(\delta x)^3$ ou $\delta x\cdot(\delta y)^2$) :

$$f(x+\delta x,y+\delta y)=f(x,y)+\delta x\cdot\frac{\partial f}{\partial x}+\delta y\cdot\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{1}{2!}\left[(\delta x)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\delta x\cdot\delta y\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+(\delta y)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right].$$

En notant $\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}y$ les infiniment petits d'ordre 1, on a :

$\mathrm{d}f = f(x+\mathrm{d}x,y+\mathrm{d}y)-f(x,y)=\dfrac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y$, *différentielle* de f en (x,y).

$\mathrm{d}f = f(x+\mathrm{d}x,y+\mathrm{d}y)-f(x,y)$ est la variation infinitésimale de f au voisinage de (x,y), due à une variation infinitésimale $\mathrm{d}x$ de x et $\mathrm{d}y$ de y.

Par exemple, si f : $(x,y)\overset{f}{\mapsto} x^2\ln(y)$, $\mathrm{d}f=\dfrac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y=2x\ln(y)\mathrm{d}x+\dfrac{x^2}{y}\mathrm{d}y$.

2.3 Intégration

Pour une fonction d'une seule variable, découpons l'intervalle $[a,b]$ en N intervalles de longueur $\delta x=\dfrac{b-a}{N}$ et calculons $I=\sum_{i=1}^{N}\left(f[a+i\delta x]-f[a+(i-1)\delta x]\right)$.

Cette somme discrète se simplifie :

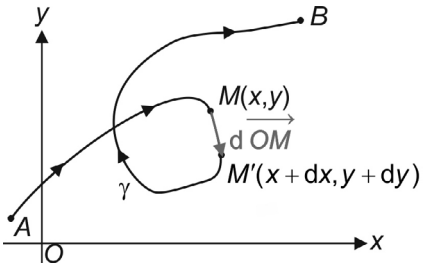
$I=f(b)\underbrace{-f(b-\delta x)+f(b-\delta x)}_{0}-\ldots\underbrace{-f(a+\delta x)+f(a+\delta x)}_{0}-f(a)$, soit $I=f(b)-f(a)$.

δx devient infiniment petit si $N\to\infty$, et est noté $\mathrm{d}x$. La somme I n'est alors plus discrète, mais continue, et s'écrit $I=\int_{x=a}^{x=b}[f(x+\mathrm{d}x)-f(x)]=\int_{x=a}^{x=b}\mathrm{d}f=f(b)-f(a)$.

Ce résultat est bien traduit par la notation de Leibniz :

$$\int_{x=a}^{x=b}\mathrm{d}f=\int_{x=a}^{x=b}f'(x)\mathrm{d}x=\left[f(x)\right]_a^b=f(b)-f(a).$$

Pour une fonction de deux variables, $\int_{A(x_A,y_A)}^{B(x_B,y_B)} \mathrm{d}f$ prend le sens suivant : on somme, le long d'un chemin γ menant de A à B, les différences $\mathrm{d}f = f(x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y) - f(x,y)$ entre les points M et M' de coordonnées respectives (x,y) et $(x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y)$.



La somme continue $\int_A^B \mathrm{d}f = f(B) - f(A) = f(x_B, y_B) - f(x_A, y_A)$ ne dépend que de A et B, et ne dépend donc pas du chemin γ suivi pour aller de A à B.

3. FORMES DIFFÉRENTIELLES

3.1 Définition

Pour un système décrit par deux variables x et y, une *forme différentielle* s'écrit $\delta W = P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$.

Par exemple, dans un champ de force $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{e}_x + Q(x,y)\vec{e}_y$, le travail reçu par une particule se déplaçant de $M(x,y)$ à $M'(x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y)$ vaut :

$\delta W = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$.

Malgré la notation, qui est la même que celle d'un accroissement fini, c'est un travail *élémentaire*, ou *infinitésimal*, défini pour un déplacement élémentaire :

$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MM'} = \mathrm{d}x\,\vec{e}_x + \mathrm{d}y\,\vec{e}_y$ de la particule, se produisant entre les dates t et $t+\mathrm{d}t$.

Une forme différentielle est donc définie pour une *transformation infinitésimale* correspondant à une variation $\mathrm{d}x$ de x et $\mathrm{d}y$ de y au voisinage de (x,y).

Lorsqu'on somme les formes différentielles δW le long d'un chemin γ entre deux points A et B, on obtient la grandeur $W_{A\to B}^{\gamma}$ (par exemple, le travail de la force s'exerçant sur la particule qui se déplace entre A et B le long de γ).

La grandeur $W_{A\to B}^{\gamma} = \int_A^B \delta W$ *dépend a priori du chemin* γ *suivi entre* A et B.

3.2 Théorème de Poincaré

À quelle condition $W_{A\to B}^{\gamma}$ ne dépend-il que de A et de B, et pas de γ ? Autrement dit, à quelle condition existe-t-il $f : (x,y) \overset{f}{\mapsto} f(x,y)$ telle que $W_{A\to B}^{\gamma} = f(B) - f(A)$?

Pour un déplacement élémentaire, la relation précédente s'écrit : $\delta W = f(x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y) - f(x,y)$, soit $\delta W = \mathrm{d}f$. On cherche donc la condition pour qu'il existe une fonction f telle que $\delta W = P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \mathrm{d}f = \dfrac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \dfrac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y$. Si c'est le cas, on identifie $\begin{cases} P(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ Q(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{cases}$, et, d'après le théorème de Schwarz, on a nécessairement $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$. La réciproque n'est pas toujours vraie (elle l'est à certaines conditions sur le domaine des valeurs prises par x et y, conditions généralement vérifiées en Physique). Retenons l'implication suivante (théorème de Poincarré) :

$$\exists\, f : (x,y) \overset{f}{\mapsto} f(x,y) \text{ telle que } \delta W = P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \mathrm{d}f \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Prenons des exemples :

(i) La forme différentielle $\delta W = y\mathrm{d}x$ n'est pas une différentielle car $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 1 \neq \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 0$. En conséquence $W_{A\to B}^{\gamma}$ dépend du chemin γ suivi entre A et B.

(ii) La forme différentielle $\delta W = 2x\sin(y)\mathrm{d}x + \left[x^2\cos(y) - 1\right]\mathrm{d}y$ peut être une différentielle puisque $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 2x\cos(y) = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$. Cherchons donc s'il existe une fonction f telle que $\delta W = \mathrm{d}f$. On identifie pour cela les dérivées partielles : $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x\sin(y) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2\cos(y) - 1 \end{cases}$.

On intègre alors une de ces deux relations, par exemple la première : $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x\sin(y) \Rightarrow f(x,y) = x^2\sin(y) + \varphi(y)$.

Attention ! On a intégré à y constant, donc φ *n'est pas une constante*, mais n'importe quelle fonction de y à ce stade. En effet, la dérivée de $y \overset{\varphi}{\mapsto} \varphi(y)$ par rapport à x donne bien 0.

En reportant $f(x,y) = x^2\sin(y) + \varphi(y)$ dans la deuxième relation, on obtient : $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2\cos(y) + \dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}y} \underset{\text{aussi}}{=} x^2\cos(y) - 1 \Rightarrow \varphi(y) = -y + Cte$. Finalement, on a bien : $\delta W = \mathrm{d}f$, avec $f(x,y) = x^2\sin(y) - y + Cte$.

Revenons sur les différentes notations :

Pour une transformation infinitésimale, on note δW une forme différentielle et df une différentielle. Pour une transformation finie, on note $W^{\gamma}_{A\to B} = \int_A^B \delta W$, ou simplement W s'il n'y a pas d'ambiguïté, et $\Delta f = \int_A^B \mathrm{d}f = f(B) - f(A)$.

Par exemple, le premier principe de la thermodynamique s'écrit $\mathrm{d}E = \delta W + \delta Q$ pour une transformation infinitésimale, et $\Delta E = W + Q$ pour une transformation finie.

4. APPLICATIONS ◎

4.1 Fonctions implicites ◎

Considérons trois variables x, y et z liées par une relation $f(x,y,z) = 0$ $(*)$, par exemple $f(x,y,z) = yx^3 + z\ln(x) + 1 = 0$. Les variables x, y et z ne sont donc pas indépendantes. Si par exemple on fixe les valeurs de y et de z, alors x ne peut prendre que certaines valeurs, solutions de $(*)$. Cependant, comme dans l'exemple, on ne peut pas toujours expliciter x en fonction de y et de z, c'est-à-dire exprimer analytiquement la fonction $(y,z) \overset{x}{\mapsto} x(y,z)$: x est alors une fonction *implicite* de y et de z.

On peut néanmoins obtenir des relations entre les dérivées partielles. En effet, comme f est une constante, on a, en prenant la différentielle de $(*)$:

$$\mathrm{d}f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z}\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{z,x}\mathrm{d}y + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{x,y}\mathrm{d}z = 0.$$

Si z est constant ($\mathrm{d}z = 0$), on a $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z}\mathrm{d}x + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)_{z,x}\mathrm{d}y = 0$, or $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ à z constant est la dérivée partielle par rapport à x de la fonction implicite $(z,x) \overset{y}{\mapsto} y(z,x)$. On a donc $\left(\dfrac{\partial y}{\partial x}\right)_z = -\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z} \Big/ \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)_{z,x}$. On constate qu'il faut bien se garder de « simplifier » par ∂f, cette simplification étant dénuée de sens, et amenant à un résultat faux.

De même $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = -\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{z,x} \Big/ \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z}$, d'où la relation $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = \left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z\right]^{-1}$.

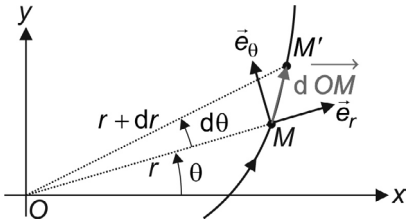
Un certain nombre de résultats peuvent être ainsi démontrés sans avoir à expliciter les fonctions $(x,y) \overset{z}{\mapsto} z(x,y)$, $(y,z) \overset{x}{\mapsto} x(y,z)$ et $(z,x) \overset{y}{\mapsto} y(z,x)$.

4.2 Calculs intégraux

Le calcul de grandeurs finies se ramène souvent au découpage du domaine d'intégration en parties infinitésimales. Prenons quelques exemples.

Exemple 1 : longueur d'une courbe d'équation polaire $\theta \mapsto r(\theta)$

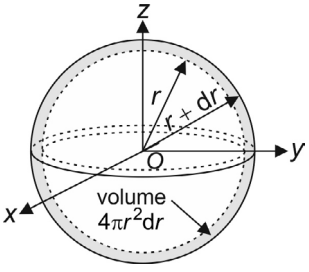
On découpe la courbe en segments élémentaires $[MM']$, où M a pour coordonnées polaires (r,θ) et M' : $(r+\mathrm{d}r, \theta+\mathrm{d}\theta)$. Le vecteur position est $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$. On obtient le déplacement élémentaire en prenant la différentielle de $\overrightarrow{OM}$:



$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MM'} = \mathrm{d}r\vec{e}_r + r\mathrm{d}\theta\vec{e}_\theta$, car $\frac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}\theta} = \vec{e}_\theta$. La longueur élémentaire vaut $\mathrm{d}L = \left\|\mathrm{d}\overrightarrow{OM}\right\| = \left\|\overrightarrow{MM'}\right\| = \sqrt{(\mathrm{d}r)^2 + (r\mathrm{d}\theta)^2} = \mathrm{d}\theta\sqrt{r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2}$, en parcourant la courbe dans le sens des θ croissants afin d'avoir $\mathrm{d}\theta > 0$. On obtient la longueur de la courbe comprise entre $\theta_{\min}$ et $\theta_{\max}$ en calculant $L = \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} \left\|\mathrm{d}\overrightarrow{OM}\right\| = \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} \sqrt{r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2}\,\mathrm{d}\theta$.

Exemple 2 : charge d'une boule

Une boule de rayon R possède une densité volumique de charges $\rho(r)$ qui ne dépend que de la distance r au centre O de la boule : il y a *symétrie sphérique* (invariance du système par toute rotation autour de O). Si ρ était uniforme, la charge Q de la boule serait le produit de ρ par son volume $\mathscr{V}$, mais ici on doit découper la sphère de façon à ce que $\rho(r)$ reste constant dans un volume élémentaire.



On peut prendre le volume compris entre deux sphères de centre O, et de rayons r et $r+\mathrm{d}r$. Ce volume vaut $\mathrm{d}\mathscr{V} = \mathscr{V}(r+\mathrm{d}r) - \mathscr{V}(r)$ où $\mathscr{V}(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$ est le volume d'une boule de rayon r. On a donc $\mathrm{d}\mathscr{V} = 4\pi r^2\mathrm{d}r$, d'où :

$$Q = \int_{r=0}^{R} \rho(r)\, 4\pi r^2 \mathrm{d}r .$$

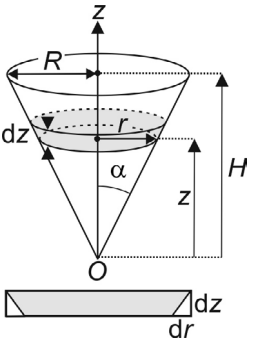
Tout l'intérêt des différentielles est le passage à une variation *infiniment* petite. Si le rayon de la boule subissait un accroissement fini δr, on aurait :

$$\delta\mathscr{V} = \mathscr{V}(r+\delta r) - \mathscr{V}(r) = \frac{4}{3}\pi\left[(r+\delta r)^3 - r^3\right] = \frac{4}{3}\pi\left[3r^2\delta r + 3r(\delta r)^2 + (\delta r)^3\right] \neq 4\pi r^2\delta r .$$

En revanche, $\mathrm{d}\mathscr{V} = 4\pi r^2 \mathrm{d}r$ est une relation exacte.

Exemple 3 : volume d'un cône

On peut calculer le volume $\mathscr{V}$ d'un cône de sommet *O*, d'axe *Oz*, de hauteur *H*, et de demi-angle au sommet α, en le découpant en tranches infinitésimales de hauteur d*z*. Le volume d'une telle tranche se confond avec celui d'un cylindre circulaire de hauteur d*z* et de rayon *r*, soit $\mathrm{d}\mathscr{V} = \pi r^2 \mathrm{d}z$.



Là encore, ce qui ne serait qu'une approximation pour un petit accroissement δz devient rigoureux pour d*z* infiniment petit. En effet la différence de volume entre le cylindre et la portion du cône de hauteur d*z* est de l'ordre de $r\mathrm{d}r\mathrm{d}z$, donc c'est un infiniment petit d'ordre 2 en d*z* puisque $r = z\tan\alpha$.

Finalement, $\mathscr{V} = \int_{z=0}^{H} \pi r^2 \mathrm{d}z = \int_{z=0}^{H} \pi\tan^2\alpha \cdot z^2 \mathrm{d}z = \frac{1}{3}\pi\tan^2\alpha \cdot H^3 = \frac{1}{3}\pi R^2 H$.

Exemple 4 : énergie reçue par un conducteur ohmique

Un conducteur ohmique de résistance *R* parcouru par un courant d'intensité *i*(*t*) reçoit une puissance instantanée $p(t) = Ri^2(t)$. Pendant une durée finie Δt, le conducteur reçoit un travail *W*, ce qui permet de définir la puissance moyenne $P = \frac{W}{\Delta t}$ reçue pendant Δt. Pour définir la puissance instantanée à la date *t*, on effectue le rapport entre le travail élémentaire δW reçu entre *t* et $t + \mathrm{d}t$ (attention ! δW est une forme différentielle, et pas une différentielle), et la durée d*t* infinitésimale.

La puissance instantanée, définie par $p(t) = \frac{\delta W}{\mathrm{d}t}$, n'est *pas une dérivée* puisque *W* n'est pas une fonction du temps (parler du « travail reçu à la date *t* » n'a pas de sens ; parler du travail δW reçu entre *t* et $t + \mathrm{d}t$ en a un).

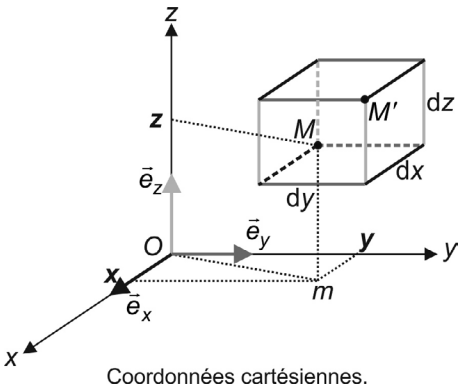
Le travail reçu par le conducteur entre t_1 et t_2 s'obtient en sommant les travaux élémentaires : $W = \int_{t_1}^{t_2} \delta W = \int_{t_1}^{t_2} Ri^2(t)\mathrm{d}t$.

[BOÎTE À OUTILS 2]

LES SYSTÈMES DE COORDONNÉES

1. COORDONNÉES CARTÉSIENNES

1.1 Définition



Coordonnées cartésiennes.

On définit le repère orthonormé *direct* $(O,\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$: le sens de $\vec{e}_z$ est celui du déplacement d'un tire-bouchon quand on tourne de $\vec{e}_x$ vers $\vec{e}_y$.

x (abscisse), *y* (ordonnée) et *z* (cote) sont les coordonnées cartésiennes du point *M*. Le vecteur position s'écrit $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$.

1.2 Déplacement, volume et surfaces élémentaires

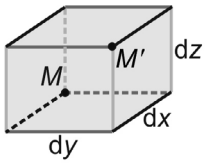
Si *x* varie de d*x*, le point se déplace de d*x* selon le vecteur $\vec{e}_x$.

Si *y* varie de d*y*, le point se déplace de d*y* selon le vecteur $\vec{e}_y$.

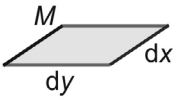
Si *z* varie de d*z*, le point se déplace de d*z* selon le vecteur $\vec{e}_z$.

Sous l'effet d'une variation infinitésimale d*x*, d*y*, d*z* de ses coordonnées *x*, *y*, *z*, le vecteur position varie de $\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}x\vec{e}_x + \mathrm{d}y\vec{e}_y + \mathrm{d}z\vec{e}_z$.

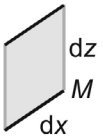
$\mathrm{d}\vec{r} = \overrightarrow{MM'} = \mathrm{d}\overrightarrow{OM}$ est le *déplacement élémentaire* entre un point *M* et un point *M′* infiniment proche.



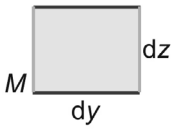
volume élémentaire
$dx\,dy\,dz$



surface élémentaire
$dx\,dy$



surface élémentaire
$dx\,dz$



surface élémentaire
$dy\,dz$

Le parallélépipède représenté sur la figure ci-dessus permet de calculer l'élément différentiel de volume en coordonnées cartésiennes : $\mathrm{d}^3\mathscr{V} = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

Le volume d'un domaine (D) de l'espace est donc :

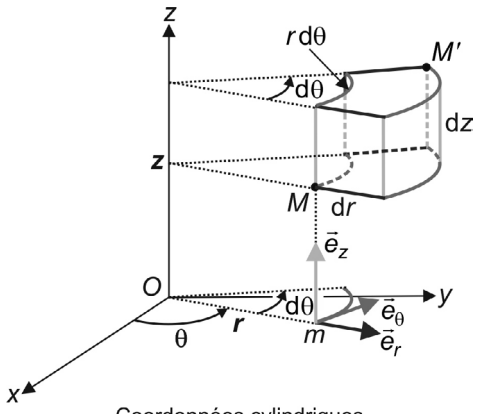
$$\mathscr{V} = \iiint_{M\in(D)} \mathrm{d}^3\mathscr{V} = \iiint_{M\in(D)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

On balaie l'espace entier en prenant $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

Les différentes surfaces élémentaires se déduisent aussi de la figure.

2. COORDONNÉES CYLINDRIQUES

2.1 Définition



Coordonnées cylindriques.

Soit un repère orthonormé direct cartésien $(O,\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$.

On définit la base *mobile* (elle dépend du point M) $(\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{e}_z)$, orthonormée et directe, ainsi que les coordonnées cylindriques de M, de la manière suivante :

— Si m est le projeté orthogonal de M sur le plan xOy, le vecteur unitaire radial $\vec{e}_r$ est

$$\vec{e}_r = \frac{\overrightarrow{Om}}{r}, \text{ avec } r = \left\|\overrightarrow{Om}\right\|.$$

— θ est l'angle *orienté* $(\vec{e}_x, \vec{e}_r)$ dans le plan *xOy* : cet angle est positif si un tire-bouchon se déplace dans le sens du vecteur $\vec{e}_z$ quand on tourne de $\vec{e}_x$ vers $\vec{e}_r$.

— Le vecteur unitaire orthoradial $\vec{e}_\theta$ se déduit de $\vec{e}_r$ par une rotation de $+\frac{\pi}{2}$ autour de *Oz*.

— Le vecteur unitaire $\vec{e}_z$ complète le trièdre direct.

r (rayon polaire), θ (angle polaire) et *z* (cote) sont les coordonnées cylindriques de *M*. Le vecteur position s'écrit $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$ (attention ! *r* n'est pas ici la norme du vecteur position).

2.2 Déplacement, volume et surfaces élémentaires

Si *r* varie de d*r*, le point se déplace de d*r* selon le vecteur $\vec{e}_r$.

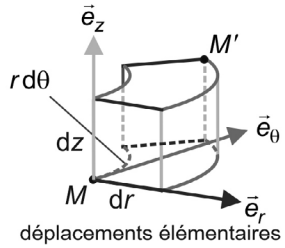
Si θ varie de dθ, le point se déplace de $r\,\mathrm{d}\theta$ selon le vecteur $\vec{e}_\theta$.

Si *z* varie de d*z*, le point se déplace de d*z* selon le vecteur $\vec{e}_z$.

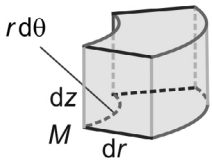
Remarquons que dθ étant infiniment petit, l'arc de cercle de longueur $r\,\mathrm{d}\theta$ se confond avec un segment rectiligne (ce qu'on ne peut pas représenter sur une figure, où les déplacements sont nécessairement finis).

Sous l'effet d'une variation infinitésimale d*r*, dθ, d*z* de ses coordonnées *r*, θ, *z*, le vecteur position varie de $\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}r\vec{e}_r + r\mathrm{d}\theta\vec{e}_\theta + \mathrm{d}z\vec{e}_z$.

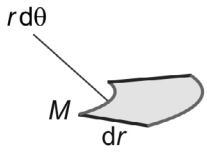
$\mathrm{d}\vec{r} = \overrightarrow{MM'} = \mathrm{d}\overrightarrow{OM}$ est le *déplacement élémentaire* entre un point *M* et un point *M'* infiniment proche.



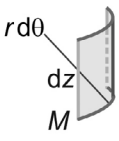
déplacements élémentaires



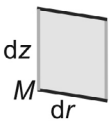
volume élémentaire
$r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$



surface élémentaire
$r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$



surface élémentaire
$r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$



surface élémentaire
$\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z$

Le parallélépipède représenté sur la figure précédente permet de calculer l'élément différentiel de volume en coordonnées cylindriques : $\mathrm{d}^3\mathscr{V} = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$.

Le volume d'un domaine (D) de l'espace est donc :

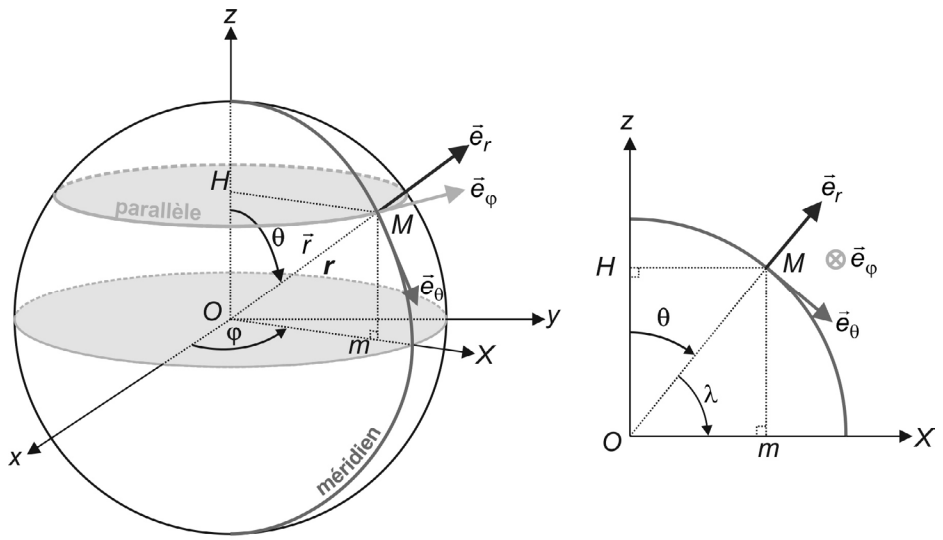
$$\mathscr{V} = \iiint_{M\in(D)} \mathrm{d}^3\mathscr{V} = \iiint_{M\in(D)} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z.$$

On balaie l'espace entier en prenant $r \in [0,+\infty[$, $\theta \in [0,2\pi[$, $z \in \mathbb{R}$.

Les différentes surfaces élémentaires se déduisent aussi de la figure.

3. COORDONNÉES SPHÉRIQUES

3.1 Définition



Coordonnées sphériques.

Soit un repère orthonormé direct cartésien $(O,\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$.

On définit la base *mobile* (elle dépend du point M) $(\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{e}_\varphi)$, orthonormée et directe, ainsi que les coordonnées sphériques de M, de la manière suivante :

— Le vecteur unitaire radial $\vec{e}_r$ est $\vec{e}_r = \dfrac{\overrightarrow{OM}}{r}$, avec $r = \left\|\overrightarrow{OM}\right\| = \|\vec{r}\|$.

— $\theta \in [0,\pi]$ est l'angle $(\vec{e}_z,\vec{e}_r)$. Lorsque $\theta = 0$, le point M se trouve sur l'axe Oz du côté des z positifs ; lorsque $\theta = \pi$, le point M se trouve sur l'axe Oz du côté des z négatifs.

— Le vecteur unitaire orthoradial $\vec{e}_\theta$ est un vecteur du plan vectoriel $(\vec{e}_z, \vec{e}_r)$ se déduisant de $\vec{e}_r$ par une rotation de $\frac{\pi}{2}$ dans le sens des θ croissants.

— Si *m* est le projeté orthogonal de *M* sur le plan *xOy*, l'angle φ est l'angle *orienté* $(\vec{e}_x, \overrightarrow{Om})$ dans le plan *xOy* : cet angle est positif si un tire-bouchon se déplace dans le sens du vecteur $\vec{e}_z$ quand on tourne de $\vec{e}_x$ vers $\overrightarrow{Om}$.

— Le vecteur unitaire $\vec{e}_\varphi$ complète le trièdre direct. C'est un vecteur du plan vectoriel $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ car il est orthogonal à $\vec{e}_z$.

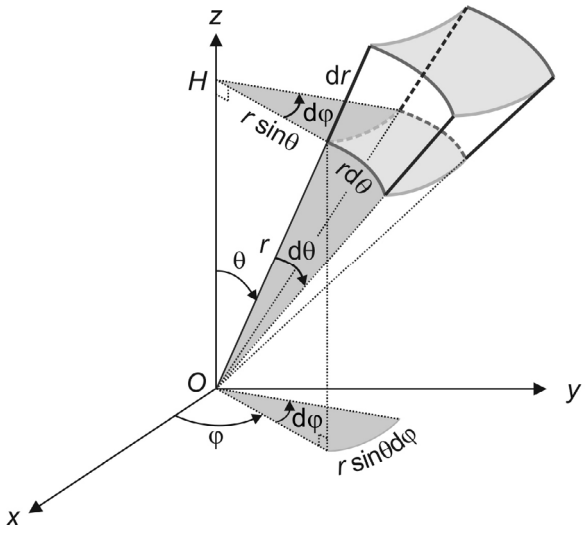
r (rayon), θ (colatitude) et φ (azimut) sont les coordonnées sphériques de *M*. Le vecteur position s'écrit $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$ (*r* est bien ici la norme du vecteur position).

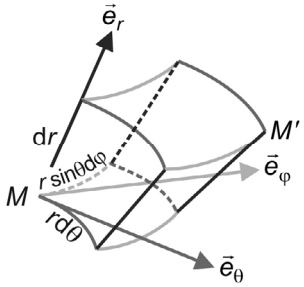
Pour visualiser les directions de $\vec{e}_\theta$ et $\vec{e}_\varphi$, on peut tracer la sphère de centre *O* et de rayon *r*. $\vec{e}_\theta$ est alors porté par un méridien et $\vec{e}_\varphi$ par un parallèle.

Ces références au repérage d'un point à la surface de la Terre sont précisément à l'origine du nom colatitude porté par l'angle θ.

La latitude λ est l'angle $(\vec{e}_r, \overrightarrow{Om})$. On a donc $\theta + \lambda = \frac{\pi}{2}$, comme on peut le voir sur la figure dans le plan méridien.

3.2 Déplacement, volume et surfaces élémentaires





déplacements élémentaires

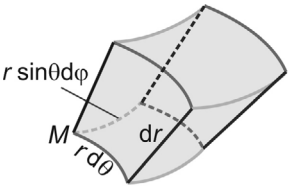
Si r varie de dr, le point se déplace de dr selon le vecteur $\vec{e}_r$.

Si θ varie de dθ, le point se déplace de $r\,\mathrm{d}\theta$ selon le vecteur $\vec{e}_\theta$.

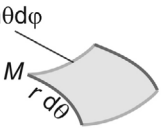
Si φ varie de dφ, le point se déplace de $r\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi$ selon le vecteur $\vec{e}_\varphi$.

Sous l'effet d'une variation infinitésimale dr, dθ, dφ de ses coordonnées r, θ, φ, le vecteur position varie de $\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}r\vec{e}_r + r\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta + r\sin\theta\mathrm{d}\varphi\,\vec{e}_\varphi$.

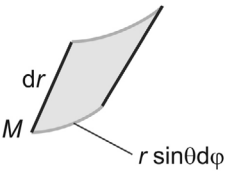
$\mathrm{d}\vec{r} = \overrightarrow{MM'} = \mathrm{d}\overrightarrow{OM}$ est le *déplacement élémentaire* entre un point M et un point M' infiniment proche.



volume élémentaire
$r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$



surface élémentaire
$r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$



surface élémentaire
$r\sin\theta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi$



surface élémentaire
$r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$

Le parallélépipède représenté sur la figure ci-dessus permet de calculer l'élément différentiel de volume en coordonnées sphériques : $\mathrm{d}^3\mathscr{V} = r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$.

Le volume d'un domaine (D) de l'espace est donc :

$$\mathscr{V} = \iiint_{M\in(D)} \mathrm{d}^3\mathscr{V} = \iiint_{M\in(D)} r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi.$$

On balaie l'espace entier en prenant :

$r\in[0,+\infty[$, $\theta\in[0,\pi]$, $\varphi\in[0,2\pi[$. Ainsi l'élément de volume $\mathrm{d}^3\mathscr{V}$ est positif.

On aurait également pu choisir $r\in[0,+\infty[$, $\theta\in[0,2\pi[$, $\varphi\in[0,\pi]$, mais il aurait fallu, pour garder un élément de volume positif, prendre $\mathrm{d}^3\mathscr{V} = r^2\left|\sin\theta\right|\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$.

Les différentes surfaces élémentaires se déduisent aussi de la figure.

[BOÎTE À OUTILS 3]

ANALYSE DE FOURIER

1. SÉRIE DE FOURIER

1.1 Théorème pour une fonction *f* à valeurs réelles

Théorème

Toute fonction *T-périodique* du temps $t \overset{f}{\mapsto} f(t)$, à valeurs réelles, peut être décomposée en une somme d'un nombre fini, ou infini, de composantes sinusoïdales discrètes, dont les pulsations sont multiples de la pulsation fondamentale $\Omega = \frac{2\pi}{T}$:

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \cos(n\Omega t) + b_n \sin(n\Omega t) \right] = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos(n\Omega t + \psi_n) .$$

Puisque $c_n \cos(n\Omega t + \psi_n) = \underbrace{c_n \cos\psi_n}_{a_n} \cos(n\Omega t) \underbrace{- c_n \sin\psi_n}_{b_n} \sin(n\Omega t)$, c_n est lié à a_n et b_n par ${c_n}^2 = {a_n}^2 + {b_n}^2$. On peut prendre $c_n \geq 0$ (il existe d'autres conventions). On a alors $c_n = \sqrt{{a_n}^2 + {b_n}^2}$.

Calcul des coefficients

Le coefficient $c_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \mathrm{d}t = \langle f \rangle$ est égal à la valeur moyenne de la fonction *f*.

Les coefficients a_n et b_n valent :

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\Omega t) \mathrm{d}t \qquad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\Omega t) \mathrm{d}t .$$

En conséquence, les coefficients a_n sont tous nuls si *f* est impaire et les coefficients b_n sont tous nuls si *f* est paire.

Convergence

Il existe des conditions pour que la série de Fourier (somme infinie) d'une fonction converge bien vers cette fonction. Dans le cas des fonctions de classe C^1 par morceaux, $c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos(n\Omega t_0 + \psi_n)$ converge bien vers $f(t_0)$ pour toute valeur t_0 où

f est continue, mais si f est discontinue en t_0, la série $c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos(n\Omega t_0 + \psi_n)$ converge vers $\frac{f(t_0^-) + f(t_0^+)}{2}$, qui peut être différent de $f(t_0)$.

Vocabulaire

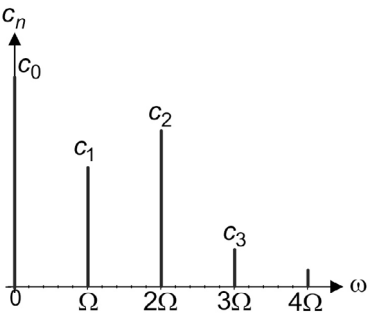
$t \mapsto c_0 = \langle f \rangle$ est une fonction constante (période infinie $\Leftrightarrow$ pulsation $\omega = 0$).

$t \mapsto c_1 \cos(\Omega t + \psi_1)$ est le *fondamental* de f (même période T que f).

$t \mapsto c_n \cos(n\Omega t + \psi_n)$ est *l'harmonique de rang n* de f (période T / n).

Spectre de *f*

L'analyse de Fourier permet une représentation de l'amplitude des harmoniques d'un signal en fonction de la pulsation, appelée *spectre* du signal. Chaque composante sinusoïdale apparaît comme une ligne verticale, appelée *raie*. On représente souvent, comme sur la figure ci-contre, l'amplitude c_n des harmoniques en fonction de la pulsation ω (qui ne prend que les valeurs discrètes $\omega = n\Omega$, avec $n \in \mathbb{N}$).



Approximation de *f*

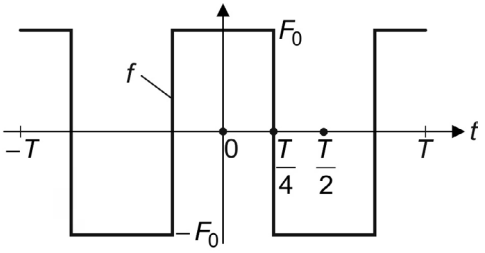
Pour toute fonction « physique », on a $c_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$, ce qui permet d'approximer f par une somme *finie* de fonctions sinusoïdales. Pour les fonctions qui présentent des discontinuités (créneaux par exemple), donc des variations infiniment rapides, les c_n décroissent lentement avec n puisque ces variations rapides correspondent à de grandes pulsations.

Exemples de calcul

— Fonction « créneaux »

Prenons f paire et :

$$\begin{cases} f(t) = F_0 \text{ pour } 0 \le t < T/4 \\ f(T/4) = 0 \\ f(t) = -F_0 \text{ pour } T/4 < t \le T/2 \end{cases}.$$



Il s'agit de créneaux symétriques (sur une période T, le signal prend pendant $T/2$ la valeur « haute » et pendant $T/2$ la valeur « basse »), de valeur moyenne nulle. On a donc : $c_0 = \langle f \rangle = 0$ et $b_n = 0 \ \forall n$ car f est paire.

Il reste à calculer les coefficients a_n :

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \underbrace{f(t)\cos(n\Omega t)}_{\text{paire}}\,\mathrm{d}t = \frac{4}{T}\int_{0}^{T/2} f(t)\cos(n\Omega t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{4}{T}\left\{\int_{0}^{T/4} \underbrace{f(t)}_{F_0}\cos(n\Omega t)\,\mathrm{d}t + \int_{T/4}^{T/2} \underbrace{f(t)}_{-F_0}\cos(n\Omega t)\,\mathrm{d}t\right\}$$

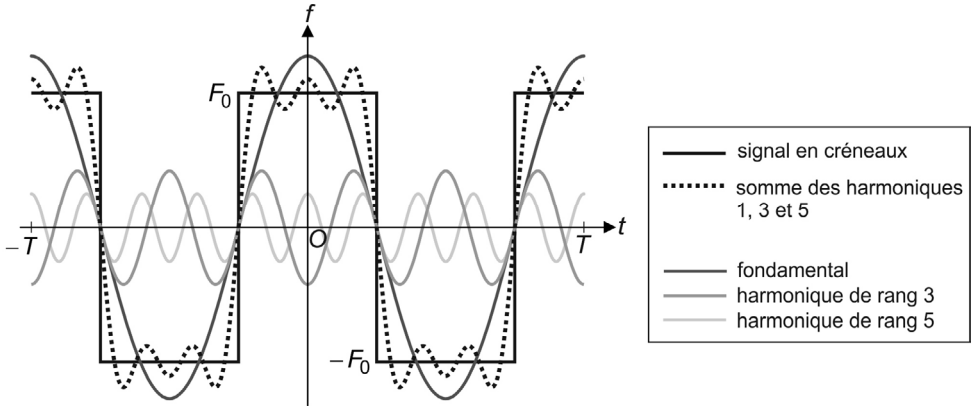
$$a_n = \frac{4F_0}{T}\left\{\left[\frac{\sin(n\Omega t)}{n\Omega}\right]_0^{T/4} - \left[\frac{\sin(n\Omega t)}{n\Omega}\right]_{T/4}^{T/2}\right\} = \frac{4F_0}{n\Omega T}\left\{2\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right\} = \frac{4F_0}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \text{ puisque}$$

$\Omega = 2\pi / T$. Il faut distinguer les cas n pair et impair : pour $n = 2p$: $a_{2p} = 0$; pour $n = 2p+1$: $a_{2p+1} = \dfrac{4F_0}{(2p+1)\pi}(-1)^p$.

Les conditions de convergence étant vérifiées pour toutes les valeurs de t, on a finalement $f(t) = \dfrac{4F_0}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^p}{2p+1}\cos\left[(2p+1)\Omega t\right]$.

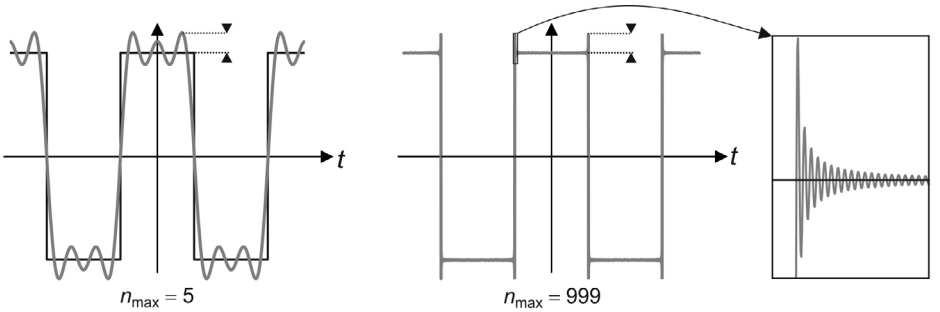
$$f(t) = \frac{4F_0}{\pi}\left[\cos(\Omega t) - \frac{1}{3}\cos(3\Omega t) + \frac{1}{5}\cos(5\Omega t) - \frac{1}{7}\cos(7\Omega t) + \ldots\right].$$

Le fondamental $t \mapsto \dfrac{4F_0}{\pi}\cos(\Omega t)$ des créneaux possède une amplitude plus grande que celle des créneaux.



On a représenté ci-dessus le signal temporel, les premiers harmoniques non nuls (rangs 1 : fondamental, 3 et 5), et la somme de ces trois premiers harmoniques.

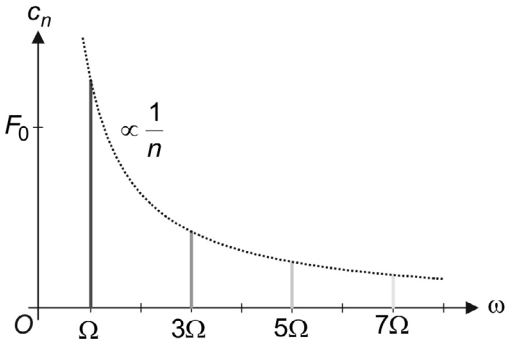
On constate que la convergence est non uniforme (l'écart entre la somme d'un nombre fini de sinusoïdes, même très grand, et les créneaux, reste borné inférieurement). Ceci est dû à la présence de la discontinuité dans les créneaux.



Convergence non uniforme : même en sommant un grand nombre de sinusoïdes, il persiste un écart entre cette somme et les créneaux. C'est le phénomène de Gibbs qui existe dès que la fonction que l'on approxime ainsi présente des discontinuités. En revanche, la série de Fourier converge simplement vers les créneaux : en un point donné, l'écart devient aussi faible que l'on veut en augmentant le nombre d'harmoniques que l'on somme.

Le spectre des créneaux est donné ci-contre. Les créneaux symétriques ne contiennent que des harmoniques de rang impair.

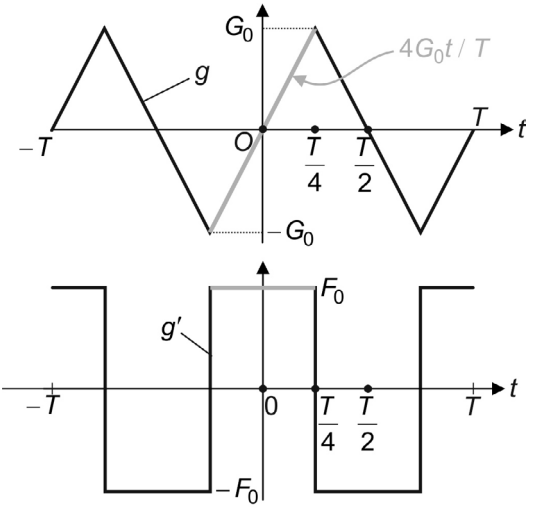
L'amplitude des harmoniques étant proportionnelle à $1/n$, elle décroît « lentement » avec n et il faut beaucoup d'harmoniques pour bien approximer les créneaux. C'est une conséquence de la discontinuité.



— Fonction « triangles »

Prenons une fonction g impaire et de valeur moyenne nulle (on a donc $c_0 = \langle g \rangle = 0$), correspondant à des triangles symétriques (la pente, en valeur absolue, est la même lorsque le signal croît que lorsqu'il décroît).

Il est possible d'éviter le calcul des coefficients a_n et b_n en remarquant que la dérivée de g est la fonction en créneaux paire, symétrique et de valeur moyenne nulle étudiée précédemment, dont la série de Fourier est connue.



On a ainsi $g'(t) = f(t) = \frac{4F_0}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} \cos\left[(2p+1)\Omega t\right]$ à tout instant en prenant $g'(T/4) = 0$. Entre $-T/4$ et $T/4$, $g(t) = 4G_0 t / T$, d'où $g'(t) = 4G_0 / T = F_0$.

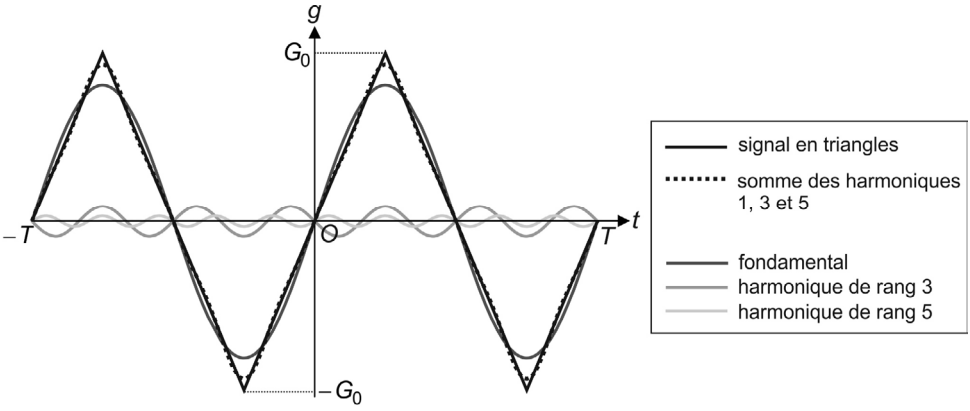
On obtient $g(t)$ par intégration :

$$g(t) = \underbrace{g(0)}_{=0} + \int_0^t f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{16G_0}{\pi\Omega T}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{(2p+1)^2}\sin\left[(2p+1)\Omega t\right], \text{ avec } \Omega = 2\pi/T, \text{ soit :}$$

$$g(t) = \frac{8G_0}{\pi^2}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{(2p+1)^2}\sin\left[(2p+1)\Omega t\right].$$

$$g(t) = \frac{8G_0}{\pi^2}\left[\sin(\Omega t) - \frac{1}{3^2}\sin(3\Omega t) + \frac{1}{5^2}\sin(5\Omega t) - \frac{1}{7^2}\sin(7\Omega t) + \ldots\right].$$

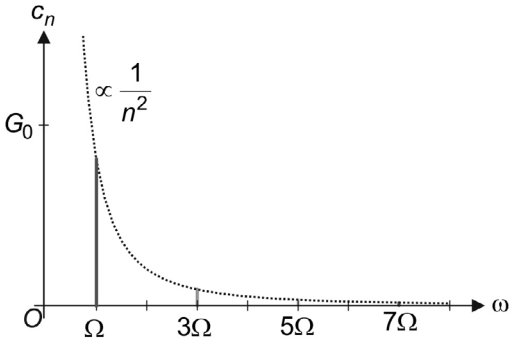
Le fondamental $t \mapsto f(t) = \dfrac{8G_0}{\pi^2}\sin(\Omega t)$ des triangles possède une amplitude plus petite que celle des triangles.



On a de nouveau représenté ci-dessus le signal temporel ; les premiers harmoniques non nuls (rangs 1 : fondamental, 3 et 5), et la somme de ces trois premiers harmoniques. La convergence est cette fois-ci uniforme (l'écart entre les triangles et la somme d'un nombre fini de sinusoïdes tend vers 0 quand ce nombre augmente).

Le spectre des triangles est donné ci-contre. Les triangles symétriques ne contiennent que des harmoniques de rang impair.

L'amplitude des harmoniques étant proportionnelle à $1/n^2$, elle décroît « rapidement » avec n et il faut peu d'harmoniques pour bien approximer les triangles.



1.2 Théorème de Parseval

Soit une fonction f T-périodique qui peut donc être décomposée en série de Fourier : $f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n \cos(n\Omega t) + b_n \sin(n\Omega t)\right] = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \cos(n\Omega t + \psi_n)$, avec $\Omega = \frac{2\pi}{T}$ et $\psi_0 = 0$.

Dans l'expression de f^2 interviennent les produits :

$$c_n \cos(n\Omega t + \psi_n) \cdot c_{n'} \cos(n'\Omega t + \psi_{n'})$$
$$= \frac{c_n c_{n'}}{2}\left[\cos\left((n+n')\Omega t + \psi_n + \psi_{n'}\right) + \cos\left((n-n')\Omega t + \psi_n - \psi_{n'}\right)\right].$$

Leur valeur moyenne est nulle, sauf dans le cas $n' = n$ où elle vaut ${c_0}^2$ si $n = 0$ et $\frac{{c_n}^2}{2} = \frac{{a_n}^2 + {b_n}^2}{2}$ si $n \neq 0$. On a donc :

$$\left\langle f^2 \right\rangle = {c_0}^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}({a_n}^2 + {b_n}^2) = {c_0}^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}{c_n}^2 \quad (\textit{théorème de Parseval}).$$

En Physique, la puissance moyenne d'un signal T-périodique est définie, à une constante multiplicative près, comme la valeur moyenne du signal au carré. C'est par exemple le cas de la puissance moyenne dans un conducteur ohmique de résistance R parcouru par un courant d'intensité $i(t)$: $P = R\left\langle i^2 \right\rangle$.

On déduit du théorème de Parseval que la puissance moyenne d'un signal est égale à la somme des puissances moyennes de ses composantes sinusoïdales.

1.3 Théorème pour les fonctions f à valeurs complexes (complément hors-programme)

Théorème

Toute fonction T_0-périodique du temps t, à valeurs complexes, peut être décomposée en une somme d'un nombre fini, ou infini, de composantes sinusoïdales discrètes, dont les fréquences sont multiples de la fréquence fondamentale $\nu_0 = \frac{1}{T_0}$.

Le développement en série de Fourier s'écrit $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{2i\pi n\nu_0 t}$.

Les coefficients $C_n \in \mathbb{C}$ de la série de Fourier se calculent à l'aide de la formule suivante : $C_n = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} f(t) e^{-2i\pi n\nu_0 t}\,\mathrm{d}t$. Le spectre de f fait donc intervenir des fréquences négatives, mais pour une fonction f réelle, on a $C_{-n} = {C^*}_n$ (conjugué de C_n), d'où :

$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} C_{-n} e^{-2i\pi n\nu_0 t} + \sum_{n=1}^{+\infty} C_n e^{2i\pi n\nu_0 t} = C_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[C_n e^{2i\pi n\nu_0 t} + (C_n e^{2i\pi n\nu_0 t})^* \right]$.

On a donc $f(t) = C_0 + 2\mathrm{Re}\left[\sum_{n=1}^{+\infty} C_n e^{2i\pi n\nu_0 t} \right]$.

Ainsi, on peut ne considérer que les fréquences positives. Le spectre est alors par exemple la représentation de $2|C_n| = c_n$ pour $\nu = \nu_0$, $2\nu_0$, $3\nu_0$,..., $n\nu_0$, et de la valeur moyenne $C_0 = c_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} f(t)\mathrm{d}t = \langle f \rangle$ correspondant à la fréquence $\nu = 0$.

Autre forme pour les fonctions à valeurs réelles

Posons $C_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$ pour $n > 0$ et $\Omega = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi\nu_0$. On a alors :

$f(t) = C_0 + 2\mathrm{Re}\left[\sum_{n=1}^{+\infty} C_n e^{in\Omega t} \right] = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \cos(n\Omega t) + b_n \sin(n\Omega t) \right]$.

De $C_n = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} f(t)\left[\cos(n\Omega t) - i\sin(n\Omega t)\right]\mathrm{d}t$ on tire les coefficients c_0, a_n et b_n :

$c_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} f(t)\mathrm{d}t = \langle f \rangle$, $a_n = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} f(t)\cos(n\Omega t)\mathrm{d}t$ et $b_n = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} f(t)\sin(n\Omega t)\mathrm{d}t$. On retrouve la forme $f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos(n\Omega t + \psi_n)$, avec $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = 2|C_n|$, vue au 1.1.

2. TRANSFORMÉE DE FOURIER

2.1 Théorème

Toute fonction du temps *f*, *non périodique*, à valeurs complexes, telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\mathrm{d}t$ converge (ce qui implique $\lim_{t \to \pm\infty} f(t) = 0$), est une somme continue de fonctions sinusoïdales : $f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\nu) e^{2i\pi\nu t}\mathrm{d}\nu$, où $\tilde{f}$, fonction *continue* de la fréquence ν, est donnée par $\tilde{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2i\pi\nu t}\mathrm{d}t$. La fonction $\tilde{f} = \mathrm{TF}(f)$ est la *transformée de Fourier* de *f*, et $f = \mathrm{TF}^{-1}(\tilde{f})$ est la *transformée de Fourier inverse* de $\tilde{f}$.

Le spectre de *f* fait donc intervenir des fréquences négatives, mais pour une fonction *f* réelle, on a $\tilde{f}(-\nu) = \tilde{f}^*(\nu)$, d'où :

$f(t)=\int_{-\infty}^{0}\tilde{f}(\nu)e^{2i\pi\nu t}\mathrm{d}\nu+\int_{0}^{+\infty}\tilde{f}(\nu)e^{2i\pi\nu t}\mathrm{d}\nu=\int_{0}^{+\infty}\tilde{f}(-\nu)e^{-2i\pi\nu t}\mathrm{d}\nu+\int_{0}^{+\infty}\tilde{f}(\nu)e^{2i\pi\nu t}\mathrm{d}\nu$, soit :

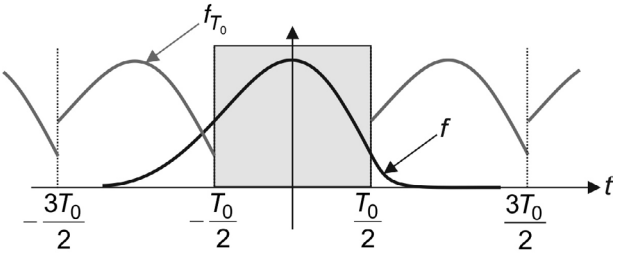
$$f(t)=\int_{0}^{+\infty}\left[\tilde{f}(\nu)e^{2i\pi\nu t}+\left(\tilde{f}(\nu)e^{2i\pi\nu t}\right)^{*}\right]\mathrm{d}\nu=2\mathrm{Re}\left[\int_{0}^{+\infty}\tilde{f}(\nu)e^{2i\pi\nu t}\mathrm{d}\nu\right].$$

On peut donc ne considérer que les fréquences positives. Le spectre est alors par exemple la représentation de $2\left|\tilde{f}(\nu)\right|$ pour $\nu\geq 0$.

2.2 Démonstration (complément hors-programme)

On peut appliquer le théorème de Fourier à la fonction f_{T_0}, « périodisée de f », T_0-périodique, qui s'identifie à f sur l'intervalle $[-T_0/2, T_0/2]$. Si $\nu_0=1/T_0$, on a :

$f_{T_0}(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_n e^{2i\pi n\nu_0 t}$, avec $C_n=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}f_{T_0}(t)e^{-2i\pi n\nu_0 t}\mathrm{d}t\underset{\text{déf}}{=}\frac{1}{T_0}\tilde{f}_{T_0}(n\nu_0)$.



Comme $\Delta\nu=(n+1)\nu_0-n\nu_0=\nu_0=1/T_0$ est l'écart entre deux fréquences consécutives dans le spectre de $f_{T_0}(t)$, on peut écrire $f_{T_0}(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\tilde{f}_{T_0}(n\nu_0)e^{2i\pi n\nu_0 t}\Delta\nu$.

Si $T_0\to+\infty$, $f_{T_0}(t)\to f(t)$, $\tilde{f}_{T_0}(n\nu_0)\to\tilde{f}(n\nu_0)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-2i\pi n\nu_0 t}\mathrm{d}t$ et $\Delta\nu\to\mathrm{d}\nu$.

Ainsi $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\tilde{f}_{T_0}(n\nu_0)e^{2i\pi n\nu_0 t}\Delta\nu\to\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{f}(\nu)e^{2i\pi\nu t}\mathrm{d}\nu$ puisque, pour $n\in\mathbb{Z}$, $\nu=n\nu_0$ varie continûment entre $-\infty$ et $+\infty$ lorsque $\nu_0=\Delta\nu$ devient infiniment petit.

On a bien $f(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{f}(\nu)e^{2i\pi\nu t}\mathrm{d}\nu$, avec $\tilde{f}(\nu)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-2i\pi\nu t}\mathrm{d}t$.

2.3 Propriétés

— La TF est *linéaire* : $\mathrm{TF}(\lambda f+\mu g)=\lambda\mathrm{TF}(f)+\mu\mathrm{TF}(g)$.

— $\mathrm{TF}\left[\mathrm{TF}(f)\right](t)=f(-t)$.

— Translation : $\mathrm{TF}\left[t\mapsto f(t-t_0)\right](\nu)=e^{-2i\pi\nu t_0}\cdot\tilde{f}(\nu)$.

— $\mathrm{TF}\left[t \mapsto f'(t)\right](\nu) = 2i\pi\nu \cdot \tilde{f}(\nu)$. En effet, en intégrant par parties :

$$\mathrm{TF}\left[t \mapsto f'(t)\right](\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)e^{-2i\pi\nu t}\mathrm{d}t = \underbrace{\left[f(t)e^{-2i\pi\nu t}\right]_{-\infty}^{+\infty}}_{0} + 2i\pi\nu \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2i\pi\nu t}\mathrm{d}t = 2i\pi\nu \cdot \tilde{f}(\nu).$$

— $\dfrac{\mathrm{d}\tilde{f}}{\mathrm{d}\nu} = -2i\pi \int_{-\infty}^{+\infty} t \cdot f(t)e^{-2i\pi\nu t}\mathrm{d}t = -2i\pi \cdot \mathrm{TF}\left[t \mapsto t \cdot f(t)\right](\nu)$.

— Similitude : pour $\lambda \in \mathbb{R}^+$, $\mathrm{TF}\left[t \mapsto f\left(t/\lambda\right)\right](\nu) = \lambda \cdot \tilde{f}(\lambda\nu)$. Démontrons cela :

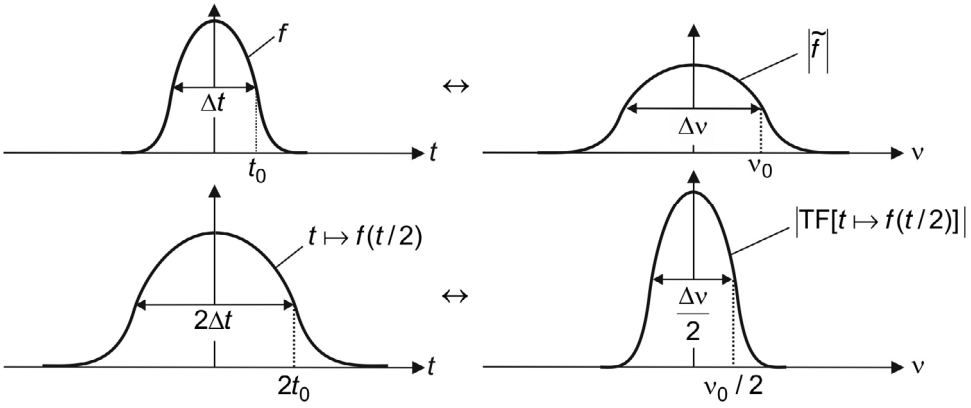
$\mathrm{TF}\left[t \mapsto f\left(t/\lambda\right)\right](\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(t/\lambda\right)e^{-2i\pi\nu t}\mathrm{d}t$. Après le changement de variables $t' = t/\lambda$:

$$\mathrm{TF}\left[t \mapsto f\left(t/\lambda\right)\right](\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t')e^{-2i\pi\nu\lambda t'}\lambda\mathrm{d}t' = \lambda \cdot \tilde{f}(\lambda\nu).$$

Cette propriété est fondamentale : une dilatation de l'échelle des temps ($\lambda > 1$) implique une contraction de celle des fréquences. Une contraction de l'échelle des temps ($\lambda < 1$) implique une dilatation de celle des fréquences. En d'autres termes :

> Plus un signal temporel est bref, plus il est riche en fréquences (spectre étalé) ; plus il dure longtemps, moins il contient de fréquences (spectre étroit).

On a représenté ci-après le cas $\lambda = 2$. Si on caractérise le signal $t \mapsto f(t)$ par une durée Δt, le signal $t \mapsto f(T/2)$ est caractérisé par une durée $2\Delta t$.



2.4 Théorème de Parseval-Plancherel (hors-programme) et conséquences

Le théorème de Parseval-Plancherel (admis) traduit que l'énergie d'un signal est égale à la somme des énergies de ses composantes sinusoïdales :

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|f(t)\right|^2 \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\tilde{f}(\nu)\right|^2 \mathrm{d}\nu.$$

On peut donc considérer que $\frac{|f(t)|^2}{E}$ et $\frac{|\tilde{f}(\nu)|^2}{E}$ sont des densités de probabilité : $\frac{|f(t)|^2}{E}\mathrm{d}t$ est la probabilité que le signal soit détecté entre t et $t+\mathrm{d}t$, et on a bien sûr $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|f(t)|^2}{E}\mathrm{d}t=1$. De même $\frac{|\tilde{f}(\nu)|^2}{E}\mathrm{d}\nu$ est la probabilité que la fréquence du signal se trouve entre ν et $\nu+\mathrm{d}\nu$, et on a $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|\tilde{f}(\nu)|^2}{E}\mathrm{d}\nu=1$.

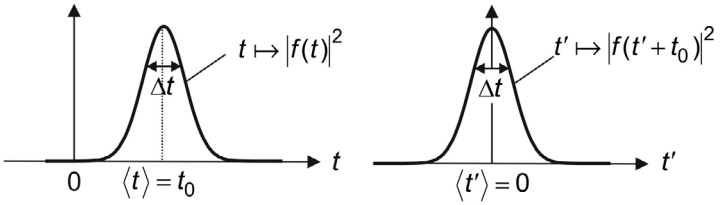
Par la suite, on posera $E=1$ pour alléger les notations.

L'instant moyen de détection est $\langle t\rangle = t_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} t|f(t)|^2\,\mathrm{d}t$, et la fréquence moyenne du signal est $\langle \nu\rangle = \nu_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \nu|\tilde{f}(\nu)|^2\,\mathrm{d}\nu$.

On peut ainsi définir *sans ambiguïté* la durée Δt du signal et sa largeur fréquentielle $\Delta\nu$ comme les écarts-types temporels et spectraux :

$(\Delta t)^2 = \langle t^2\rangle - {t_0}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2|f(t)|^2\,\mathrm{d}t - {t_0}^2$, et $(\Delta\nu)^2 = \langle \nu^2\rangle - {\nu_0}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \nu^2|\tilde{f}(\nu)|^2\,\mathrm{d}\nu - {\nu_0}^2$.

On peut supposer $t_0=0$ et $\nu_0=0$ sans nuire à la généralité du propos car l'écart-type est conservé si on décale l'origine des temps ou des fréquences :



L'écart-type temporel est inchangé par le changement de variable $t' = t - t_0$.

On a alors $(\Delta t)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2|f(t)|^2\,\mathrm{d}t$ et $(\Delta\nu)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \nu^2|\tilde{f}(\nu)|^2\,\mathrm{d}\nu$.

Cherchons maintenant à trouver une relation entre Δt et $\Delta\nu$.

Comme on l'a montré au 2.3, $\mathrm{TF}\left[t\mapsto\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right](\nu) = 2i\pi\nu\cdot\tilde{f}(\nu)$ donc la relation de Parseval-Plancherel nous assure que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right|^2\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty}\left|2i\pi\nu\cdot\tilde{f}(\nu)\right|^2\mathrm{d}\nu = 4\pi^2\int_{-\infty}^{+\infty}\nu^2|\tilde{f}(\nu)|^2\,\mathrm{d}\nu = 4\pi^2(\Delta\nu)^2.$$

Considérons la fonction $\lambda\mapsto\Gamma(\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left|t\cdot f(t)+\lambda\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right|^2\mathrm{d}t$ de la variable réelle λ.

Comme $\left|t\cdot f(t)+\lambda\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right|^2=\left(t\cdot f(t)+\lambda\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right)\left(t\cdot f(t)+\lambda\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right)^*=t^2|f(t)|^2+\lambda t\dfrac{\mathrm{d}|f(t)|^2}{\mathrm{d}t}+\lambda^2\left|\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right|^2$,

on a $\Gamma(\lambda)=\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}t^2|f(t)|^2\,\mathrm{d}t}_{(\Delta t)^2}+\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}t\dfrac{\mathrm{d}|f(t)|^2}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t+\lambda^2\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right|^2\mathrm{d}t}_{4\pi^2(\Delta\nu)^2}$.

L'intégrale du milieu se calcule par parties :

$\int_{-\infty}^{+\infty}t\dfrac{\mathrm{d}|f(t)|^2}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t=\underbrace{\left[t\cdot|f(t)|^2\right]_{-\infty}^{+\infty}}_{0}-\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|^2\,\mathrm{d}t}_{1}$, car la fonction $t\mapsto t\cdot|f(t)|^2$ doit s'annuler en $\pm\infty$ pour que $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|^2\,\mathrm{d}t$ existe.

Finalement $\Gamma(\lambda)=(\Delta t)^2-\lambda+4\pi^2(\Delta\nu)^2\lambda^2$ est un polynôme du second degré, or $\Gamma(\lambda)\geq 0\ \forall t$ car l'intégrande qui intervient dans la définition de la fonction Γ est positive.

Le discriminant du polynôme doit être négatif : $1-16\pi^2(\Delta t)^2(\Delta\nu)^2\leq 0$. Les écarts-type sont liés par l'inégalité $16\pi^2(\Delta t)^2(\Delta\nu)^2\geq 1$ soit $\Delta t\cdot\Delta\nu\geq\dfrac{1}{4\pi}$.

La relation $\Delta t\cdot\Delta\nu\geq\dfrac{1}{4\pi}$ est fondamentale en Physique.

On peut aussi utiliser la pulsation $\omega=2\pi\nu$ pour caractériser le spectre d'une fonction *f*. On a alors $f(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{f}(\omega)e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega$. La fonction $\omega\to\tilde{f}(\omega)$ n'est pas la même que la précédente où la variable était la fréquence ν. Le choix du facteur $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$ pour définir cette transformée de Fourier inverse permet d'obtenir une forme « symétrique » pour la transformée de Fourier directe : $\tilde{f}(\omega)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t$.

La relation entre les écarts-types s'écrit aussi $\Delta t\cdot\Delta\omega\geq\dfrac{1}{2}$.

On a raisonné sur un signal temporel, mais les résultats sont bien sûr valables pour une fonction ψ d'une coordonnée d'espace *x*. Dans ce cas, la transformée de Fourier inverse s'écrit $\psi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{p=-\infty}^{+\infty}\tilde{\psi}(k)e^{ikx}\mathrm{d}k$, et la transformée de Fourier directe $\tilde{\psi}(k)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{p=-\infty}^{+\infty}\psi(x)e^{-ikx}\mathrm{d}x$, où $k=\dfrac{2\pi}{\lambda}$ est le nombre d'onde, analogue de $\omega=\dfrac{2\pi}{T}$, avec λ la longueur d'onde (période spatiale) et *T* la période temporelle.

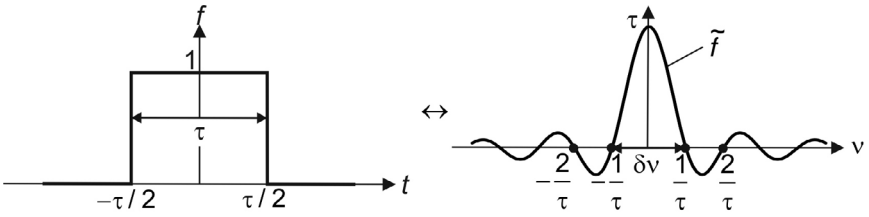
La relation entre les écarts-types s'écrit alors $\Delta x \cdot \Delta k \geq \frac{1}{2}$.

On peut se demander s'il existe des fonctions pour lesquelles on atteint l'égalité $\Delta t \cdot \Delta\omega = \frac{1}{2}$. Dans ce cas, $\Gamma(\lambda) = 0$ admet une racine double $\lambda_0 = 2(\Delta t)^2$. Pour cette valeur, on a $\Gamma(\lambda_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| t \cdot f(t) + \lambda_0 \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} \right|^2 \mathrm{d}t = 0$, ce qui entraîne $t \cdot f(t) + \lambda_0 \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = 0$, équation différentielle qui s'intègre en $f(t) = Ae^{-\frac{t^2}{2\lambda_0}} = Ae^{-\frac{t^2}{4(\Delta t)^2}}$. C'est une fonction gaussienne, et Δt est bien l'écart-type temporel pour une densité de probabilité égale à $|f(t)|^2 = A^2 e^{-\frac{t^2}{2(\Delta t)^2}}$.

Dans le cas où la valeur moyenne $\langle t \rangle = t_0$ n'est pas nulle, on aurait : $|f(t)|^2 = A^2 e^{-\frac{(t-t_0)^2}{2(\Delta t)^2}} = B^2 e^{-\frac{t^2}{2(\Delta t)^2}} e^{\frac{t \cdot t_0}{(\Delta t)^2}}$. En conclusion, pour les fonctions *gaussiennes* du type $t \mapsto Be^{-\alpha t^2} e^{\beta t}$, avec α et β réels, la relation entre Δt et $\Delta\nu$ n'est plus une inégalité, mais une égalité : $\Delta t \cdot \Delta\nu = 1/4\pi$.

2.5 Exemples

Fonction « fenêtre »



$$\tilde{f}(\nu) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-2i\pi\nu t}\mathrm{d}t = \left[\frac{e^{-2i\pi\nu t}}{-2i\pi\nu}\right]_{-\tau/2}^{\tau/2} = \tau\frac{e^{i\pi\nu\tau} - e^{-i\pi\nu\tau}}{2i\pi\nu\tau} = \tau \cdot \mathrm{sinc}(\pi\nu\tau).$$

La fonction sinc est la fonction *sinus cardinal*, définie par $\mathrm{sinc}(X) = \sin X / X$ pour $X \neq 0$ et $\mathrm{sinc}(0) = 1$ (elle est continue en $X = 0$). $\tilde{f}(\nu)$ est ici à valeurs réelles.

Le calcul des écarts-types Δt et $\Delta\nu$ pour des densités de probabilité $t \to |f(t)|^2$ et $\nu \mapsto |\tilde{f}(\nu)|^2$ définies au 2.4 donne $\Delta t = \tau/\sqrt{12}$ et $\Delta\nu \to +\infty$. L'inégalité $\Delta t \cdot \Delta\nu \geq \frac{1}{4\pi}$ est bien vérifiée.

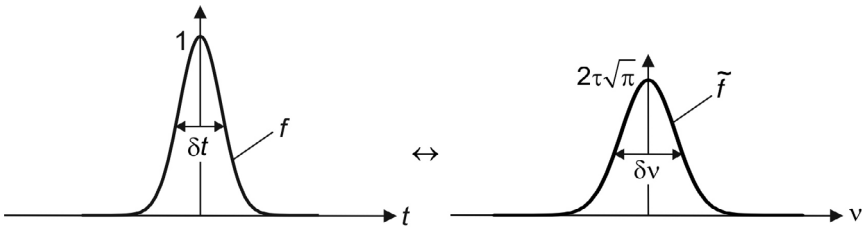
Avec les définitions de la durée $\delta t = \tau$ du signal et de la largeur de bande spectrale $\delta\nu$ données sur la figure ci-dessus, on a $\delta t \cdot \delta\nu = 2$. On retrouve dans tous les cas que plus le signal dure longtemps, plus sa bande spectrale est petite.

Fonction « gaussienne »

C'est la fonction $t \mapsto f(t) = e^{-\frac{t^2}{4\tau^2}}$. Elle obéit à l'équation différentielle : $\frac{df}{dt} + \frac{t}{2\tau^2} f(t) = 0$, dont la T.F donne $2i\pi\nu\tilde{f}(\nu) - \frac{1}{4i\pi\tau^2}\frac{d\tilde{f}}{d\nu} = 0$ en utilisant les propriétés vues au 2.3, soit $\frac{d\tilde{f}}{d\nu} + 8\pi^2\tau^2\nu \cdot \tilde{f}(\nu) = 0$. On obtient $\tilde{f}(\nu) = \tilde{f}(\nu = 0) \cdot e^{-4\pi^2\tau^2\nu^2}$.

Par définition, $\tilde{f}(\nu = 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{4\tau^2}} dt$, or le calcul de $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta u^2} du$ donne $\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}$, donc $\tilde{f}(\nu = 0) = 2\tau\sqrt{\pi}$. Finalement $\tilde{f}(\nu) = 2\tau\sqrt{\pi} \cdot e^{-4\pi^2\tau^2\nu^2}$ est ici à valeurs réelles.

La transformée de Fourier d'une gaussienne est également une gaussienne.



Le calcul des écarts-types Δt et $\Delta\nu$ pour des densités de probabilité $t \to |f(t)|^2$ et $\nu \mapsto |\tilde{f}(\nu)|^2$ définies au 2.4 donne $\Delta t = \tau$ et $\Delta\nu = \frac{1}{4\pi\tau}$. Pour une fonction *f* gaussienne, on a l'égalité $\Delta t \cdot \Delta\nu = \frac{1}{4\pi}$.

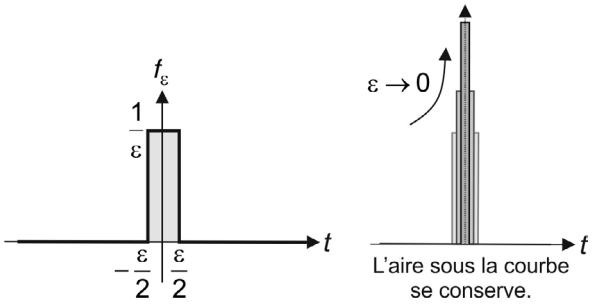
Le calcul des largeurs à mi-hauteur des deux gaussiennes donne $\delta t = 4\tau\sqrt{\ln 2}$ et $\delta\nu = \frac{\sqrt{\ln 2}}{\pi\tau}$ d'où $\delta t \cdot \delta\nu = \frac{4\ln 2}{\pi} \simeq 1$. On retrouve que plus le signal dure longtemps, plus sa bande spectrale est petite.

2.6 Distribution de Dirac δ

Définition

On obtient une telle distribution en prenant la limite des fonctions f_ε, définies sur le graphe ci-après, lorsque $\varepsilon \to 0$. On note $\delta = \lim_{\varepsilon \to 0} f_\varepsilon$.

δ correspond à une impulsion idéale : $\delta(t) = \begin{cases} 0 \text{ pour } t \neq 0 \\ +\infty \text{ pour } t = 0 \end{cases}$.



Comme $\int_{-\infty}^{+\infty} f_\varepsilon(t)\mathrm{d}t = \varepsilon \cdot \frac{1}{\varepsilon} = 1$ (l'aire sous la courbe des fonctions f_ε est la même quel que soit ε), cette propriété reste vraie pour la distribution : $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\mathrm{d}t = 1$.

La distribution de Dirac n'est pas une fonction, car pour une fonction f nulle partout, sauf en $t = 0$, on aurait $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 0$, alors que $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\mathrm{d}t = 1$.

Propriétés

— Si f est une fonction régulière quelconque, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t)\mathrm{d}t = f(0)\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\mathrm{d}t = f(0)$. En effet, puisque $\delta(t \neq 0) = 0$, l'intégrale est la même que pour une fonction constante égale à $f(0)$.

— $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t - t_0)\mathrm{d}t = f(t_0)$.

— La transformée de Fourier de la distribution de Dirac est :

$\nu \mapsto \tilde{\delta}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)e^{-2i\pi\nu t}\mathrm{d}t = 1$. On retrouve qu'un signal de durée nulle possède une largeur spectrale infinie.

— $e^{2i\pi\nu_0 t} = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\nu - \nu_0)e^{2i\pi\nu t}\mathrm{d}\nu$. Comme $f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\nu)e^{2i\pi\nu t}\mathrm{d}\nu$, on en déduit que la transformée de Fourier de $t \mapsto f(t) = e^{2i\pi\nu_0 t}$ vaut $\nu \mapsto \tilde{f}(\nu) = \delta(\nu - \nu_0)$. On retrouve que le spectre d'un signal sinusoïdal (de durée infinie) ne contient qu'une raie pour sa fréquence ν_0. Sa largeur spectrale est nulle.

Ainsi, pour qu'un instrument de musique produise un son le plus sinusoïdal possible, il faut qu'il vibre longtemps. C'est ce que réalise approximativement un diapason.

Néanmoins, la durée d'un signal réel étant forcément finie, sa largeur spectrale peut être faible, mais jamais nulle.

Un signal rigoureusement sinusoïdal n'a donc pas de réalité physique.

— Lorsqu'une fonction est T_0-périodique, elle admet un développement en série de Fourier : $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{2i\pi n\nu_0 t}$, avec $\nu_0 = \frac{1}{T_0}$ et $C_n = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} f(t)e^{-2i\pi n\nu_0 t}\mathrm{d}t$.

Comme la transformée de Fourier de $t \mapsto e^{2i\pi n\nu_0 t}$ est $\nu \mapsto \delta(\nu - n\nu_0)$, celle de f est $\nu \mapsto \tilde{f}(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n\delta(\nu - n\nu_0)$. On retrouve que le spectre d'une fonction périodique est discontinu : c'est un spectre de raies qui ne contient que les fréquences multiples de $\nu_0 = 1/T_0$.

L'amplitude des raies est infinie et proportionnelle aux coefficients $|C_n|$.

Le spectre est par convention la représentation de $2|C_n|$ pour les fréquences $\nu = \nu_0,\ 2\nu_0,\ 3\nu_0,\ldots,\ n\nu_0$, et de $C_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} f(t)\mathrm{d}t = \langle f \rangle$ pour $\nu = 0$.

2.7 Réponse d'un système linéaire à une entrée quelconque

La représentation usuelle d'une grandeur physique est la représentation temporelle. Comme les systèmes linéaires possèdent la propriété de donner à une excitation sinusoïdale une réponse forcée sinusoïdale de même fréquence, on voit tout l'intérêt de la décomposition d'un signal quelconque en une somme de sinusoïdes de fréquences différentes (représentation fréquentielle). On peut, grâce à cette représentation fréquentielle, déterminer la réponse d'un système linéaire à une excitation quelconque.

Soit $t \mapsto R(t)$ la réponse à une entrée $t \mapsto f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\nu)e^{2i\pi\nu t}\mathrm{d}\nu$.

La réponse à une entrée sinusoïdale $t \mapsto e^{2i\pi\nu t}$ est sinusoïdale et de même fréquence : elle s'écrit $t \mapsto H(\nu)e^{2i\pi\nu t}$, où $\nu \mapsto H(\nu)$ est la fonction de transfert du système linéaire, plus souvent notée $\omega \mapsto H(j\omega)$, avec $\omega = 2\pi\nu$.

La linéarité du système implique que la réponse à une somme d'entrées est égale à la somme des réponses : on a $R(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(\nu)\tilde{f}(\nu)e^{2i\pi\nu t}\mathrm{d}\nu$.

Étudions maintenant la réponse à une *impulsion*. On a dans ce cas :

$f(t) = \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\delta}(\nu) e^{2i\pi\nu t} \mathrm{d}\nu$. Comme $\tilde{\delta}(\nu) = 1$, on a $R(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(\nu) e^{2i\pi\nu t} \mathrm{d}\nu$. Ainsi :

$H(\nu) = \tilde{R}(\nu) = \mathrm{TF}\left[t \mapsto R(t)\right](\nu)$. La fonction de transfert d'un système linéaire est égale à la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle.

On peut expérimentalement obtenir la fonction de transfert d'un circuit linéaire à l'aide d'un générateur d'impulsions et d'un analyseur de spectre.

Exciter à l'aide d'une impulsion revient à envoyer des signaux sinusoïdaux de même amplitude pour toutes les fréquences. Cette méthode peut être utilisée dans le domaine de l'acoustique en réalisant l'analyse spectrale de la réponse d'une salle à une impulsion sonore (coup de feu à blanc).

[BOÎTE À OUTILS 4]

CHAMPS ET OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS

1. DÉFINITIONS ET OPÉRATIONS DE BASE

1.1 Définitions

Un *champ de scalaire* $\mathbb{R}^4 \xrightarrow{V} \mathbb{R}$ (par exemple un champ de température) est une fonction du point M et de l'instant t :

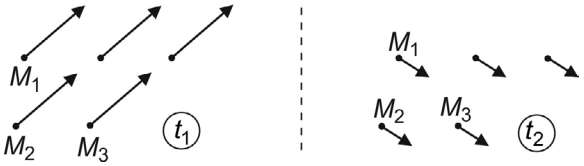
$(M,t) \mapsto V(M,t)$, soit, en coordonnées cartésiennes : $(x,y,z,t) \mapsto V(x,y,z,t)$.

Un *champ de vecteur* $\mathbb{R}^4 \xrightarrow{\vec{A}} \mathbb{R}^3$ (par exemple un champ de force) est une fonction du point M et de l'instant t :

$(M,t) \mapsto \vec{A}(M,t)$, soit, en coordonnées cartésiennes : $(x,y,z,t) \mapsto \vec{A}(x,y,z,t)$.

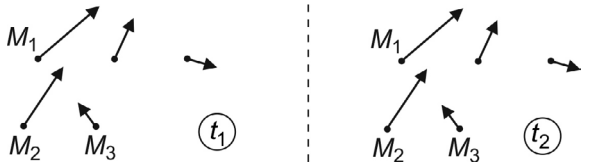
Ces champs peuvent n'être définis que dans un domaine restreint de l'espace.

Un champ est *uniforme* s'il est indépendant du point M. En coordonnées cartésiennes, on a pour un champ uniforme : $\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial z} = 0$, ou $\frac{\partial \vec{A}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial y} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial z} = \vec{0}$, avec $\frac{\partial \vec{A}}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_x}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} \\ \frac{\partial A_z}{\partial x} \end{pmatrix}$, $\frac{\partial \vec{A}}{\partial y} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_x}{\partial y} \\ \frac{\partial A_y}{\partial y} \\ \frac{\partial A_z}{\partial y} \end{pmatrix}$ et $\frac{\partial \vec{A}}{\partial z} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_x}{\partial z} \\ \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_z}{\partial z} \end{pmatrix}$. On peut représenter en quelques points un champ vectoriel uniforme à deux instants différents :



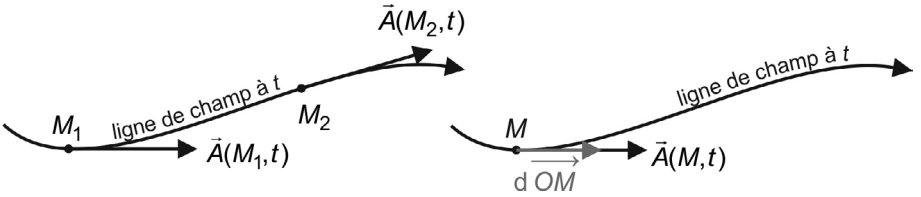
Un champ est *stationnaire* (ou *permanent*) s'il garde la même valeur en un point M donné au cours du temps : $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$, ou $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{0}$, avec en coordonnées cartésiennes :

$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{\partial A_x}{\partial t}\vec{e}_x + \frac{\partial A_y}{\partial t}\vec{e}_y + \frac{\partial A_z}{\partial t}\vec{e}_z$. On peut représenter en quelques points un champ vectoriel stationnaire à deux instants différents :



1.2 Lignes, tubes et cartes de champ pour un champ de vecteur

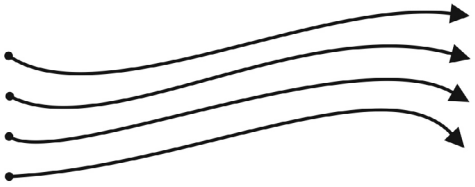
À un instant t fixé, une *ligne de champ* relie les points M tels que le champ $\vec{A}(M,t)$ soit *tangent* à la ligne. On l'oriente dans le sens du champ.



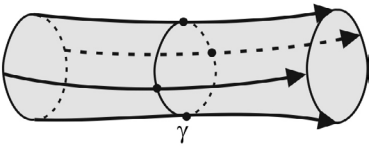
Un déplacement élémentaire $\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$ le long d'une ligne de champ est donc colinéaire au point M à $\vec{A}(M,t)$, soit $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} \wedge \vec{A}(M,t) = \vec{0}$, ce qui fournit un *système d'équations différentielles* permettant de trouver l'équation d'une ligne de champ. Par exemple pour un champ $A_x(x,y,t)\vec{e}_x + A_y(x,y,t)\vec{e}_y$ en coordonnées cartésiennes :

$$\begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} A_x(x,y,t) \\ A_y(x,y,t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A_y(x,y,t)\mathrm{d}x - A_x(x,y,t)\mathrm{d}y = 0\,.$$

Un ensemble de lignes de champ passant par un réseau de points donnés constitue une *carte de champ*.



Carte de champ à t.

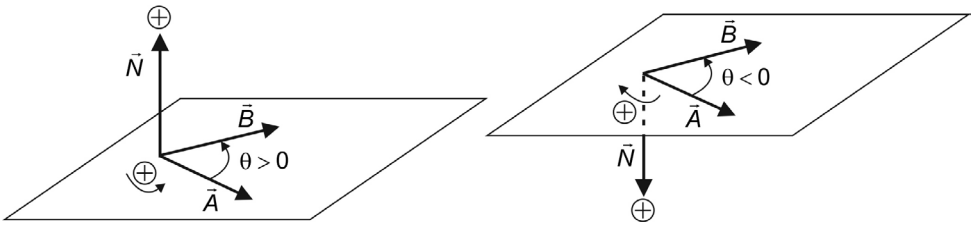


Tube de champ à t.

L'ensemble des lignes de champ qui s'appuient sur un contour fermé γ constitue un *tube de champ* (c'est donc une *surface*).

1.3 Opérations de base sur les vecteurs

Considérons deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ non colinéaires. On peut choisir deux orientations différentes pour un vecteur $\vec{N}$ normal au plan vectoriel engendré par ces deux vecteurs. Lorsqu'on a choisi l'une des deux orientations, l'angle $\theta = (\vec{A}, \vec{B})$ est alors orienté selon la règle du tire-bouchon : $\theta > 0$ si un tire-bouchon se déplace dans le sens du vecteur $\vec{N}$ quand on tourne de $\vec{A}$ vers $\vec{B}$; $\theta < 0$ si un tire-bouchon se déplace dans le sens du vecteur $-\vec{N}$ quand on tourne de $\vec{A}$ vers $\vec{B}$.



— *Produit scalaire* dans une base orthonormée $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$:

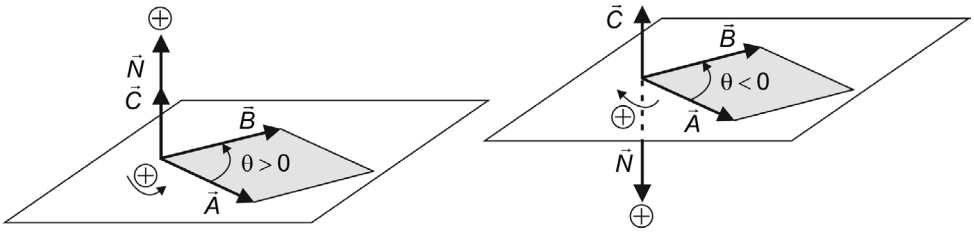
$$V = \vec{A} \cdot \vec{B} = \left\|\vec{A}\right\| \left\|\vec{B}\right\| \cos(\vec{A}, \vec{B}) = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 .$$

— *Produit vectoriel* dans une base orthonormée *directe* $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$: $\vec{e}_3$ est orienté dans le sens de déplacement d'un tire-bouchon quand on tourne de $\vec{e}_1$ vers $\vec{e}_2$.

$$\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_2 B_3 - A_3 B_2 \\ A_3 B_1 - A_1 B_3 \\ A_1 B_2 - A_2 B_1 \end{pmatrix}.$$

$\vec{C}$ est orthogonal à $\vec{A}$ et à $\vec{B}$, et tel que $(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C})$ soit direct. En norme :

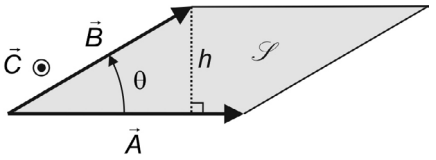
$$\left\|\vec{C}\right\| = \left\|\vec{A}\right\| \cdot \left\|\vec{B}\right\| \cdot \left|\sin(\vec{A}, \vec{B})\right| = \left\|\vec{A}\right\| \cdot \left\|\vec{B}\right\| \cdot \left|\sin\theta\right| .$$



Le signe de la projection C de $\vec{C}$ sur $\vec{N}$ dépend de l'orientation choisie pour $\vec{N}$ comme on le voit sur la figure ci-dessus.

L'aire $\mathscr{S}$ du parallélogramme formé par $\vec{A}$ et $\vec{B}$ vaut $\mathscr{S} = \left\|\vec{A}\right\| \cdot h$ (base × hauteur). On a donc aussi $\mathscr{S} = \left\|\vec{A}\right\| \cdot \left\|\vec{B}\right\| \cdot \left|\sin\theta\right|$:

La norme du produit vectoriel $\vec{A} \wedge \vec{B}$ est égale à l'aire du parallélogramme formé par $\vec{A}$ et $\vec{B}$.



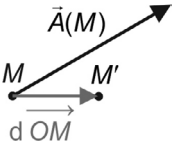
— *Double produit vectoriel* : $\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C})$ est orthogonal à $\vec{B} \wedge \vec{C}$. Il est donc dans le plan vectoriel généré par $\vec{B}$ et $\vec{C}$, soit $\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \beta \vec{B} + \gamma \vec{C}$. On retient alors facilement la formule $\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$.

— Un *produit mixte* $\left[\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}\right] \underset{\text{déf}}{=} (\vec{A} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{C}$ est invariant par permutation circulaire :

$$\left[\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}\right] = (\vec{A} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{C} = (\vec{C} \wedge \vec{A}) \cdot \vec{B} = (\vec{B} \wedge \vec{C}) \cdot \vec{A}.$$

1.4 Circulation d'un champ de vecteur

On définit la circulation d'un champ de vecteur à un instant *t* si le champ n'est pas stationnaire. On omettra le temps *t* dans $\vec{A}(M,t)$ pour ne pas alourdir les notations. Considérons un déplacement élémentaire $\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$ à partir du point *M*.



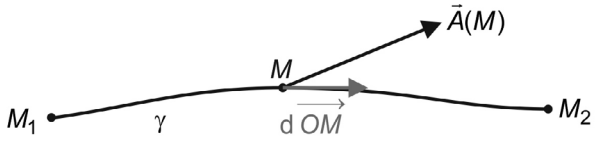
Par définition, la *circulation élémentaire* du champ de vecteur $\vec{A}(M)$ le long de ce déplacement élémentaire est le produit scalaire $\delta\mathscr{C} = \vec{A}(M) \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}$.

Attention ! Ce n'est pas *a priori* une différentielle, c'est-à-dire la variation élémentaire d'une fonction du point *f* : $\delta\mathscr{C} \neq \mathrm{d}f = f(M') - f(M)$, avec $\overrightarrow{MM'} = \mathrm{d}\overrightarrow{OM}$.

Par exemple, le travail élémentaire d'une force $\vec{F}(M)$ s'exerçant sur un point matériel qui se déplace de $\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$ est une circulation : $\delta W = \vec{F}(M) \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}$.

La circulation d'un champ de vecteur le long d'un contour orienté γ allant de M_1 à M_2 est la somme des circulations élémentaires sur ce chemin, et dépend *a priori* du chemin γ choisi pour aller de M_1 à M_2 : $\mathscr{C}^{\gamma}_{M_1 \to M_2} = \int_{M_1}^{M_2} \vec{A}(M) \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}$.

On a en conséquence $\mathscr{C}^{\gamma}_{M_1 \to M_2} = -\mathscr{C}^{\gamma}_{M_2 \to M_1}$.

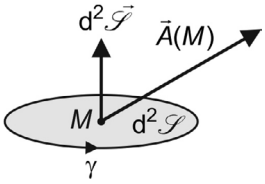


Si γ est fermé, on note $\mathscr{C}^{\gamma} = \oint_{\gamma} \vec{A}(M) \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}$ la circulation, *a priori* $\neq 0$.

1.5 Flux d'un champ de vecteur

On définit le flux d'un champ de vecteur à un instant *t* si le champ n'est pas stationnaire. On omettra de nouveau le temps *t* dans $\vec{A}(M,t)$ pour alléger les notations.

Considérons une surface élémentaire $\mathrm{d}^2\mathscr{S}$ autour d'un point *M*. Cette surface est limitée par un contour élémentaire fermé γ dont l'orientation détermine, grâce à la règle du tire-bouchon, celle du *vecteur surface* $\mathrm{d}^2\vec{\mathscr{S}}$ (de norme $\mathrm{d}^2\mathscr{S}$ et orthogonal à l'élément de surface).



Le *flux élémentaire* du champ $\vec{A}(M)$ à travers $\mathrm{d}^2\mathscr{S}$ est égal au produit scalaire $\mathrm{d}^2\Phi = \vec{A}(M) \cdot \mathrm{d}^2\vec{\mathscr{S}}$. Son signe dépend de l'orientation de $\mathrm{d}^2\vec{\mathscr{S}}$.

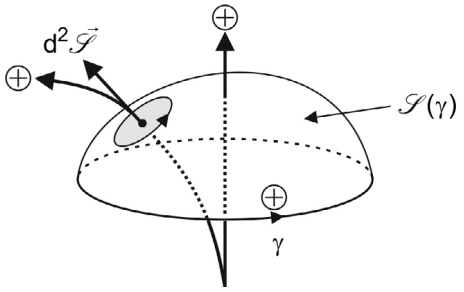
Le flux $\Phi_{\mathscr{S}}$ d'un champ de vecteur à travers une surface finie $\mathscr{S}$ est défini de la façon suivante :

— Si la surface *s'appuie sur un contour fermé* γ orienté :

$$\Phi_{\mathscr{S}} = \iint_{\mathscr{S}(\gamma)} \vec{A}(M) \cdot \mathrm{d}^2\vec{\mathscr{S}}.$$

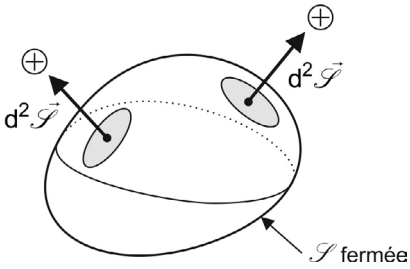
Ce flux dépend *a priori* de la surface $\mathscr{S}$ choisie s'appuyant sur γ.

Comme le montre la figure ci-contre, les vecteurs surface élémentaires sont orientés grâce à la règle du tire-bouchon dès que le contour γ l'est.



— Si la surface $\mathscr{S}$ est *fermée*, tous les vecteurs surface élémentaires sont orientés par convention *de l'intérieur vers l'extérieur*. Le flux du champ $\vec{A}(M)$ est alors noté ainsi :

$$\Phi_{\mathscr{S}} = \oiint_{\mathscr{S}} \vec{A}(M) \cdot \mathrm{d}^2\vec{\mathscr{S}}.$$



2. LES OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS LINÉAIRES

2.1 Gradient

Définition dans un système de coordonnées cartésiennes

L'opérateur gradient, noté $\overrightarrow{\text{grad}}$, est un opérateur linéaire qui s'applique à un champ de *scalaire* $V(M)$ et le transforme en champ de *vecteur* : $\overrightarrow{\text{grad}}V \in \mathbb{R}^3$.

$$\overrightarrow{\text{grad}}V = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial V}{\partial x} \\ \dfrac{\partial V}{\partial y} \\ \dfrac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix}$$ sur la base de coordonnées cartésiennes $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

Remarque : on introduit parfois l'opérateur « *nabla* », noté $\vec{\nabla}$, dont l'expression en coordonnées cartésiennes est $\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$, si bien que $\overrightarrow{\text{grad}}V = \vec{\nabla}V$.

Définition intrinsèque

Lorsqu'on passe du point $M(x,y,z)$ au point $M'(x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y, z+\mathrm{d}z)$ infiniment proche, la fonction V varie de $\mathrm{d}V = \dfrac{\partial V}{\partial x}\mathrm{d}x + \dfrac{\partial V}{\partial y}\mathrm{d}y + \dfrac{\partial V}{\partial z}\mathrm{d}z = \overrightarrow{\text{grad}}V \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}$.

Cette relation fournit la définition *intrinsèque* (indépendante du système de coordonnées choisi) de l'opérateur $\overrightarrow{\text{grad}}$:

Lors d'un déplacement élémentaire $\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$ au voisinage d'un point M, V varie de $\mathrm{d}V$, avec $\mathrm{d}V = (\overrightarrow{\text{grad}}V)(M) \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}$.

Expression dans un système de coordonnées cylindriques

Puisque $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\,\vec{e}_r + r\,\mathrm{d}\theta\vec{e}_\theta + \mathrm{d}z\vec{e}_z$, on a :

$$\mathrm{d}V = \frac{\partial V}{\partial r}\mathrm{d}r + \frac{\partial V}{\partial \theta}\mathrm{d}\theta + \frac{\partial V}{\partial z}\mathrm{d}z = \frac{\partial V}{\partial r}\mathrm{d}r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}r\mathrm{d}\theta + \frac{\partial V}{\partial z}\mathrm{d}z = \overrightarrow{\text{grad}}V \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}.$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}V = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial V}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix} \text{ sur la base } (\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z).$$

Expression dans un système de coordonnées sphériques

Puisque $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\vec{e}_r + r\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta + r\sin\theta\mathrm{d}\varphi\,\vec{e}_\varphi$, on a :

$$\mathrm{d}V = \frac{\partial V}{\partial r}\mathrm{d}r + \frac{\partial V}{\partial \theta}\mathrm{d}\theta + \frac{\partial V}{\partial \varphi}\mathrm{d}\varphi = \frac{\partial V}{\partial r}\mathrm{d}r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}r\mathrm{d}\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}r\sin\theta\mathrm{d}\varphi = \overrightarrow{\text{grad}}V \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}.$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}V = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial V}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial \theta} \\ \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial V}{\partial \varphi} \end{pmatrix} \text{ sur la base } (\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi).$$

Interprétation physique de l'opérateur gradient

$\left\|\overrightarrow{\text{grad}}V\right\|$ calculé au point M « mesure » les variations *spatiales* locales de V : plus V varie fortement au voisinage de M, plus $\left\|\overrightarrow{\text{grad}}V\right\|$ est grand. Le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}}V$ indique la direction et le sens de la plus grande variation locale de V.

2.2 Rotationnel

Définition dans un système de coordonnées cartésiennes

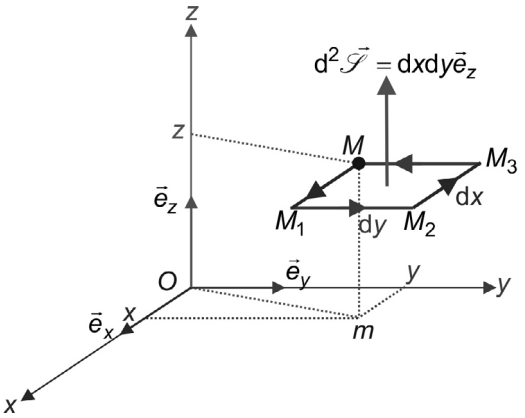
L'opérateur rotationnel, noté $\overrightarrow{\text{rot}}$, est un opérateur linéaire qui s'applique à un champ de *vecteur* $\vec{A}(M)$ et le transforme en champ de *vecteur* : $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} \in \mathbb{R}^3$.

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial A_z}{\partial y} - \dfrac{\partial A_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial A_x}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial A_y}{\partial x} - \dfrac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix} \text{ sur la base } (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z).$$

Remarque : $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$.

Définition intrinsèque

Pour donner une définition intrinsèque de $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}$, on calcule la circulation élémentaire $\delta^2\mathscr{C}$ de $\vec{A}$ le long d'un contour fermé. Ce contour étant élémentaire, peu importe sa forme : on choisit un rectangle de côtés dx et dy.



$\delta^2\mathscr{C} = \vec{A}(M)\cdot\overrightarrow{MM_1} + \vec{A}(M_1)\cdot\overrightarrow{M_1M_2} + \vec{A}(M_2)\cdot\overrightarrow{M_2M_3} + \vec{A}(M_3)\cdot\overrightarrow{M_3M}$. Or :

$\vec{A}(M)\cdot\overrightarrow{MM_1} = \vec{A}(M_1)\cdot\overrightarrow{MM_1}$, puisque $\overrightarrow{MM_1} = dx\vec{e}_x$ est déjà d'ordre 1 en dx, et de même $\vec{A}(M_1)\cdot\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{A}(M_2)\cdot\overrightarrow{M_1M_2}$. On a donc :

$\delta^2\mathscr{C} = \left[\vec{A}(M_1) - \vec{A}(M_2)\right]\cdot dx\vec{e}_x + \left[\vec{A}(M_2) - \vec{A}(M_3)\right]\cdot dy\vec{e}_y$.

$\delta^2\mathscr{C} = \left[-\dfrac{\partial A_x}{\partial y}dy\right]dx + \left[\dfrac{\partial A_y}{\partial x}dx\right]dy = \left[\dfrac{\partial A_y}{\partial x} - \dfrac{\partial A_x}{\partial y}\right]dxdy$, terme d'ordre 2.

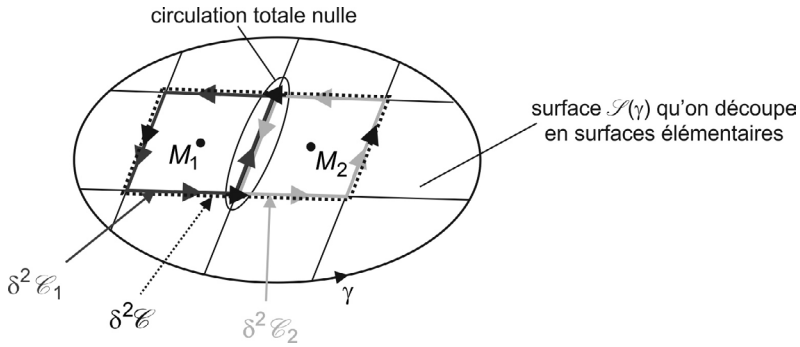
Finalement $\delta^2\mathscr{C} = \left[\left(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}\right)\cdot\vec{e}_z\right]dxdy = \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}\cdot dxdy\vec{e}_z = \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}\cdot d^2\vec{\mathscr{S}}$.

Cette relation fournit la définition *intrinsèque* de l'opérateur $\overrightarrow{\text{rot}}$:

> On considère un contour élémentaire orienté γ au voisinage d'un point M, et $d^2\vec{\mathscr{S}}$ le vecteur surface élémentaire d'une surface quelconque s'appuyant sur γ. La circulation du champ vectoriel $\vec{A}$ sur ce contour est $\delta^2\mathscr{C} = (\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A})(M)\cdot d^2\vec{\mathscr{S}}$.

Théorème de Stokes

On obtient la forme intégrale de cette relation, appelée théorème de Stokes, en découpant en surfaces élémentaires une surface quelconque $\mathscr{S}$ s'appuyant sur un contour fermé γ. On considère deux de ces surfaces élémentaires voisines (elles possèdent un bout de contour commun) autour de M_1 et M_2 :



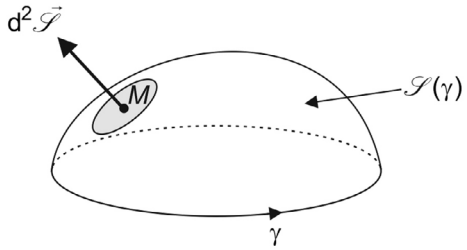
Les contours élémentaires sur lesquels elles s'appuient sont orientés dans le même sens que γ, si bien que la circulation sur le segment commun est comptée avec des signes opposés dans le calcul des circulations élémentaires $\delta^2\mathscr{C}_1$ et $\delta^2\mathscr{C}_2$.

La circulation $\delta^2\mathscr{C}$ sur le contour qui entoure les deux surfaces élémentaires vaut donc $\delta^2\mathscr{C} = \delta^2\mathscr{C}_1 + \delta^2\mathscr{C}_2 = (\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A})(M_1)\cdot \mathrm{d}^2\vec{\mathscr{S}}_1 + (\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A})(M_2)\cdot \mathrm{d}^2\vec{\mathscr{S}}_2$.

En sommant les circulations sur tous les contours élémentaires, on obtient :

$\oint_\gamma \vec{A}\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \iint_{\mathscr{S}(\gamma)} \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}\cdot \mathrm{d}^2\vec{\mathscr{S}}$. C'est le *théorème de Stokes*.

La circulation du champ $\vec{A}$ sur un contour fermé γ est égale au flux de $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}$ sur une surface quelconque $\mathscr{S}(\gamma)$ s'appuyant sur γ.



Grâce à la définition intrinsèque de l'opérateur rotationnel, on trouve, après calculs, les expressions de $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}$ dans d'autres systèmes de coordonnées.

Expression dans un système de coordonnées cylindriques

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial A_z}{\partial \theta} - \dfrac{\partial A_\theta}{\partial z} \\ \dfrac{\partial A_r}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\left[\dfrac{\partial}{\partial r}[rA_\theta] - \dfrac{\partial A_r}{\partial \theta}\right] \end{pmatrix} \text{ sur la base } (\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z).$$

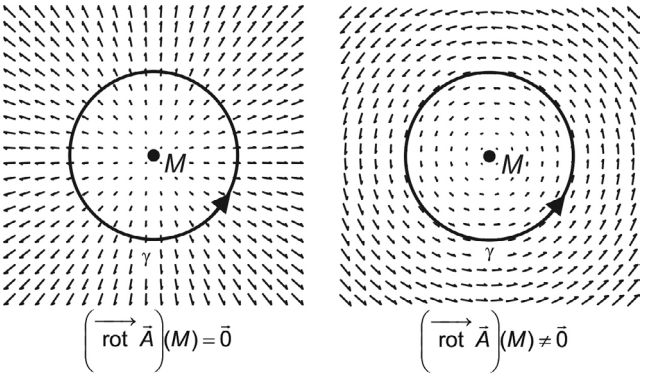
Expression dans un système de coordonnées sphériques

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{r\sin\theta}\left[\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left[A_\varphi \sin\theta\right] - \dfrac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right] \\ \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left[rA_\varphi\right] \\ \dfrac{1}{r}\left[\dfrac{\partial}{\partial r}\left[rA_\theta\right] - \dfrac{\partial A_r}{\partial\theta}\right] \end{pmatrix} \text{ sur la base } (\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi).$$

Interprétation physique de l'opérateur rotationnel

De $\delta^2\mathscr{C} = \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}\cdot \text{d}^2\vec{\mathscr{S}}$ on déduit que $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}$ permet de quantifier le caractère *tourbillonnaire* d'un champ vectoriel au voisinage d'un point *M*.

Prenons l'exemple d'un champ localement radial : $\delta^2\mathscr{C} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} = \vec{0}$, alors que pour un champ orthoradial, $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} \neq \vec{0}$.



$\left(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}\right)(M) = \vec{0}$ $\qquad$ $\left(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}\right)(M) \neq \vec{0}$

2.3 Divergence

Définition dans un système de coordonnées cartésiennes

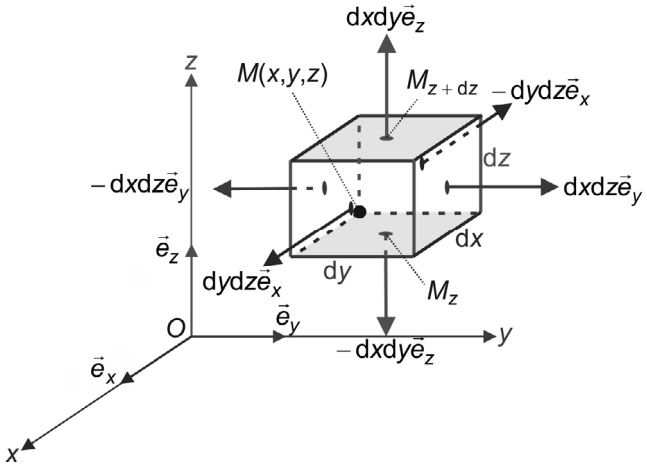
L'opérateur divergence, noté div, est un opérateur linéaire qui s'applique à un champ de vecteur $\vec{A}(M)$ et le transforme en un champ de *scalaire* : $\text{div}\vec{A} \in \mathbb{R}$.

$$\text{div}\vec{A} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

Remarque : $\text{div}\vec{A} = \vec{\nabla}\cdot\vec{A}$.

Définition intrinsèque

Pour donner une définition intrinsèque de $\mathrm{div}\vec{A}$, on calcule le flux $\mathrm{d}^3\Phi$ de $\vec{A}$ à travers une surface fermée élémentaire entourant un volume $\mathrm{d}^3\mathscr{V}$. Ce volume étant élémentaire, peu importe sa forme : on choisit un parallélépipède de côtés dx, dy et dz. On a donc $\mathrm{d}^3\mathscr{V} = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.



Considérons les flux $\vec{A}(M_{z+\mathrm{d}z})\cdot \mathrm{d}x\mathrm{d}y\vec{e}_z$ à travers la surface supérieure (qui se trouve dans le plan de cote $z+\mathrm{d}z$) et $\vec{A}(M_z)\cdot(-\mathrm{d}x\mathrm{d}y\vec{e}_z)$ à travers la surface inférieure (qui se trouve dans le plan de cote z). Leur somme vaut $\left[A_z(M_{z+\mathrm{d}z}) - A_z(M_z)\right]\cdot \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

Les surfaces dxdy étant d'ordre 1 en dx et d'ordre 1 en dy, le calcul de cette somme donne $\dfrac{\partial A_z}{\partial z}\mathrm{d}z\cdot\mathrm{d}x\mathrm{d}y$: elle est d'ordre 3. Le flux *total* vaut donc :

$$\mathrm{d}^3\Phi = \left[\frac{\partial A_x}{\partial x}\mathrm{d}x\right]\cdot\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \left[\frac{\partial A_y}{\partial y}\mathrm{d}y\right]\cdot\mathrm{d}x\mathrm{d}z + \left[\frac{\partial A_z}{\partial z}\mathrm{d}z\right]\cdot\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \left[\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

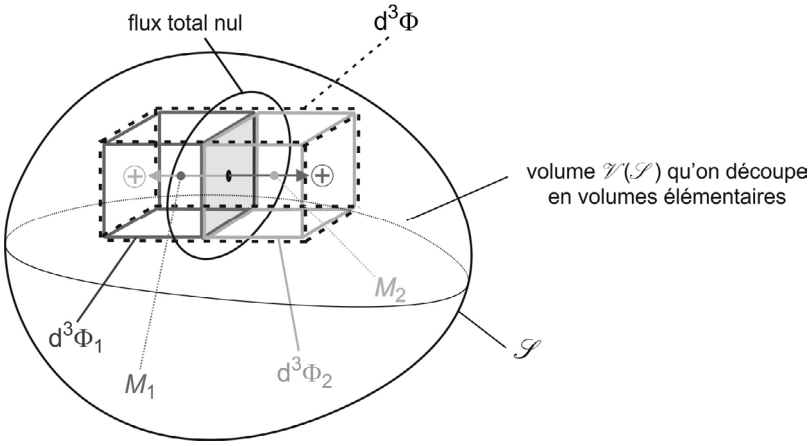
Finalement $\mathrm{d}^3\Phi = \mathrm{div}\vec{A}\,\mathrm{d}^3\mathscr{V}$.

Cette relation fournit la définition *intrinsèque* de l'opérateur div :

> On considère une surface élémentaire fermée entourant un point *M*. On note $\mathrm{d}^3\mathscr{V}$ le volume élémentaire à l'intérieur de cette surface. Le flux $\mathrm{d}^3\Phi$ d'un champ vectoriel $\vec{A}$ à travers cette surface est $\mathrm{d}^3\Phi = (\mathrm{div}\vec{A})(M)\mathrm{d}^3\mathscr{V}$.

Théorème de Green-Ostrogradski

On obtient la forme intégrale de cette relation, appelée théorème de Green-Ostrogradski, en découpant en volumes élémentaires un volume $\mathscr{V}$ à l'intérieur d'une surface fermée $\mathscr{S}$.

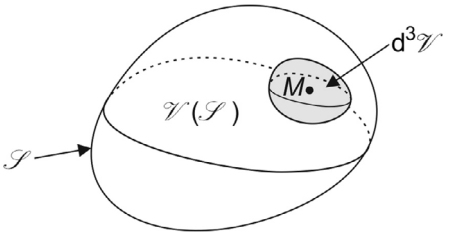


On considère deux de ces volumes élémentaires voisins (ils possèdent une surface commune) autour de M_1 et M_2. Les surfaces élémentaires entourant ces volumes sont orientées de l'intérieur vers l'extérieur, si bien que le flux à travers la surface commune est compté avec des signes opposés dans le calcul des flux élémentaires $d^3\Phi_1$ et $d^3\Phi_2$. Le flux $d^3\Phi$ à travers la surface qui entoure les deux volumes élémentaires vaut donc $d^3\Phi = d^3\Phi_1 + d^3\Phi_2 = (\text{div}\vec{A})(M_1)d^3\mathscr{V}_1 + (\text{div}\vec{A})(M_2)d^3\mathscr{V}_2$.

En sommant les flux à travers toutes les surfaces élémentaires, on obtient :

$\oiint_{\mathscr{S}} \vec{A}\cdot d^2\vec{\mathscr{S}} = \iiint_{\mathscr{V}(\mathscr{S})} \text{div}\vec{A}\, d^3\mathscr{V}$. C'est le théorème de *Green-Ostrogradski.*

Le flux du champ $\vec{A}$ à travers une surface fermée $\mathscr{S}$ est égal à l'intégrale de $\text{div}\vec{A}$ sur le volume $\mathscr{V}(\mathscr{S})$ à l'intérieur de $\mathscr{S}$.



Grâce à la définition intrinsèque de l'opérateur divergence, on trouve après calculs les expressions de $\text{div}\vec{A}$ dans d'autres systèmes de coordonnées.

Expression dans un système de coordonnées cylindriques

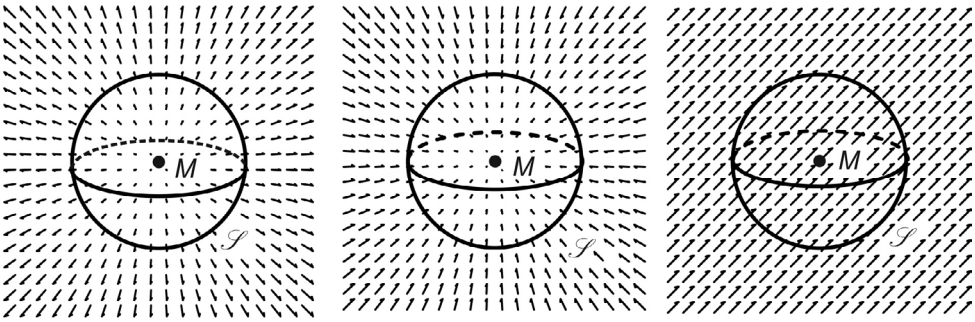
$$\text{div}\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}[rA_r] + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

Expression dans un système de coordonnées sphériques

$$\operatorname{div}\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2 A_r\right] + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[A_\theta \sin\theta\right] + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}.$$

Interprétation physique de l'opérateur divergence

De $\mathrm{d}^3\Phi = \operatorname{div}\vec{A}\,\mathrm{d}^3\mathscr{V}$ on déduit que $\operatorname{div}\vec{A}$ permet de quantifier le caractère *divergent* d'un champ vectoriel au voisinage d'un point *M*. Par exemple pour un champ localement radial et divergent : $\mathrm{d}^3\Phi > 0 \Rightarrow \operatorname{div}\vec{A} > 0$, alors que pour un champ localement radial et convergent : $\operatorname{div}\vec{A} < 0$, et que pour un champ localement uniforme : $\operatorname{div}\vec{A} = 0$. Par souci de lisibilité, le champ n'est représenté ci-dessous que dans un plan passant par *M*.



$(\operatorname{div}\vec{A})(M) > 0$ $(\operatorname{div}\vec{A})(M) < 0$ $(\operatorname{div}\vec{A})(M) = 0$

2.4 Laplacien scalaire

Définition dans un système de coordonnées cartésiennes

L'opérateur laplacien scalaire, noté Δ, est un opérateur linéaire qui s'applique à un champ de scalaire $V(M)$ et le transforme en un champ de *scalaire* $\Delta V \in \mathbb{R}$.

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}.$$

Définition intrinsèque

On a $\Delta V = \operatorname{div}\left[\overrightarrow{\operatorname{grad} V}\right]$, relation qui constitue la définition *intrinsèque* du laplacien de *V*.

Remarque : $\Delta V = \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla} V) = \vec{\nabla}^2 V$.

Grâce à la définition intrinsèque de l'opérateur laplacien scalaire, on trouve les expressions de ΔV dans d'autres systèmes de coordonnées.