CPGE ECT-2

Les MATHÉMATIQUES EXPLIQUÉES *pas à pas*

Adrien FONTAINE
Alexandre GÉLIN

- L'essentiel du cours
- Les méthodes indispensables
- Les exercices d'application
- Les corrections des exercices

NOUVEAUX PROGRAMMES !

ellipses

CPGE ECT-2

Les

MATHÉMATIQUES EXPLIQUÉES

pas à pas



Adrien Fontaine Alexandre Gélin

Professeurs en CPGE ECT

ellipses

Des mêmes auteurs, chez le même éditeur

Les Mathématiques expliquées pas à pas – CPGE ECT-1 –
Programme 2021, 414 pages, 2022

ISBN 9782340-075764
© Ellipses Édition Marketing S.A., 2023
8/10 rue la Quintinie 75015 Paris



Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5.2° et 3°a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

À Michel et Nicolle
A.F.

AVANT-PROPOS

Pour réussir en mathématiques aux concours, il est essentiel de maîtriser les bases acquises en première année. Par ailleurs, disposer d'un catalogue de méthodes, qu'il faut être capable de mobiliser à bon escient et au moment opportun, se révèle indispensable à la réussite aux concours. En reprenant les notions essentielles du programme de première année, tout en suivant scrupuleusement le programme de deuxième année d'ECT, ce livre fournit aux étudiants toutes les clés pour répondre à ces objectifs.

Cet ouvrage est avant tout destiné aux élèves de deuxième année de classe préparatoire ECT. Il pourra également se révéler fort utile aux élèves d'ECG désireux de consolider certaines notions vues en première ou deuxième année de classe préparatoire. Ils pourront par exemple y trouver un complément intéressant sur les séries numériques, les intégrales impropres, les variables aléatoires à densité, et bien d'autres sujets.

Ce livre est constitué de 9 chapitres, suivant une progression classique de deuxième année de classe préparatoire ECT. Chaque chapitre se présente en quatre parties :

- La section « **L'essentiel du cours** » regroupe de manière condensée les résultats les plus importants à connaître, ceux qui serviront lors de la résolution des exercices.
- La section « **Les méthodes indispensables** » présente l'intégralité des méthodes nécessaires à la résolution des exercices. À la suite de chaque méthode se trouve un ou plusieurs exemples d'illustration, expliqués pas à pas.
- La section « **Les exercices d'application** » propose des exercices de difficultés variables, afin de mettre en application les méthodes vues précédemment.
- La section « **Les corrections des exercices** » fournit l'intégralité des corrigés des exercices, rédigés avec soin et de manière la plus détaillée possible.

Ainsi, quel que soit votre profil, ce livre vous fournira les outils nécessaires pour réussir votre deuxième année et aborder les concours avec toutes les chances de réussite.

SOMMAIRE

Index thématique IX

Chapitre 1 – Puissances de matrices 1
L'essentiel du cours 1
Les méthodes indispensables 2
Les exercices d'application 10
Les corrections des exercices 14

Chapitre 2 – Couples de variables aléatoires ... 31
L'essentiel du cours 31
Les méthodes indispensables 33
Les exercices d'application 45
Les corrections des exercices 47

Chapitre 3 – Séries numériques 59
L'essentiel du cours 59
Les méthodes indispensables 61
Les exercices d'application 66
Les corrections des exercices 69

Chapitre 4 – Variables aléatoires discrètes 85
L'essentiel du cours 85
Les méthodes indispensables 88
Les exercices d'application 93
Les corrections des exercices 99

Chapitre 5 – Matrices inversibles 117
L'essentiel du cours 117
Les méthodes indispensables 118
Les exercices d'application 125
Les corrections des exercices 129

Chapitre 6 – Compléments d'intégration 151
L'essentiel du cours 151
Les méthodes indispensables 154
Les exercices d'application 167
Les corrections des exercices 171

Chapitre 7 – Variables aléatoires à densité 197
L'essentiel du cours 197
Les méthodes indispensables 203
Les exercices d'application 211
Les corrections des exercices 216

Chapitre 8 – Réduction de matrices carrées . 241
L'essentiel du cours 241
Les méthodes indispensables 243
Les exercices d'application 251
Les corrections des exercices 254

Chapitre 9 – Suites de variables aléatoires 277
L'essentiel du cours 277
Les méthodes indispensables 278
Les exercices d'application 283
Les corrections des exercices 288

INDEX THÉMATIQUE

1 – Puissances de matrices

- Puissance d'une matrice diagonale
- Puissance d'une matrice quelconque
- Formule du binôme de Newton

2 – Couples de variables aléatoires

- Loi conjointe
- Lois marginales
- Lois conditionnelles
- Indépendance de deux variables aléatoires
- Espérance d'un produit de variables aléatoires
- Covariance et coefficient de corrélation linéaire

3 – Séries numériques

- Somme partielle
- Sommes télescopiques
- Séries convergentes et divergentes
- Séries géométriques

4 – Variables aléatoires discrètes

- Loi de probabilité
- Existences et calculs de l'espérance et de la variance
- Loi géométrique, loi de Poisson

5 – Matrices inversibles

- Matrice inversible
- Inverse d'une matrice diagonale
- Inverse d'une matrice carrée de taille 2
- Calcul de l'inverse par la résolution d'un système linéaire
- Calcul de l'inverse par la méthode du pivot de Gauss

6 – Compléments d'intégration

- Rappels d'intégration sur un segment
- Intégration par parties
- Étude de suites définies par une intégrale
- Intégrales sur $[a, +\infty[$
- Intégrales sur $]-\infty, b]$
- Intégrales sur $]-\infty, +\infty[$

7 – Variables aléatoires à densité

- Densité de probabilité
- Fonction de répartition d'une variable à densité
- Calculs de probabilités
- Existences et calculs de l'espérance et de la variance
- Loi uniforme sur un intervalle, loi exponentielle, loi normale

8 – Réduction de matrices carrées

- Matrice diagonalisable
- Vecteurs propres et valeurs propres
- Polynôme annulateur
- Diagonalisation de matrices

9 – Suites de variables aléatoires

- Estimation ponctuelle
- Intervalle de confiance

1 Puissances de matrices

L'essentiel du cours

Dans ce chapitre, $n \in \mathbb{N}^*$ désigne un entier non nul et on rappelle que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices réelles à n lignes et n colonnes.

Définition 1.1 – Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice **carrée**.
On pose $A^0 = I_n$ et pour tout k dans $\mathbb{N}^*$,

$$A^k = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{k \text{ fois}}.$$



ATTENTION ! Le calcul de A^n **ne** consiste **pas** à élever chaque coefficient de la matrice A à la puissance n.

☞ ***Pour continuer :*** Méthode 1.6.

Remarque – Comme pour les réels où $\forall a \in \mathbb{R}, \quad a^0 = 1$,
toute matrice élevée à la puissance 0 vaut l'élément neutre, à savoir I_n pour les matrices.

Proposition 1.2 – Puissance d'une matrice diagonale

Soit $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}$ une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$D^k = \begin{pmatrix} d_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n^k \end{pmatrix}.$$

Proposition 1.3

Soit une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. S'il existe trois matrices $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telles que $A = PDQ$ et $PQ = QP = I_n$,

alors pour tout entier $k \in \mathbb{N}$,

$$A^k = PD^kQ = P \times \begin{pmatrix} d_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n^k \end{pmatrix} \times Q.$$

☞ ***Pour continuer :*** Méthode 1.7.

Proposition 1.4 – Formule du binôme de Newton

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que A et B **commutent** (*i.e.* $AB = BA$).
Alors pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^{p-k} B^k.$$

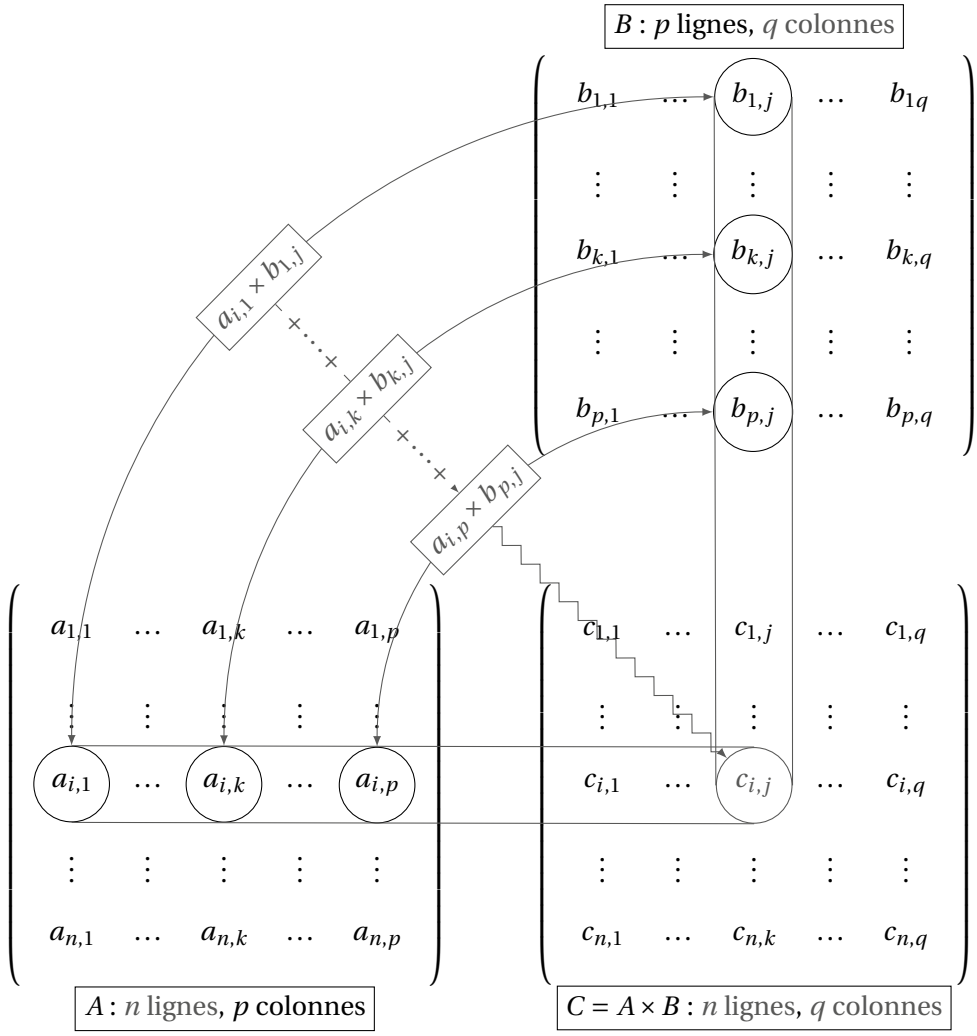
☞ ***Pour continuer :*** Méthode 1.8.

Les méthodes indispensables

Méthode 1.5 – Opérer sur les matrices

- Pour multiplier une matrice par un réel, additionner ou soustraire deux matrices de même taille, on opère coefficient par coefficient.
- Pour multiplier deux matrices entre elles, après avoir vérifié que le nombre de colonnes de la matrice de gauche est égal au nombre de lignes de la matrice de droite, on doit se servir de la ligne correspondante à gauche et de la colonne à droite.

Illustration du produit matriciel :



Application –

1. On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$.

   Calculer $2B - A$ et $I_3 + A + B$.

   Comme il s'agit de deux sommes, je raisonne coefficient par coefficient :

$$2B - A = \begin{pmatrix} 2\times 0 - 1 & 2\times 1 - 0 & 2\times 1 - (-2) \\ 2\times(-1) - 0 & 2\times(-2) - 2 & 2\times(-3) - 3 \\ 2\times 3 - 1 & 2\times 2 - (-1) & 2\times(-4) - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ -2 & -6 & -9 \\ 5 & 5 & -8 \end{pmatrix}$$

$$I_3 + A + B = \begin{pmatrix} 1+1+0 & 0+0+1 & 0+(-2)+1 \\ 0+0+(-1) & 1+2+(-2) & 0+3+(-3) \\ 0+1+3 & 0+(-1)+2 & 1+0+(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

2. Effectuer les produits suivants.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 7 \\ 8 & -3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \\ -3 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 4 & 6 & -3 \\ 2 & -5 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Cette fois, il s'agit de produits. Je dois donc raisonner selon le schéma précédent :

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10+0 & 1-6 \\ 30+0 & 3+12 \\ 0+0 & 0-18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ 30 & 15 \\ 0 & -18 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+4+2 \\ 6+2+0 \\ -2+10+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 7 \\ 8 & -3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \\ -3 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2-9 & 1+0+3 & 4+6+3\sqrt{2} \\ -2-4-21 & -1+0+7 & -4+12+7\sqrt{2} \\ 16+3-6 & 8+0+2 & 32-9+2\sqrt{2} \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} -9 & 4 & 10+3\sqrt{2} \\ -27 & 6 & 8+7\sqrt{2} \\ 13 & 10 & 23+2\sqrt{2} \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 4 & 6 & -3 \\ 2 & -5 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y-4z \\ 4x+6y-3z \\ 2x-5y+z \end{pmatrix}$

☞ ***Pour s'exercer :*** Exercices 1 et 2.

Méthode 1.6 – Calculer la puissance donnée d'une matrice

Pour déterminer l'élévation à une puissance donnée d'une matrice, il suffit d'opérer les produits successivement :

$$A^2 = A \times A, \qquad A^3 = A^2 \times A, \qquad \text{etc.}$$

Il est aussi possible d'utiliser les règles usuelles connues pour les puissances réelles :

$$\forall (r,s) \in \mathbb{N}^2, \quad A^r \times A^s = A^{r+s} \quad \text{et} \quad \left(A^r\right)^s = A^{rs}.$$

Application – Soit A la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Calculer A^3.

Je calcule tout d'abord $A^2 = A \times A$ puis multiplie à nouveau le résultat par A :

$$A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+6 & 2+8 \\ 3+12 & 6+16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$$

$$\text{et} \quad A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7+30 & 14+40 \\ 15+66 & 30+88 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37 & 54 \\ 81 & 118 \end{pmatrix}.$$

Méthode 1.7 – Calculer la puissance k-ième d'une matrice

Pour déterminer la formule de la puissance k-ième d'une matrice, on observe la forme de cette matrice :

- S'il s'agit d'une matrice diagonale, on utilise la Proposition 1.2 et on met chaque coefficient diagonal à la puissance k.
- Si la matrice A se réécrit sous la forme $A = PDQ$ avec D diagonale et $PQ = QP = I_n$, alors cette fois on applique la Proposition 1.3.
  C'est un exercice classique où les étapes sont détaillées pour permettre d'identifier les matrices P, D et Q. *Les Chapitres 5 et 8 permettent de construire ces matrices.*
- Si la matrice n'a pas de forme spéciale, alors on calcule les premières puissances afin de reconnaître une forme particulière, que l'on peut démontrer ensuite par récurrence.

Application –

1. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la puissance n-ième de la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

   Comme la matrice A est diagonale, il suffit d'élever à la puissance n chaque coefficient diagonal. Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad A^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}.$$

2. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la puissance n-ième de la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   Comme la matrice B ne présente pas de forme particulière (bien que la majorité de ses coefficients soient nuls), je commence par calculer B^2 et B^3 puis conjecture une formule pour B^n :

$$B^2 = B \times B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_2.$$

   Dès lors, $B^3 = B^2 \times B = 0_2 \times B = 0_2$ et de la même manière pour tout $n \geqslant 2$,

$$B^n = B^2 \times B^{n-2} = 0_2 \times B^{n-2} = 0_2.$$

3. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la puissance n-ième de la matrice $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   Comme la matrice C ne présente pas de forme particulière (bien que tous ses coefficients soient égaux à 1), je commence par calculer C^2 et C^3 puis conjecture une formule pour C^n :

$$C^2 = C \times C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & 1+1 \\ 1+1 & 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{et} \quad C^3 = C^2 \times C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2 & 2+2 \\ 2+2 & 2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

   Il semble alors que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $C^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$.

   Je démontre cette formule par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

   Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $C^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$.

   Initialisation : Pour $n = 1$, $C^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2^{1-1} & 2^{1-1} \\ 2^{1-1} & 2^{1-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^0 & 2^0 \\ 2^0 & 2^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   Ainsi $\mathcal{P}_1$ est vraie.

   Hérédité : Soit $n \geqslant 1$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi.

   Par hypothèse de récurrence je sais que

$$C^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}.$$

   Alors

$$C^{n+1} = C^n \times C = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n-1}+2^{n-1} & 2^{n-1}+2^{n-1} \\ 2^{n-1}+2^{n-1} & 2^{n-1}+2^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \times 2^{n-1} & 2 \times 2^{n-1} \\ 2 \times 2^{n-1} & 2 \times 2^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n \\ 2^n & 2^n \end{pmatrix}.$$

   Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme elle est héréditaire et vraie pour $n = 1$, alors par principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 1$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad C^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

Application – *Voici l'exemple type d'exercice dans lequel l'utilisation de la Proposition 1.3 est nécessaire, avec tout le cheminement pour arriver à la forme souhaitée.*
On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & -8 \\ 9 & 0 & 8 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer PQ et QP.
   J'effectue les produits matriciels : ☞ *Je souhaite trouver la matrice identité dans les deux cas afin de pouvoir appliquer la proposition souhaitée.*

$$PQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-1 & 1 & 1-1 \\ -1+1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

$$QP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-1 & 1 & -1+1 \\ 1-1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

2. On définit la matrice $D = QAP$. Calculer D.
   J'effectue les produits matriciels : ☞ *Je souhaite cette fois trouver une matrice diagonale, pour la proposition, et parce que la lettre D n'est sûrement pas choisie au hasard.*

$$QA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & -8 \\ 9 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1-8+9 & 0 & -8+8 \\ -1+9 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$D = QA \times P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8-8 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

3. En utilisant que $D = QAP$, en déduire que $A = PDQ$.
   ☞ *Il s'agit ici de retourner l'égalité, afin d'exprimer la matrice A de départ selon la forme souhaitée. Je me sers de la construction de la matrice D de la question précédente.*
   Je sais que $D = QAP$. Ainsi en multipliant à gauche par P et à droite par Q,

$$P \times D \times Q = P \times QAP \times Q = \underbrace{PQ}_{=I_3} \times A \times \underbrace{PQ}_{=I_3} = I_3 \times A \times I_3 = A.$$

   J'ai bien montré que $A = PDQ$.

4. Calculer D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Comme la matrice D est diagonale,

$$D^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0^n & 0 \\ 0 & 0 & 8^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8^n \end{pmatrix}.$$

5. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad A^n = PD^nQ$.

   ☞ *C'est un raisonnement par récurrence des plus classiques, qui se réutilise tel quel puisqu'aucune expression de matrice n'intervient dans la rédaction.*

   Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $\quad A^n = PD^nQ$.

   Initialisation : Pour $n = 0$, $\quad A^0 = I_3 \quad$ et $\quad PD^0Q = PI_3Q = PQ = I_3$.
   Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vraie.

   Hérédité : Soit $n \geqslant 0$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi.

$$A^{n+1} = A^n \times A$$

   avec $A = PDQ$, et par hypothèse de récurrence je sais que $A^n = PD^nQ$.
   Donc

$$A^{n+1} = PD^nQ \times PDQ = PD^n(QP)DQ = PD^nI_3DQ = PD^nDQ = PD^{n+1}Q.$$

   Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

   Conclusion : Comme elle est héréditaire et vraie pour $n = 0$, alors par principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = PD^nQ.$$

6. Calculer A^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
   Je sais désormais que $A^n = PD^nQ$ et je connais l'expression des trois matrices P, D^n et Q. J'effectue alors les produits matriciels :

$$PD^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8^n \\ -(-1)^n & 0 & 8^n \end{pmatrix}$$

$$A^n = PD^n \times Q = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8^n \\ -(-1)^n & 0 & 8^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ -8^n & 0 & -8^n \\ 8^n - (-1)^n & 0 & 8^n \end{pmatrix}.$$

☞ ***Pour s'exercer :*** Exercices 5 à 7.

Méthode 1.8 – Appliquer la formule du binôme de Newton

La formule du binôme de Newton sert à calculer les puissances d'une matrice **à condition que** l'on puisse écrire celle-ci comme la somme de deux matrices qui commutent et dont on sait expliciter les puissances. Le cas le plus fréquent est celui pour lequel la matrice considérée est la somme d'une matrice diagonale et d'une matrice dont les puissances sont nulles à partir d'un certain rang, **et qui commutent**.
Si les puissances deviennent nulles à partir d'un certain rang, alors le nombre de termes non nuls de la somme est fixé et la somme disparaît.

Application – On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Justifier que $A = D + J$.

   Je calcule $D + J$: $D + J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A$.

   J'ai bien montré que $A = D + J$.

2. Calculer J^2. En déduire J^n pour tout $n \geqslant 2$.

   Je calcule J^2 : $J^2 = J \times J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_2$.

   Dès lors pour tout $n \geqslant 2$, $J^n = J^2 \times J^{n-2} = 0_2 \times J^{n-2} = 0_2$.

3. Calculer D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Comme la matrice D est diagonale, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 1^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. À l'aide de la formule du binôme de Newton, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$A^n = D^n + \binom{n}{1} D^{n-1} J.$$

   Tout d'abord, comme les matrices D et J commutent $(D = I_2)$, je peux appliquer la formule du binôme de Newton à la matrice $A = D + J$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = (D + J)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} J^k.$$

   Puis dans cette somme, le terme d'indice k vaut $\binom{n}{k} \times D^{n-k} \times J^k = \binom{n}{k} \times D^{n-k} \times 0_2$ dès lors que $k \geqslant 2$, d'après la question **2.**. Enfin puisque $\binom{n}{0} = 1$ et $J^0 = I_2$, alors

$$A^n = \binom{n}{0} D^n J^0 + \binom{n}{1} D^{n-1} J^1 + \underbrace{\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} J^k}_{=0_2 \text{ car } J^k = 0_2 \text{ pour } k \geqslant 2} = D^n + \binom{n}{1} D^{n-1} J.$$

5. En déduire l'expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\binom{n}{1} = n$ donc

$$A^n = D^n + \binom{n}{1} D^{n-1} J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + n \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & n \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

☞ ***Pour s'exercer :*** Exercices 8 à 10.

Les exercices d'application

Exercice 1 (⋆) – On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 9 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

Déterminer les matrices : $A+B$, $A-B$, $2(A-2I_3)$, $2I_3-B$ et $-3A+2B-I_3$.

Exercice 2 (⋆) – Calculer les produits matriciels suivants.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & -4 & 5 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Exercice 3 (⋆⋆) – On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer AB et BA.
2. Montrer que pour toutes matrices $U \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $V \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on a l'équivalence

$$AU = V \iff U = BV.$$

   Indication : Raisonner par double implication.

3. Résoudre le système suivant.

$$\begin{cases} 2x + 4y + z = 1 \\ 2x + 5y + z = 2 \\ x + 2y + z = 3 \end{cases}$$

Exercice 4 (⋆⋆) – Soient x, y et z des réels. Déterminer l'ensemble des triplets (x, y, z) vérifiant

$$x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5 (⋆⋆⋆) – Dans chacun des cas suivants, calculer A^2, A^3, A^4 puis A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 6 (⋆ ⋆ ⋆) – On considère les trois matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $P \times Q$ et $Q \times P$.
2. Vérifier que $QAP = D$, avec $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
3. Montrer que $A = PDQ$.
4. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = PD^nQ$.
5. Calculer A^n.

Exercice 7 (⋆ ⋆ ⋆) – On considère les trois matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{8}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{2}{10} & \frac{9}{10} \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

1. Calculer $P \times Q$ et $Q \times P$.
2. Vérifier que $D = QAP$ est une matrice diagonale que l'on précisera.
3. Montrer que $A = PDQ$.
4. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}, \quad A^n = PD^nQ$.
5. En déduire l'expression de A^n en fonction de n.

Exercice 8 (⋆ ⋆ ⋆) – On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = A - 2I_3$.

1. Calculer B et B^2.
2. Rappeler la formule du binôme de Newton.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = 2^n I_3 + n2^{n-1}B$.

Exercice 9 (⋆ ⋆ ⋆) – On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

1. (a) Déterminer la matrice J telle que $A = I_3 + J$.
   (b) Calculer J^2 et J^3 puis démontrer que pour tout entier $n \geqslant 3$, $J^n = 0_3$.
2. En utilisant la formule du binôme de Newton, montrer que pour tout entier $n \geqslant 3$,
$$A^n = I_3 + nJ + \frac{n(n-1)}{2} J^2.$$
3. En déduire l'expression de A^n pour tout entier $n \geqslant 3$.

Exercice 10 (⋆ ⋆ ⋆) – On considère les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par leurs premiers termes $u_0 \in \mathbb{R}$ et $v_0 \in \mathbb{R}$ et les relations de récurrence
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 4u_n - v_n \quad \text{et} \quad v_{n+1} = u_n + 2v_n.$$

1. Déterminer la matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \times \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.
2. Montrer que A s'écrit sous la forme $A = 3I_2 + J$, où J est une matrice à déterminer.
3. Vérifier que $J^2 = 0_2$, puis à l'aide de la formule du binôme de Newton, en déduire l'expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Montrer que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$.
5. En déduire les expressions de u_n et v_n en fonction de n, u_0 et v_0.

Exercice 11 (⋆ ⋆ ⋆) – [**ECRICOME 2015 – Ex1**]

Partie I : Calcul matriciel

On considère les trois matrices :
$$M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = QMQ.$$

1. Calculer $Q \times Q$.
2. Calculer D. (*On vérifiera que D est une matrice diagonale.*)
   Justifier que $M = QDQ$.
3. Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $M^n = QD^nQ$.
4. Expliciter les neuf coefficients de la matrice M^n.

Partie II : Étude d'une expérience

On dispose de deux pièces de monnaie équilibrées, c'est-à-dire que la probabilité d'obtenir PILE en lançant l'une des deux pièces vaut $\frac{1}{2}$.
On effectue des lancers selon le protocole suivant :

- à l'étape 1, on lance les deux pièces,
- à l'étape 2, on lance les pièces ayant amené PILE à l'étape 1 (s'il en existe),
- à l'étape 3, on lance les pièces ayant amené PILE à l'étape 2 (s'il en existe),

et ainsi de suite. On suppose que les lancers successifs éventuels d'une même pièce sont indépendants et que les deux pièces sont indépendantes l'une de l'autre.
On considère, pour tout entier naturel n non nul, les événements

- A_n : « obtenir 0 fois PILE à l'étape n »,
- B_n : « obtenir 1 fois PILE à l'étape n »,
- C_n : « obtenir 2 fois PILE à l'étape n »,

et on note $a_n = P(A_n)$, $b_n = P(B_n)$ et $c_n = P(C_n)$.

1. Calculer a_1, b_1 et c_1.
2. Soit n un entier naturel non nul.
   Calculer les trois probabilités conditionnelles $\mathrm{P}_{A_n}(A_{n+1})$, $\mathrm{P}_{B_n}(A_{n+1})$ et $\mathrm{P}_{C_n}(A_{n+1})$.
   (*Un argumentaire est attendu pour expliquer les valeurs de chacune de ces probabilités.*)
3. À l'aide de la formule des probabilités totales, prouver que pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{2}b_n + \dfrac{1}{4}c_n \\ b_{n+1} = \dfrac{1}{2}b_n + \dfrac{1}{2}c_n \\ c_{n+1} = \dfrac{1}{4}c_n \end{cases}$$

4. (a) Vérifier que pour tout entier $n \geqslant 1$, $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$

   où la matrice M est celle définie dans la Partie I.

   (b) Démontrer par récurrence que pour tout $n \geqslant 1$, $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$.

5. (a) En déduire que

$$\forall n \geqslant 1, \quad \mathrm{P}(A_n) = 1 - \frac{2}{2^n} + \frac{1}{4^n}, \qquad \mathrm{P}(B_n) = \frac{2}{2^n} - \frac{2}{4^n} \quad \text{et} \quad \mathrm{P}(C_n) = \frac{1}{4^n}.$$

   (b) Vérifier que la somme de ces trois probabilités est égale à 1 et donner la limite de chacune d'elles.

Les corrections des exercices

Exercice 1 – Les trois matrices A, B et I_3 sont de même taille et il ne s'agit là que de sommes, différences ou produits par un réel. Je raisonne donc coefficient par coefficient.

1. $A+B=\begin{pmatrix}1&-1&0\\2&9&-4\\0&1&-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\-1&-2&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+1&-1+2&0+3\\2+2&9+4&-4+6\\0-1&1-2&-3-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&3\\4&13&2\\-1&-1&-6\end{pmatrix}$

2. $A-B=\begin{pmatrix}1&-1&0\\2&9&-4\\0&1&-3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\-1&-2&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-1&-1-2&0-3\\2-2&9-4&-4-6\\0+1&1+2&-3+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-3&-3\\0&5&-10\\1&3&0\end{pmatrix}$

3. Je calcule la parenthèse avant de multiplier le tout par 2 :

$$A-2I_3=\begin{pmatrix}1&-1&0\\2&9&-4\\0&1&-3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-2&-1&0\\2&9-2&-4\\0&1&-3-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-1&0\\2&7&-4\\0&1&-5\end{pmatrix}.$$

$$\text{Puis } 2(A-2I_3)=2\times\begin{pmatrix}-1&-1&0\\2&7&-4\\0&1&-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\times(-1)&2\times(-1)&2\times0\\2\times2&2\times7&2\times(-4)\\2\times0&2\times1&2\times(-5)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&-2&0\\4&14&-8\\0&2&-10\end{pmatrix}$$

4. $2I_3-B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\-1&-2&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-1&-2&-3\\-2&2-4&-6\\1&2&2+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-2&-3\\-2&-2&-6\\1&2&5\end{pmatrix}$

5. $-3A+2B-I_3=\begin{pmatrix}-3&3&0\\-6&-27&12\\0&-3&9\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&4&6\\4&8&12\\-2&-4&-6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&7&6\\-2&-20&24\\-2&-7&2\end{pmatrix}$

Exercice 2 – Je calcule les produits matriciels. Chaque coefficient de la matrice produit est la somme de produits de deux coefficients des matrices de départ.

1. $\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&0&2\\0&2&4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2&3&-1\\-1&-4&5\\2&3&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-2+6&3-8+9&-1+10-3\\-2+4&-3+6&1-2\\-2+8&-8+12&10-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&4&6\\2&3&-1\\6&4&6\end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix}1&1\\2&4\\-1&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+1&-1&2\\2+4&-2&8\\-1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1&2\\6&-2&8\\-1&1&0\end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{2}\\0&2&-1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\\\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\\2-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

Exercice 3 –

1. Je calcule le produit AB :

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-4-1 & -4+4 & -2+2 \\ 6-5-1 & -4+5 & -2+2 \\ 3-2-1 & -2+2 & -1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3.$$

De même, le produit BA vaut :

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-4-1 & 12-10-2 & 3-2-1 \\ -2+2 & -4+5 & -1+1 \\ -2+2 & -4+4 & -1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3.$$

2. Soient deux matrices $U \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $V \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
   - Je suppose que $AU = V$. Alors en multipliant à gauche par B, j'obtiens $BAU = BV$. Or j'ai vu à la question précédente que $BA = I_3$. Donc $I_3U = BV$. Puisque $I_3U = U$, alors j'aboutis à $U = BV$, qui est le résultat que je souhaitais obtenir.
   - Je suppose que $U = BV$. Alors en multipliant à gauche par A, j'obtiens $AU = ABV$. Or j'ai vu à la question précédente que $AB = I_3$. Donc $AU = I_3V$. Puisque $I_3V = V$, alors j'aboutis à $AU = V$, qui est le résultat que je souhaitais obtenir.

   En conclusion, j'ai bien montré l'équivalence

$$AU = V \quad \Longleftrightarrow \quad U = BV.$$

3. Le système peut se réécrire sous la forme matricielle $AU = V$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

   D'après la question précédente, la solution du système $AU = V$ est donnée par le produit matriciel $U = BV$. Il ne me reste plus qu'à calculer U :

$$U = BV = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-4-3 \\ -1+2 \\ -1+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

   Ainsi la solution du système est donnée par $\big(-4, 1, 5\big)$.

Exercice 4 – Je commence par calculer la matrice :

$$x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ 3x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4y \\ 5y \\ 6y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7z \\ 8z \\ 9z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+4y+7z \\ 2x+5y+8z \\ 3x+6y+9z \end{pmatrix}.$$

Alors pour résoudre l'équation matricielle, je résous simultanément les trois équations réelles :

$$x\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}x+4y+7z\\2x+5y+8z\\3x+6y+9z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 4y & + & 7z & = & 0\\ 2x & + & 5y & + & 8z & = & 0\\ 3x & + & 6y & + & 9z & = & 0\end{array}\right.$$

Il s'agit d'un système linéaire que je résous en utilisant des opérations élémentaires.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 4y & + & 7z & = & 0\\ 2x & + & 5y & + & 8z & = & 0\\ 3x & + & 6y & + & 9z & = & 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 4y & + & 7z & = & 0\\ & & -3y & - & 6z & = & 0\\ 3x & + & 6y & + & 9z & = & 0\end{array}\right. \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 4y & + & 7z & = & 0\\ & & -3y & - & 6z & = & 0\\ & & -6y & - & 12z & = & 0\end{array}\right. \quad L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 4y & + & 7z & = & 0\\ & & -3y & - & 6z & = & 0\\ & & & & 0 & = & 0\end{array}\right. \quad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$$

Comme la troisième ligne s'annule par opérations élémentaires avec les deux premières, je conclus qu'il y a une infinité de solutions.

Je fixe alors $z \in \mathbb{R}$. La deuxième équation me donne $y = \dfrac{6}{-3}z = -2z$.

Puis la première équation devient $x - 8z + 7z = 0 \iff x - z = 0 \iff x = z$. Ainsi

$$\mathcal{S} = \Big\{(z, -2z, z) \mid z \in \mathbb{R}\Big\}.$$

Par exemple pour $z = 1$, j'obtiens la solution $(1, -2, 1)$.

Exercice 5 –

1. Soit $A = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. Je calcule les premières puissances de A :

$$A^2 = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} = -I_2, \qquad A^3 = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix} = -A \quad \text{et} \quad A^4 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = I_2.$$

   À partir de ce moment, je remarque que les puissances successives de la matrice A vont boucler. En effet puisque A^4 est la matrice identité, alors $A^5 = A^4 \times A = I_2 \times A = A$ et les puissances suivantes vont reprendre le même cycle de longueur 4. En effet,

   - si $n = 4k$ avec $k \in \mathbb{N}$, alors $A^n = I_2$,
   - si $n = 4k+1$ avec $k \in \mathbb{N}$, alors $A^n = A$,
   - si $n = 4k+2$ avec $k \in \mathbb{N}$, alors $A^n = -I_2$,
   - si $n = 4k+3$ avec $k \in \mathbb{N}$, alors $A^n = -A$.

2. Soit $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}$. Je calcule les premières puissances de A :

$$A^2=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&0&0\\2&0&2\end{pmatrix},\qquad A^3=\begin{pmatrix}4&0&4\\0&0&0\\4&0&4\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad A^4=\begin{pmatrix}8&0&8\\0&0&0\\8&0&8\end{pmatrix}.$$

En observant les premiers termes, je conjecture que pour tout entier $n\geqslant 1$,

$$A^n=\begin{pmatrix}2^{n-1}&0&2^{n-1}\\0&0&0\\2^{n-1}&0&2^{n-1}\end{pmatrix}.$$

Je démontre alors ce résultat par récurrence sur $n\in\mathbb{N}^*$.

Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $A^n=\begin{pmatrix}2^{n-1}&0&2^{n-1}\\0&0&0\\2^{n-1}&0&2^{n-1}\end{pmatrix}$.

Initialisation : Pour $n=1$,

$$A^1=A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad\begin{pmatrix}2^{1-1}&0&2^{1-1}\\0&0&0\\2^{1-1}&0&2^{1-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}.$$

Ainsi $\mathcal{P}_1$ est vraie.

Hérédité : Soit $n\geqslant 1$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi.
Par hypothèse de récurrence, je sais que

$$A^n=\begin{pmatrix}2^{n-1}&0&2^{n-1}\\0&0&0\\2^{n-1}&0&2^{n-1}\end{pmatrix}.$$

Alors

$$A^{n+1}=A^n\times A=\begin{pmatrix}2^{n-1}&0&2^{n-1}\\0&0&0\\2^{n-1}&0&2^{n-1}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^{n-1}+2^{n-1}&0&2^{n-1}+2^{n-1}\\0&0&0\\2^{n-1}+2^{n-1}&0&2^{n-1}+2^{n-1}\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}2\times 2^{n-1}&0&2\times 2^{n-1}\\0&0&0\\2\times 2^{n-1}&0&2\times 2^{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^n&0&2^n\\0&0&0\\2^n&0&2^n\end{pmatrix}.$$

Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme elle est héréditaire et vraie pour $n=1$, alors par principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n\geqslant 1$, *i.e.*

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad A^n=\begin{pmatrix}2^{n-1}&0&2^{n-1}\\0&0&0\\2^{n-1}&0&2^{n-1}\end{pmatrix}.$$

3. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Je calcule les premières puissances de A :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En observant les premiers termes, je conjecture que pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Je démontre alors ce résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Initialisation : Pour $n = 1$,

$$A^1 = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi $\mathcal{P}_1$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geqslant 1$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi.
Par hypothèse de récurrence, je sais que

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors
$$A^{n+1} = A^n \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme elle est héréditaire et vraie pour $n = 1$, alors par principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 1$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarque : La propriété est même vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ puisque lorsque $n = 0$,

$$A^0 = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6 –

1. Je calcule le produit matriciel $P \times Q$:

$$P \times Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 & 1-1 & 0 \\ -2+2 & -1+2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3.$$

   De même, je calcule le produit $Q \times P$:

$$Q \times P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 & 0 & 2-2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1+1 & 0 & -1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3.$$

2. J'opère le produit QAP en deux étapes :

$$QA = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3+2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$QAP = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-2 & 0 & 4-4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1+1 & 0 & -1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Je retrouve bien la matrice D de l'énoncé donc $D = QAP$.

3. Grâce à la question précédente, je sais que $QAP = D$. Ainsi en multipliant à gauche par P et à droite par Q, j'obtiens que

$$P \times D \times Q = P \times QAP \times Q = \underbrace{PQ}_{=I_3} \times A \times \underbrace{PQ}_{=I_3} = I_3 \times A \times I_3 = A.$$

   J'ai bien montré que $A = PDQ$.

4. Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

   Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $A^n = PD^nQ$.

   Initialisation : Pour $n = 0$, $A^0 = I_3$ et $PD^0Q = PI_3Q = PQ = I_3$.
   Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vraie.

   Hérédité : Soit $n \geqslant 0$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi.

$$A^{n+1} = A^n \times A$$

   avec $A = PDQ$, et par hypothèse de récurrence je sais que $A^n = PD^nQ$.
   Donc

$$A^{n+1} = PD^nQ \times PDQ = PD^n(QP)DQ = PD^nI_3DQ = PD^nDQ = PD^{n+1}Q.$$

   Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme elle est héréditaire et vraie pour $n = 0$, alors par principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = PD^nQ.$$

5. Je sais désormais que $A^n = PD^nQ$ et je connais l'expression des trois matrices P, D et Q. Je n'ai plus qu'à calculer la puissance n-ième de D, facilement puisqu'il s'agit d'une matrice diagonale, puis effectuer les produits matriciels.
Comme la matrice D est diagonale,

$$D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & 1^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$PD^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 1 \\ -2^n & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^n = PD^n \times Q = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 1 \\ -2^n & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1}-1 & 2^n-1 & 0 \\ 2-2^{n+1} & 2-2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7 –

1. Je calcule le produit matriciel $P \times Q$:

$$P \times Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}+\frac{2}{3} & \frac{1}{3}-\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3}-\frac{2}{3} & \frac{2}{3}+\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

De même, je calcule le produit $Q \times P$:

$$Q \times P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}+\frac{2}{3} & \frac{1}{3}-\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3}-\frac{2}{3} & \frac{2}{3}+\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

2. J'opère le produit QAP en deux étapes :

$$QA = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{8}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{2}{10} & \frac{9}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{30}+\frac{2}{30} & \frac{1}{30}+\frac{9}{30} \\ \frac{16}{30}-\frac{2}{30} & \frac{2}{30}-\frac{9}{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{14}{30} & -\frac{7}{30} \end{pmatrix}$$

$$D = QA \times P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{14}{30} & -\frac{7}{30} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}+\frac{2}{3} & \frac{1}{3}-\frac{1}{3} \\ \frac{14}{30}-\frac{14}{30} & \frac{14}{30}+\frac{7}{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{7}{10} \end{pmatrix}.$$

Ainsi $D = QAP$ est bien une matrice diagonale.