

L'intégrale

ECG

2^e année

**NOUVEAU
PROGRAMME**

Mathématiques appliquées Informatique

► **QUESTIONS ET METHODES**

Coordonné par Olivier Sarfati

Olivier Sarfati

Diplômé d'HEC, directeur de MyPrepa
et professeur chez MyPrepa

Paul-Louis Donnard

Diplômé d'HEC et de Polytechnique, enseignant
chez MyPrepa

Baptiste Frelot

Diplômé d'HEC, enseignant chez MyPrepa

Antoine Lagarde

Diplômé d'HEC et des Mines de Paris, enseignant
chez MyPrepa

Florian Marty

Agrégé de mathématiques, enseignant au lycée
Saliège en voie ECC

Fabio Russo

Enseignant chez MyPrepa, diplômé de l'ESSEC

DUNOD

Couverture :

- Direction artistique : Nicolas Wiel
- Conception graphique : Pierre-André Gualino et Julie Coinus

© Dunod, 2022

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff

www.dunod.com

ISBN 978-2-10-084557-6

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Comment utiliser cet ouvrage ?

L'ouvrage que vous tenez entre les mains fait la **synthèse de 40 ans de sujets de concours** en adoptant un **parti pris original** : présenter la très **grande majorité des questions qui tombent aux concours** et les décrypter à l'aide des **méthodes les plus fréquemment mobilisées**. Les **rappels de cours systématiquement mis en avant** couvrent la totalité du programme et vous donnent l'occasion de les **apprendre « en situation »**. Ainsi, un(e) candidat(e) qui maîtrisera sur le bout des doigts tout ce qui suit ne sera pas surpris aux concours.

Pour faire une utilisation optimale de l'ouvrage et ainsi maximiser vos progrès, voici quelques **conseils précieux** que nous vous invitons vivement à respecter :

- **La maîtrise de cet ouvrage doit se faire en complément de l'apprentissage du cours de votre professeur.** Bien utilisé, il vous aidera à digérer les notions que vous aurez vues en classe.
- **Annotez le sommaire présent au début de chaque chapitre afin de cadrer au mieux vos séances de travail** : cochez les questions parfaitement maîtrisées, celles qu'il vous faudra reprendre et rajoutez un code couleur par niveau de difficulté. Les exercices difficiles sont signalés par un ♠, abordez-les une fois que vous êtes suffisamment à l'aise sur le chapitre.
- **Annotez également le cœur des différents chapitres en vous servant des marges sur le côté de chaque page** : vos notes manuscrites (par exemple code couleurs par niveau de difficulté, timing, astuce à retenir, méthodes à revoir) vous permettront de mieux suivre votre progression et ainsi optimiser vos séances de travail. En moyenne, vous devriez refaire chacune des questions 2 à 3 fois pendant votre deuxième année.
- **Forcez-vous à recopier les rappels de cours** en rouge avant de faire les exercices relatifs à une méthode : c'est comme cela que vous assimilerez le plus rapidement le cours et ses enjeux.
- Lors de vos recherches d'exercices ou de devoirs maison donnés par votre professeur, si vous butez sur une question, **utilisez la table des matières du chapitre en jeu pour aller identifier une question** qui s'en rapproche et faites toutes les méthodes et exercices proposés pour y répondre. Vous trouverez ainsi plus facilement réponse à toutes les questions qui vous seront posées dans les exercices de votre professeur de prépa.
- Avant chaque DS important ou concours blanc, **entraînez-vous sur les sujets de fin de chapitre souvent issus des concours de la BCE et ECRICOME.**
- **Ne négligez aucun chapitre, aucune question, aucune méthode** : à la fin de votre deuxième année, idéalement, tout doit être maîtrisé.

Enfin, même si cet ouvrage s'utilise comme un **dictionnaire de méthodes** et vous fera gagner beaucoup de temps et de points aux concours, il n'est pas un livre de recettes : il ne vous exonère pas de **réfléchir** et de **profondément comprendre les concepts et objets mathématiques** que vous manipulerez et que vous aurez vus avec votre professeur de prépa.

En espérant que vous prendrez autant de plaisir à naviguer dans l'ouvrage que nous en avons pris à le concevoir et le rédiger.

Bonne continuation.

Les auteurs

Sommaire

Partie I. Algèbre

Chapitre 1. Espaces vectoriels.	11
1.1. Sous-espaces vectoriels	13
1.2. Familles libres, génératrices et bases	20
1.3. Dimension d'un espace vectoriel	40
1.4. Exercices corrigés	49
1.5. Corrigés des exercices	51
Chapitre 2. Applications linéaires.	57
2.1. Propriétés des applications linéaires	59
2.2. Noyau, image et rang	79
2.3. Matrice représentative d'une application linéaire	94
2.4. Changement de base	99
2.5. Calculs liés aux applications linéaires	109
2.6. Stabilité d'un sous-espace vectoriel	118
2.7. Matrices semblables	119
2.8. Exercices corrigés	122
2.9. Corrigés des exercices	124
Chapitre 3. Diagonalisation et réduction de matrices	133
3.1. Valeurs propres	135
3.2. Vecteurs propres	158
3.3. Sous-espaces propres	165
3.4. Diagonalisabilité	170
3.5. Exercices corrigés	184
3.6. Corrigés des exercices	186
Chapitre 4. Systèmes différentiels linéaires et chaînes de Markov	197
4.1. Systèmes différentiels linéaires	199
4.2. Graphes probabilistes et chaînes de Markov	211
4.3. Exercices corrigés	236
4.4. Corrigés des exercices	239

Partie II. Analyse

Chapitre 5. Compléments d'analyse	249
5.1. Etude asymptotique des suites et des fonctions	251

5.2. Etude des suites de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$	.265
5.3. Convergence et divergence d'une série	.270
5.4. Convergence et divergence d'une intégrale impropre	.284
5.5. Exercices corrigés	.293
5.6. Corrigés des exercices	.296
Chapitre 6. Fonctions réelles de deux variables	305
6.1. Théorèmes généraux sur une partie de $\mathbb{R}^2$	.307
6.2. Recherche d'extrema sur un ouvert	.314
6.3. Recherche d'extrema sur un fermé borné	.322
6.4. Exercices corrigés	.330
6.5. Corrigés des exercices	.331
 Partie III. Probabilités 	
Chapitre 7. Variables aléatoires à densité	341
7.1. Existence d'une variable aléatoire à densité	.345
7.2. Fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité	.349
7.3. Densité d'une variable aléatoire à densité	.355
7.4. Loi d'une variable aléatoire à densité	.364
7.5. Espérance et variance d'une variable aléatoire à densité	.372
7.6. Exercices corrigés	.381
7.7. Corrigés des exercices	.383
Chapitre 8. Loi de couple et compléments sur les variables aléatoires . .	389
8.1. Loi de couple et loi de fonction de variables aléatoires	.392
8.2. Compléments sur l'espérance	.410
8.3. Indépendance, variance, covariance	.420
8.4. Statistiques bivariées	.438
8.5. Exercices corrigés	.447
8.6. Corrigés des exercices	.449
Chapitre 9. Convergences et estimation	457
9.1. Convergence en probabilité	.459
9.2. Convergence en loi	.464
9.3. Estimateur ponctuel	.469
9.4. Estimation par intervalle de confiance, intervalle de confiance asymptotique	.474
9.5. Exercices corrigés	.486
9.6. Corrigés des exercices	.489

Partie IV. Informatique

Chapitre 10. Informatique et algorithmique	501
10.1. Bases de données en SQL	.503
10.2. Equations et systèmes différentiels	.519
10.3. Statistiques descriptives bivariées	.528
10.4. Chaînes de Markov	.534
10.5. Estimation ponctuelle	.543

Partie I

Algèbre

Chapitre 1

Espaces vectoriels



La notion d'espace vectoriel est certes très abstraite, mais essentielle pour le calcul. Ces ensembles sont en effet stables, ce qui permet d'effectuer des combinaisons linéaires avec ses éléments sans risquer d'en sortir. Le chapitre généralise quelques propriétés vues en première année avec les espaces vectoriels $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^n$. Vous verrez qu'il existe en réalité de multiples espaces vectoriels, notamment $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{R}_n[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, l'ensemble des applications de $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et l'ensemble des suites réelles. Ce sont les fondements théoriques sur lesquels se base le programme de deuxième année.

DANS CE CHAPITRE

14 questions classiques

37 méthodes

44 exercices

Sommaire

1.1. Sous-espaces vectoriels	13
Question 1. Comment montrer qu'un espace F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E ?	13
Question 2. Comment montrer qu'un espace F n'est pas un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E ?	15
Question 3. Comment montrer une égalité d'espaces vectoriels?	18
1.2. Familles libres, génératrices et bases	20
Question 4. Comment montrer qu'une famille U est libre?	20
Question 5. Comment montrer qu'une famille U est liée?	23
Question 6. Comment montrer qu'une famille U est génératrice d'un espace vectoriel?	26
Question 7. Comment montrer qu'une famille U n'est pas génératrice d'un espace vectoriel E ?	29
Question 8. Comment montrer qu'une famille U est une base d'un espace vectoriel E ?	30
Question 9. Comment exprimer un vecteur dans une base?	38
Question 10. Comment déterminer la matrice des coordonnées d'une famille de E dans une base de E ?	39
1.3. Dimension d'un espace vectoriel	40
Question 11. Comment montrer qu'un espace vectoriel E est de dimension finie?	40
Question 12. Comment montrer qu'un espace vectoriel E n'est pas de dimension finie?	41
Question 13. Comment calculer la dimension d'un espace vectoriel E ?	44
Question 14. Comment trouver une inégalité de dimensions d'espaces vectoriels?	48
1.4. Exercices corrigés	49
Exercice 43. EDHEC 2014 : Commutant de A	49
Exercice 44. EDHEC 1994 : Suites récurrentes linéaires d'ordre 3.	49
1.5. Corrigés des exercices	51
Corrigé exercice 43. EDHEC 2014 : Commutant de A	51
Corrigé exercice 44. EDHEC 1994 : Suites récurrentes linéaires d'ordre 3	53

1.1. Sous-espaces vectoriels

Question 1 Comment montrer qu'un espace F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E ?

Méthode 1 En montrant les 3 points définissant un sous-espace vectoriel



RAPPEL DE COURS

- $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}[X], \mathbb{R}_n[X], \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ (l'ensemble des fonctions de $I (I \subset \mathbb{R} \text{ ou } I \subset \mathbb{N})$ dans $\mathbb{R}$) sont des espaces vectoriels.
- F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :
 - 1) F est inclus dans E .
 - 2) $0_E \in F$ i.e. F est non vide.
 - 3) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall (u, v) \in F^2, (\alpha u + v) \in F$.



POINT MÉTHODOLOGIQUE

Cette méthode sera le plus souvent utilisée pour montrer que F est un sous-espace vectoriel de E . C'est un classique. On remarque que pour montrer que F est non vide (ie contient au moins un vecteur), on montre que le vecteur nul de E appartient à F . Le vecteur nul étant bien un vecteur, un ensemble qui le contient n'est pas vide.

Exercice 1

Exemple d'application simple

Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y = 0 \text{ et } z = 0\}$.

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Corrigé

- $F \subset E$ par définition de F
- $(0, 0, 0) \in F$ car $0 + 0 = 0$ et $0 = 0$.
- Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $((x, y, z), (x', y', z')) \in (F)^2$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } \alpha(x, y, z) + (x', y', z') &= (\alpha x, -\alpha x, 0) + (x', -x', 0) \\ &= (\alpha x + x', -\alpha x - x', 0) \end{aligned}$$

Comme $(\alpha x + x') + (-\alpha x - x') = 0$ et $0 = 0$,

$$\alpha(x, y, z) + (x', y', z') \in F.$$

Ainsi F est un sous-espace vectoriel de E .

Exercice 2

D'après ESSEC 2015

Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Soit q une fonction continue sur $[0, 1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, on note $F(q)$ l'ensemble défini par :

$$F(q) = \{f \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R}), \forall t \in [0, 1], f''(t) = q(t)f(t)\}$$

Montrer que $F(q)$ est un sous-espace vectoriel de E .

Corrigé

- $F(q) \subset E$
- Soit $f = 0_E \forall t \in [0, 1], f''(t) = 0 = q(t)f(t)$
Donc $f \in F(q)$ et $F(q) \neq \emptyset$.
- Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $(f, g) \in (F(q))^2$. On pose $h = \alpha f + g$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } \forall t \in [0, 1], h''(t) &= \alpha f''(t) + g''(t) \\ &= \alpha q(t)f(t) + q(t)g(t) \\ &= q(t)(\alpha f + g)(t) \\ &= q(t)h(t) \end{aligned}$$

D'où $\forall t \in [0, 1], h''(t) = q(t)h(t)$

Donc $h \in F(q)$ i.e. $\alpha f + g \in F(q)$.

Ainsi $F(q)$ est un sous-espace vectoriel de E .

Méthode 2

En montrant que $F = \text{Vect}(U)$ où U est une famille de vecteurs de E



RAPPEL DE COURS

Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et $(u_1, u_2, \dots, u_p) \in E^p$.

On appelle sous-espace vectoriel engendré par la famille $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ et on note $\text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p)$ l'ensemble des combinaisons linéaires de la famille $(u_1, u_2, \dots, u_p)$.

$$\text{On a : } \text{Vect}(u_1, \dots, u_p) = \left\{ \sum_{i=1}^p \lambda_i u_i, (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p \right\}$$

$\text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$ est un sous-espace vectoriel de E .



POINT MÉTHODOLOGIQUE

Pour montrer qu'un ensemble F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E , on peut chercher à exprimer F sous forme d'un $\text{Vect}()$ d'éléments de E . L'intérêt de cette méthode est de pouvoir ensuite facilement trouver une base.

Exercice 3

Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = 2y, z = 0\}$
Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Corrigé

$$\begin{aligned} F &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = 2y, z = 0\} \\ &= \{(2y, y, 0), y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y(2, 1, 0), y \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{Vect}(2, 1, 0) \end{aligned}$$

Donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4

Soit $G = \{P \in \mathbb{R}_4[X], P(-1) = P(0) = P(1) = 0\}$
Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$.

Corrigé

$$\begin{aligned} G &= \{P \in \mathbb{R}_4[X] / P(-1) = P(0) = P(1) = 0\} \\ &= \{(X-1)X(X+1)(aX+b), (a, b) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{(X^3-X)(aX+b), (a, b) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{a(X^4-X^2) + b(X^3-X), (a, b) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \text{Vect}(X^4-X^2, X^3-X) \end{aligned}$$

Donc G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$.

Question 2

Comment montrer qu'un espace F n'est pas un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E ?

Méthode 3

En montrant qu'un des 3 points définissant un sous-espace vectoriel n'est pas vérifié



POINT MÉTHODOLOGIQUE

Pour montrer qu'une partie F de E n'est pas un sous-espace vectoriel de E on peut :

- Montrer que 0_E n'appartient pas à F .
- Trouver $\lambda \in \mathbb{R}$, $u \in F$ tel que λu n'appartient pas à F .
- Trouver $u, v \in F$ tel que $u + v$ n'appartient pas à F .

Exercice 5

Montrer que $E = \{(x, 1) \mid x \in \mathbb{R}\}$ n'est pas un espace vectoriel.

Corrigé

$(0, 0) \notin E$ donc E n'est pas un espace vectoriel.

Exercice 6**♠ D'après ESCP 2004**

On note E l'ensemble des fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (ie les fonctions de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$) pour lesquelles il existe une suite réelle $s = (s_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, dite adaptée à f , telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^{n-1} f\left(x + \frac{k}{n}\right) = s_n f(nx)$$

- 1) Montrer que les fonctions constantes appartiennent à E .
- 2) Soit A la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe $x - \frac{1}{2}$. établir que A est un élément de E .
- 3) E constitue-t-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

Corrigé

1) Soit f une fonction constante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Alors $\exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = c$ et ainsi :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^{n-1} f\left(x + \frac{k}{n}\right) &= \sum_{k=0}^{n-1} c \\ &= n \times c \\ &= n \times f(nx) \end{aligned}$$

Donc en posant $\forall n \in \mathbb{N}^*, s_n = n$, on a bien l'existence d'une suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^{n-1} f\left(x + \frac{k}{n}\right) = s_n \times f(nx)$$

Donc $f \in E$.

Donc les fonctions constantes appartiennent à E .

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R},$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} A\left(x + \frac{k}{n}\right) &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(x + \frac{k}{n} - \frac{1}{2}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= n \left(x - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{n} \times \frac{n(n-1)}{2} \\
&= nx - \frac{n}{2} + \frac{n-1}{2} \\
&= nx - \frac{1}{2} \\
&= 1 \times A(nx)
\end{aligned}$$

Donc en posant $\forall n \in \mathbb{N}^*, s_n = 1$, on a bien l'existence d'une suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^{n-1} A \left(x + \frac{x}{n} \right) = s_n \times A(nx)$$

Donc $\boxed{A \in E}$

3) Notons $B : x \mapsto \frac{1}{2}$. Supposons que $A + B \in E$. Il vient que $A + B : x \mapsto -x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ ie $A + B : x \mapsto x$.

Alors il existe une suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^{n-1} \left(x + \frac{k}{n} \right) = s_n \times nx$$

En particulier, pour $x = 0$:

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n-1} \left(0 + \frac{k}{n} \right) &= s_n \times n \times 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} k = 0 \quad \text{i.e.} \quad \frac{1}{n} \times \frac{(n-1) \times n}{2} = 0$$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*, n-1 = 0$. On a une contradiction.

Donc $A + B \notin E$, or $A \in E$ et $B \in E$.

Ainsi $\boxed{E \text{ n'est pas un sous-espace vectoriel de } \mathcal{F} \in (\mathbb{R}, \mathbb{R})}$.

Question 3

Comment montrer une égalité d'espaces vectoriels ?

Méthode 4

Par double inclusion



POINT MÉTHODOLOGIQUE

Il s'agit d'une méthode à utiliser principalement lorsque les espaces sont définis de manière abstraite et non totalement explicite, ou bien quand on n'est pas en dimension finie. On utilisera alors les méthodes classiques pour montrer une double inclusion.

Exercice 7

Soit $n \geq 2$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $\mathbb{R}[A]$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $\mathbb{R}[A] = \{P(A), P \in \mathbb{R}[X]\}$ (par exemple : $A^3 + 4A \in \mathbb{R}[A]$).

Z désigne un polynôme annulateur non nul de A et de degré minimal, (on note d le degré de Z).

- 1) Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, montrer qu'il existe un unique couple (Q, R) de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ tel que : $P = ZQ + R$ et $\deg(R) < d$.
- 2) En déduire que $\mathbb{R}[A] = \text{Vect}(I_n, A, \dots, A^{d-1})$.

Corrigé

- 1) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Par division euclidienne :

Il existe un unique couple de polynôme (Q, R) tel que $P = ZQ + R$ avec $\deg(R) < \deg(Z) = d$.

- 2) • Comme $\mathbb{R}[A]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ contenant les matrices $I_n = A^0, A, \dots, A^{d-1}$, on a :

$$\text{Vect}(I_n, A, \dots, A^{d-1}) \subset \mathbb{R}[A]$$

- Réciproquement, soit $P(A) \in \mathbb{R}[A]$, avec $P \in \mathbb{R}[X]$.

D'après la question précédente, il existe un unique couple $(Q, R) \in (\mathbb{R}[X])^2$ tel que $P = ZQ + R$ avec $\deg(R) < d$.

On a alors : $P(A) = Z(A)Q(A) + R(A) = R(A)$

Donc $P(A) = R(A)$ car $Z(A) = 0_{\mathcal{M}(\mathbb{R})}$.

De plus, $\deg(R) < d$, donc $R(A) \in \text{Vect}(I_n, A, \dots, A^{d-1})$.

On a donc : $P(A) \in \text{Vect}(I_n, A, \dots, A^{d-1})$

Donc $\mathbb{R}[A] \subset \text{Vect}(I_n, A, \dots, A^{d-1})$

Ainsi, $\mathbb{R}[A] = \text{Vect}(I_n, A, \dots, A^{d-1})$.

**RAPPEL DE COURS**

Soient A et B des espaces vectoriels de dimension finie.

Si $A \subset B$ et $\dim(A) = \dim(B)$ alors $A = B$.

**POINT MÉTHODOLOGIQUE**

Cette méthode est très fréquemment utilisée lorsqu'on a déjà démontré (ou alors qu'on est capable de le faire facilement) que les dimensions des deux espaces sont égales. Il suffit alors de montrer la plus simple des deux inclusions.

Exercice 8

On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$u = (1, -1, 1)$, $v = (0, -1, 2)$, $w = (1, -2, 3)$

Soient $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y + z = 0\}$ et $F = \text{Vect}(u, v, w)$

On admet que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Montrer que $F = G$.

Corrigé

- On remarque que $u + v = w$.

$$\begin{aligned} \text{On a } F &= \text{Vect}(u, v, w) \\ &= \text{Vect}(u, v, u + v) \\ &= \text{Vect}(u, v) \end{aligned}$$

Or u et v ne sont pas colinéaires donc (u, v) est une base de F et $\dim(F) = 2$.

$$\begin{aligned} \bullet \quad G &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = -2y - z\} \\ &= \{(-2y - z, y, z) \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{y(-2, 1, 0) + z(-1, 0, 1), (y, z) \in \mathbb{R}^2\} \end{aligned}$$

Donc $G = \text{Vect}((-2, 1, 0), (-1, 0, 1))$.

Or $(-2, 1, 0)$ et $(-1, 0, 1)$ ne sont pas colinéaires donc forment une famille libre de G .

D'où $((-2, 1, 0), (-1, 0, 1))$ est une base de G , donc $\dim(G) = 2$

**RAPPEL DE COURS**

Si $(e_1, \dots, e_r)$ est une base de F alors :

$$F \subset G \iff \forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket, e_i \in G$$

$F = \text{Vect}(u, v)$ et (u, v) est une base de F .

$$\text{Or } \begin{cases} 1 + 2 \times (-1) + 1 = 0 \text{ donc } u \in G \\ 0 + 2 \times (-1) + 2 = 0 \text{ donc } v \in G \end{cases}$$

Ainsi $F \subset G$.

Comme $\dim(F) = \dim(G) = 2$ et $F \subset G$, on a $F = G$.

1.2. Familles libres, génératrices et bases

Question 4 Comment montrer qu'une famille U est libre ?

Méthode 6 Si U comprend un unique élément u , en montrant que $u \neq 0$



RAPPEL DE COURS

Si U est une famille à 1 élément et que cet élément est non nul, alors U est libre.



POINT MÉTHODOLOGIQUE

Lorsqu'on est en présence d'une famille de cardinal 1, il suffit d'appliquer littéralement le rappel de cours précédent pour justifier la liberté de la famille.

Exercice 9

Justifier que la famille $((2, 5))$ est une famille libre de $\mathbb{R}^2$

Corrigé

$(2, 5) \neq (0, 0)$ donc $((2, 5))$ est une famille libre de $\mathbb{R}^2$.



Remarque

De l'importance des parenthèses : $((2, 5))$ est une famille libre de $\mathbb{R}^2$ comportant un élément tandis que $(2, 5)$ est une famille liée de $\mathbb{R}$ comportant deux éléments.

Méthode 7 Si U est une famille à 2 éléments u et v , en montrant que u et v sont non colinéaires



RAPPEL DE COURS

Soit $U = (u, v)$ une famille à deux éléments.
 u et v sont non colinéaires $\iff U$ est libre.



POINT MÉTHODOLOGIQUE

Lorsqu'on est en présence d'une famille de cardinal 2, il suffit d'appliquer littéralement le rappel de cours précédent pour justifier la liberté de la famille.

Exercice 10

Justifier que la famille $((1, 2, 3), (0, 1, 1))$ est libre.

Corrigé

$(1, 2, 3)$ et $(0, 1, 1)$ sont non colinéaires.

Donc la famille $((1, 2, 3), (0, 1, 1))$ est libre.

Méthode 8

En utilisant la définition d'une famille libre



RAPPEL DE COURS

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et $(u_1, u_2, \dots, u_p) \in E^p$.

$(u_1, u_2, \dots, u_p)$ est une famille libre si et seulement si $\forall (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^p$,

$$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_p u_p = 0_E \implies \alpha_1 = \dots = \alpha_p = 0$$



POINT MÉTHODOLOGIQUE

Revenir à cette méthode doit vraiment être une constante dans votre raisonnement lorsque la famille comporte 3 éléments ou plus. On revient à la définition de la liberté et on cherche à montrer l'implication rappelée ci-dessus pour conclure sur la liberté de la famille.

Exercice 11

Soit $u = (1, 1, 1)$, $v = (1, 2, 0)$ et $w = (1, 1, 0)$ des éléments de $\mathbb{R}^3$. Montrer que (u, v, w) est une famille libre.

Corrigé

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a u + b v + c w = 0$

$$\text{Alors } \begin{cases} a + b + c = 0 \\ a + 2b + c = 0 \\ a = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b + c = 0 \\ 2b + c = 0 \\ a = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

Ainsi (u, v, w) est une famille libre.

Méthode 9

S'il s'agit de polynômes, en montrant que c'est une famille de polynômes non nuls échelonnée en degré



RAPPEL DE COURS

Toute famille de polynômes non nuls échelonnée en degré est une famille libre.



POINT MÉTHODOLOGIQUE

Lorsqu'on est en présence d'une famille de polynômes non nuls, le réflexe doit être de vérifier si cette famille de polynômes est échelonnée en degré. Si c'est le cas, il est important de préciser qu'ils sont tous non nuls.

Si ce n'est pas le cas, il faut utiliser la méthode précédente.

Exercice 12

D'après HEC 2013

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$, on pose :

$$x^{<k>} = \begin{cases} \prod_{i=1}^k (x+i-1) & \text{si } k \geq 1 \\ 1 & \text{si } k = 0 \end{cases}$$

On associe aux fonctions polynomiales $x \mapsto x^{<k>}$, les polynômes $X^{<k>}$ de $\mathbb{R}[X]$.

Montrer que $(X^{<0>}, X^{<1>}, \dots, X^{<n>})$ est une famille libre.

Corrigé

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \deg(X^{<k>}) = \deg\left(\prod_{i=1}^k (X+i-1)\right) = k$$

De plus, $\deg(X^{<0>}) = 0$ car $X^{<0>} = 1$.

Ainsi, la famille $(X^{<0>}, X^{<1>}, \dots, X^{<n>})$ forme une famille de $(n+1)$ polynômes non nuls échelonnée en degrés.

Donc $(X^{<0>}, X^{<1>}, \dots, X^{<n>})$ est une famille libre.

Méthode 10

En utilisant le lien entre application injective et familles libres



Remarque

Cette méthode nécessite la connaissance du chapitre sur les applications linéaires. Si vous ne l'avez pas encore abordé, ne vous y attardez pas.



RAPPEL DE COURS

Soient E et F des espaces vectoriels.

Soit $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ une famille libre de E . Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
 f injective $\iff (f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_n))$ est libre.



POINT MÉTHODOLOGIQUE

On peut penser à utiliser la propriété ci-dessus pour montrer qu'une famille est libre lorsque l'on peut exploiter une application linéaire f injective.

Exercice 13

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$ avec $p \leq n^2$.

Soit $(M_1, \dots, M_p)$ une famille libre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que $({}^t M_1, \dots, {}^t M_p)$ est une famille libre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Corrigé

Notons f l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui à M associe ${}^t M$. D'après le cours, f est linéaire.

De plus, soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $f(M) = 0$.

Alors ${}^t M = 0$ donc $M = 0$.

Donc $\text{Ker}(f) \subset \{0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}\}$. Comme $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} \in \text{Ker}(f)$, on a :

$\text{Ker}(f) = \{0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}\}$ et donc f est injective.

Or $(M_1, \dots, M_p)$ est libre. Donc $(f(M_1), \dots, f(M_p))$ est libre.

Donc $({}^t M_1, \dots, {}^t M_p)$ est une famille libre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Question 5

Comment montrer qu'une famille U est liée ?

Méthode 11

En montrant que la famille comporte le vecteur nul



RAPPEL DE COURS

Si une famille comporte le vecteur nul alors c'est une famille liée, i.e. non libre.



POINT MÉTHODOLOGIQUE

Si on parvient à identifier un vecteur nul alors on peut être assuré que toute famille contenant ce vecteur est liée.

Exercice 14

Soit f une fonction continue et positive sur $[0, 1]$ telle que $\int_0^1 f(t)dt = 0$.
Montrer que $(x \mapsto x, x \mapsto e^x + 1, f)$ est une famille liée de $\mathcal{F}([0, 1], \mathbb{R})$.

Corrigé

f est continue et à valeurs positives sur $[0, 1]$.

Comme, $\int_0^1 f(t)dt = 0$, par théorème $\forall t \in [0, 1], f(t) = 0$

Donc $(x \mapsto x, x \mapsto e^x + 1, f)$ est une famille liée.

Méthode 12

Si U est une famille à 2 éléments u et v , en montrant que u et v sont colinéaires



POINT MÉTHODOLOGIQUE

Lorsque la famille est de cardinal 2, il suffit de montrer que les vecteurs sont colinéaires pour justifier qu'elle est liée.

Exercice 15

Justifier que la famille $((1, 2, 3), (4, 8, 12))$ est liée.

Corrigé

$(4, 8, 12) = 4(1, 2, 3)$ donc la famille est liée.

Méthode 13

En montrant qu'un des vecteurs de la famille s'exprime comme combinaison linéaire des autres



RAPPEL DE COURS

Une famille à deux éléments ou plus est liée si et seulement si un des vecteurs de la famille peut s'exprimer comme combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille.



POINT MÉTHODOLOGIQUE

Si on parvient à exprimer un des vecteurs d'une famille comme combinaison linéaire des autres vecteurs de cette famille alors cette famille est liée.

Exercice 16

Montrer que la famille $(X, 2X - 5, 5X - 5)$ est liée.

Corrigé

On a : $5X - 5 = 2X - 5 + 3 \times X$

Donc $(X, 2X - 5, 5X - 5)$ est une famille liée de $\mathbb{R}[X]$.

Méthode 14

En montrant que la famille comprend un nombre d'éléments strictement supérieur à la dimension de l'espace vectoriel auquel ils appartiennent



RAPPEL DE COURS

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ une famille d'éléments de E .

Si $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ est libre, alors $p \leq n$.



POINT MÉTHODOLOGIQUE

Si la famille d'un espace vectoriel E de dimension finie comprend un nombre d'éléments strictement supérieur à la dimension de E , alors on peut conclure que la famille est liée.

Exercice 17

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que la famille $(A^k)_{k \in \llbracket 0, n^2 \rrbracket}$ est liée.

Corrigé

$(A^k)_{k \in \llbracket 0, n^2 \rrbracket}$ est une famille de $n^2 + 1$ vecteurs de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Comme $\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = n^2 < n^2 + 1$, cette famille n'est pas libre, i.e.

$(A^k)_{k \in \llbracket 0, n^2 \rrbracket}$ est une famille liée.

Question 6

Comment montrer qu'une famille U est génératrice d'un espace vectoriel ?

Méthode 15

En utilisant la définition d'une famille génératrice



RAPPEL DE COURS

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Une famille $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ d'éléments de E est une famille génératrice de E si et seulement si :

$$\forall x \in E, \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p, x = \sum_{i=1}^p \lambda_i u_i$$

Si $E = \text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p)$, alors $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ est une famille génératrice de E .



POINT MÉTHODOLOGIQUE

Pour montrer que U est une famille génératrice de E , on prend un x quelconque dans E et on cherche à l'exprimer comme combinaison linéaire des vecteurs de la famille.

Si on a montré précédemment que E est égal à $\text{Vect}(U)$, on peut directement conclure que U est génératrice de E .

Exercice 18

Soit $P_1 = X^2 + 2X + 1$, $P_2 = X^2 + X + 1$ et $P_3 = X^2 + X$.
 (P_1, P_2, P_3) est-elle une famille génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$?

Corrigé

Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. $\exists! (a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3$, $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$
Supposons qu'il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\begin{aligned} P &= \alpha P_1 + \beta P_2 + \gamma P_3 \\ &= \alpha(X^2 + 2X + 1) + \beta(X^2 + X + 1) + \gamma(X^2 + X) \\ &= \alpha X^2 + 2\alpha X + \alpha + \beta X^2 + \beta X + \beta + \gamma X^2 + \gamma X \end{aligned}$$

Par identification des coefficients, on a alors :

$$\begin{aligned} &\begin{cases} a_0 = \alpha + \beta \\ a_1 = 2\alpha + \beta + \gamma \\ a_2 = \alpha + \beta + \gamma \end{cases} \\ \iff &\begin{cases} \beta = a_0 - \alpha \\ -a_1 + 2\alpha + \beta + \gamma + a_2 - \alpha - \beta - \gamma = 0 \\ a_2 - \alpha - \beta - \gamma = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Longleftrightarrow & \begin{cases} \beta = a_0 - \alpha \\ \alpha = a_1 - a_2 \\ \gamma = a_2 - \alpha - \beta \end{cases} \\ \Longleftrightarrow & \begin{cases} \beta = a_0 - a_1 + a_2 \\ \alpha = a_1 - a_2 \\ \gamma = -a_0 + a_2 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, $\exists(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$, $P = \alpha P_1 + \beta P_2 + \gamma P_3$

D'où, (P_1, P_2, P_3) est une famille génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$.

Méthode 16

En utilisant le lien entre application surjective et famille génératrice



Remarque

Cette méthode nécessite la connaissance du chapitre sur les applications linéaires. Si vous ne l'avez pas encore abordé, ne vous y attardez pas.



RAPPEL DE COURS

Soient E et F des espaces vectoriels. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Soit $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ une famille génératrice de E .

f surjective $\Longleftrightarrow (f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_n))$ est génératrice de F



POINT MÉTHODOLOGIQUE

On peut penser à utiliser la propriété ci-dessus lorsque l'on connaît une famille génératrice et qu'on peut faire entrer en jeu une application surjective pour transformer cette famille en une autre famille génératrice.

Exercice 19

Soit $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ avec $n \geq p$. Soit $(P_1, \dots, P_n)$ une famille génératrice de $\mathbb{R}_p[X]$. Montrer que $(P'_1, \dots, P'_n)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$.

Corrigé

Notons f l'application de $\mathbb{R}_p[X]$ dans $\mathbb{R}_{p-1}[X]$ qui à P associe $f(P) = P'$.

f est linéaire par linéarité de la dérivation.

Soit $Q \in \mathbb{R}_{p-1}[X]$.

Notons $Q = \sum_{k=0}^{p-1} a_k X^k$.