Colles

corrigées et commentées

PCSi – PTSi

Maths

Éric Billault

ellipses

Collection

Colles

corrigées et commentées

ISBN 9782340-096042
©Ellipses Édition Marketing S.A., 2024
8/10 rue la Quintinie 75015 Paris



Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5.2° et 3°a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

À mes filles : Fanny et Sofia

À ma famille d'adoption : Judith, Charlie, David et Noémie,
sans oublier nos chats : Ioupie, Lascard, Mooniechat, Pookie

Mode d'emploi

Ce livre regroupe des exercices donnés en colle en première année dans les filières PCSI et PTSI. Les exercices ont été dénommés « colle » mais une interrogation orale peut consister en la résolution de plusieurs exercices.
Les différents chapitres correspondent plus ou moins aux différentes semaines de colle. Cependant, certains chapitres ont été regroupés.

— Le chapitre sur les probabilités regroupe les probabilités à proprement parler et les variables aléatoires.

— L'analyse asymptotique contient les relations de négligeabilité et d'équivalence pour les suites et les fonctions ainsi que les développements limités.

— Le chapitre sur les primitives et l'intégration contient l'intégrale de Riemann traditionnellement enseignée en fin d'année scolaire (propriétés de l'intégrale, somme de Riemann).

Les programmes de PCSI et PTSI sont très semblables. Il y a cependant quelques différences à noter.

— Le chapitre sur la dérivation contient un paragraphe sur la convexité spécifique à la filière PCSI.

— Le chapitre « Espace euclidien » est spécifique à la filière PCSI.

— Le dernier chapitre intitulé « Géométrie » est uniquement dédié aux étudiants de PTSI.

Les exercices de colle sont classés en trois niveaux symbolisés par des étoiles.

— Une étoile. Exercices ne nécessitant aucune réflexion et demandant très peu de calcul. Il s'agit d'appliquer le cours.

— Deux étoiles. Exercices demandant des calculs un peu plus conséquents que le niveau précédent et requérant un peu de réflexion.

— Trois étoiles. Exercices où des prises d'initiative et une bonne connaissance du cours sont nécessaires.

Les exercices de colle sont précédés d'un rappel succinct du cours. Ces rappels ne sont pas le cours ! Ils ne peuvent se substituer à votre cours. Dans un premier temps, vous devez d'abord travailler votre cours (lire les définitions, les énoncés des théorèmes, en comprendre le sens en s'aidant des exemples, lire les démonstrations). Ensuite, vous pouvez aborder les exercices de premier et deuxième niveau. Si vous bloquez, plutôt que de regarder le corrigé, il est préférable de relire le cours. C'est en faisant des allers-retours entre cours et exercices que les notions mathématiques seront bien comprises.
Les corrigés des exercices sont agrémentés de commentaires qui vous aideront à la résolution de l'exercice. Il peut s'agir d'un rappel d'un point du cours, d'un conseil pour aborder un calcul, d'une aide pour avancer, d'une autre méthode de résolution, de contre-exemples pour éviter les idées préconçues ou d'un prolongement possible de l'exercice.

Bon travail !

Liste des notations et des abréviations

Notations générales

- *i.e.* : c'est-à-dire
- := signifie que l'on pose une notation. Par exemple : $a := 1$
- $\stackrel{\Delta}{=}$ signifie « par définition ». Par exemple, $\mathrm{e}^{i\theta} \stackrel{\Delta}{=} \cos(\theta) + i\sin(\theta)$
- **K** désigne l'ensemble des nombres complexes ou réels
- H.R : Hypothèse de Récurrence

Nombre complexe

- (u, v) désigne l'angle orienté entre les vecteurs u et v. Cet angle est défini modulo 2π
- $[2\pi]$: modulo 2π. Par exemple, $\theta = \dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$ signifie qu'il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $\theta = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$
- $\arg(z)$ désigne un argument du nombre complexe z ; cet angle est défini modulo 2π
- $|z|$: module du nombre complexe z
- $\overline{z}$: conjugué de z
- $\mathfrak{Re}(z)$, $\mathfrak{Im}(z)$: partie réelle et imaginaire de z
- $\mathscr{C}(\Omega, r)$: cercle de centre Ω et de rayon r
- $\omega_k := \mathrm{e}^{\frac{2i\pi k}{n}}$: racine n^{e} de l'unité
  $j := \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}} = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$: l'une des racines cubiques de l'unité
- **U** : ensemble des nombres complexes de module 1
- $\mathbf{U}_n$: ensemble des racines n^{e} de l'unité

Fonction et bijection

- $f(E)$: ensemble image pour une application f de E dans F
- $f(A)$: image directe de la partie A de E pour une application f de E dans F
- $f^{-1}(M)$: image réciproque de la partie M de F pour une application f de E dans F
- f^{-1} : application réciproque de l'application bijective f
- $f \circ g$: composée de l'application f et g c'est-à-dire $(f \circ g)(x) \stackrel{\Delta}{=} f\big(g(x)\big)$
- Id_E : application identité de l'ensemble E c'est-à-dire $\mathrm{Id}_E : E \to E, x \mapsto x$
- $\widetilde{0}$: la fonction nulle

Primitive et intégrale

- $\int f$ ou $\int f(t)\mathrm{d}t$ ou $\int^x f(t)\mathrm{d}t$ désignent une primitive générique de la fonction f
- $\int_a^b f$ ou $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est l'intégrale de f entre a et b; c'est l'aire délimitée par la courbe $y=f(x)$, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équations $x=a$ et $x=b$
- $\overleftrightarrow{[a,b]}$ désigne le segment $[a,b]$ si $a\leqslant b$ ou le segment $[b,a]$ si $b\leqslant a$
- IPP : Intégration Par Parties
- CDV : Changement De Variable
- $\mathfrak{Re}(f)$ et $\mathfrak{Im}(f)$: partie réelle et imaginaire de la fonction f
- $S_n(f)$ et $S'_n(f)$: sommes de Riemann associées à f

Équation différentielle

- EDL : Équation Différentielle Linéaire
- MVC : Méthode de Variation de la Constante
- EDHA : Équation Différentielle Homogène Associée
- CL : Combinaison Linéaire
- e.c : équation caractéristique

Suite

- APCR : À Partir d'Un Certain Rang
- PALL : Passage À La Limite
- $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ (respectivement $\mathbf{C}^{\mathbf{N}}$) est l'ensemble des suites à valeurs réelles (respectivement complexes)
- $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ est l'ensemble des suites à valeurs dans $\mathbf{K}$
- CV, DV : ConVergence et DiVergence d'une suite
- $\overline{D}(\ell,\varepsilon)$: disque fermé de centre ℓ et rayon ε du plan complexe.

Borne supérieure, inférieure

- $\sup(A)$, $\inf(A)$: borne supérieure, inférieure de la partie A de $\mathbf{R}$
- $\max(A)$, $\min(A)$: plus grand élément, plus petit élément de la partie A de $\mathbf{R}$
- $\sup_{x\in A} f(x)$ ou $\sup_A f$, $\inf_{x\in A} f(x)$ ou $\inf_A f$: borne supérieure, inférieure de la fonction f sur la partie A
- $\max_{x\in A} f(x)$ ou $\max_A f$, $\min_{x\in A} f(x)$ ou $\min_A f$: plus grand élément, plus petit élément de la fonction f sur la partie A
- $\lfloor x\rfloor$: partie entière du réel x

Dénombrement, probabilité, arithmétique

- $[\![p,q]\!]$: ensemble des entiers entre les entiers p et q si $p \leqslant q$ et ensemble vide si $p > q$
- F^E : ensemble des applications de E dans F
- $E \times F$: produit cartésien des ensembles E et F
- $\mathscr{S}(E)$: ensemble des permutations de E c'est-à-dire des applications bijectives de E dans E
- $|E| = \mathrm{card}(E)$: cardinal de l'ensemble E
- $n!$: factoriel de l'entier n
- $\binom{n}{p}$: coefficient binomial, nombre de p-combinaisons d'un ensemble E ayant n éléments
- A_n^p : nombre de p-arrangements d'un ensemble E ayant n éléments
- $\mathscr{P}(E)$: ensemble des parties de l'ensemble E
- $\mathscr{P}_k(E)$: ensemble des k-combinaisons c'est-à-dire ensemble des parties de E ayant k éléments
- $\mathbf{P}_B(A)$ ou $\mathbf{P}(A \mid B)$ est la probabilité conditionnelle de A sachant B
- $A \uplus B$: réunion disjointe des ensembles A et B
- $(\Omega, \mathbf{P})$: espace probabilisé c'est-à-dire c'est la donnée d'un ensemble fini Ω et d'une probabilité $\mathbf{P}$ sur Ω
- $\overline{A}$: événement contraire de l'événement A; c'est le complémentaire de A dans Ω noté $\complement_\Omega A$.
- FPT : Formule des Probabilités Totales
- FPC : Formule des Probabilités Composées
- v.a.r : variable aléatoire réelle
- $X(\Omega)$: support de la variable aléatoire réelle X
- $\mathbf{E}[X]$, $\mathbf{V}[X]$: espérance et variance de la v.a.r X
- $X \perp\!\!\!\perp Y$: les v.a.r X et Y sont indépendantes
- $X \hookrightarrow \ldots$: la v.a.r X suit la loi …
- $\mathscr{U}([\![1,n]\!])$, $\mathscr{B}(p)$, $\mathscr{B}(n,p)$: loi uniforme sur l'ensemble $[\![1,n]\!]$, loi de Bernoulli de paramètre p, loi binomiale de paramètres n et p
- $a\mathbf{Z}$: ensemble des multiples de l'entier relatif a
- $\mathscr{D}(a)$: ensemble des diviseurs de l'entier relatif a
- $a \wedge b$: PGCD(a,b)
- $a \vee b$: PPCM(a,b)
- $a \mid b$: a divise b
- $\mathscr{P}$: ensemble des nombres premiers

Limite, continuité

- $\overline{\mathbf{R}}$ désigne l'ensemble $\mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$
- $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ ou $\lim\limits_{a} f$: limite de la fonction f lorsque la variable x tend vers a
- FI : Forme Indéterminée
- TVI : Théorème des Valeurs Intermédiaires
- $\widetilde{f}$: prolongement par continuité de l'application f
- $\mathscr{C}^0(A, \mathbf{K})$ ou $\mathscr{C}(A, \mathbf{K})$: ensemble des fonctions continues sur la partie A de $\mathbf{R}$ et à valeurs dans $\mathbf{K}$

Dérivation

- TAF : Théorème des Accroissements Finis
- IAF : Inégalité des Accroissements Finis
- $\mathscr{D}(A, \mathbf{K})$: ensemble des fonctions dérivables sur la partie A de $\mathbf{R}$ et à valeurs dans $\mathbf{K}$
- $f^{(k)}$: dérivée d'ordre k ou k^{e} de f
- $\mathscr{D}^k(A, \mathbf{K})$: ensemble des fonctions k-fois dérivables sur la partie A de $\mathbf{R}$ et à valeurs dans $\mathbf{K}$
- $\mathscr{C}^k(A, \mathbf{K})$: ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ sur la partie A de $\mathbf{R}$ et à valeurs dans $\mathbf{K}$
- $\mathscr{C}^\infty(A, \mathbf{K})$: ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur la partie A de $\mathbf{R}$ et à valeurs dans $\mathbf{K}$

Analyse asymptotique

- $u_n \overset{n \to +\infty}{=} \mathrm{o}(v_n)$: la suite (u_n) est négligeable devant la suite (v_n)
- $u_n \overset{n \to +\infty}{=} \mathrm{O}(v_n)$: la suite (u_n) est dominée devant la suite (v_n)
- $u_n \overset{n \to +\infty}{\sim} v_n$: la suite (u_n) est équivalente à la suite (v_n)
- $f(x) \overset{x \to a}{=} \mathrm{o}\big(g(x)\big)$ ou $f \overset{a}{=} \mathrm{o}(g)$: la fonction f est négligeable devant la fonction g au voisinage du point a
- $f(x) \overset{x \to a}{=} \mathrm{O}\big(g(x)\big)$ ou $f \overset{a}{=} \mathrm{O}(g)$: la fonction f est dominée devant la fonction g au voisinage du point a
- $f(x) \overset{x \to a}{\sim} \mathrm{o}\big(g(x)\big)$ ou $f \overset{a}{\sim} \mathrm{o}(g)$: la fonction f est équivalente à la fonction g au voisinage du point a
- E.C : Échelle de Comparaison
- $\mathrm{DL}_n(x_0)$: développement limité à l'ordre n au voisinage de x_0

Matrice

- $[A]_{i,j}$: coefficient de position (i, j) de la matrice A
- $0_{p,q}$: matrice nulle de format (p, q)

- $0_{\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})}$: matrice nulle de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$
- $0_{\mathscr{M}_n(\mathbf{K})}$: matrice nulle de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$
- I_n : matrice identité d'ordre n
- $\delta_{k,\ell}$: symbole de Kronecker ; $\delta_{k,\ell} = 0$ si $k \neq \ell$ et $\delta_{k,\ell} = 1$ si $k = \ell$
- $E_{k,\ell}$ matrice élémentaire rectangulaire ou carrée (selon le contexte) remplie de 0 sauf à l'intersection de la ligne i et la colonne j où le coefficient vaut 1
- $A^\top$: transposée de la matrice A
- $\mathrm{Tr}(A)$: trace de la matrice A c'est-à-dire somme des éléments diagonaux
- $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$: ensemble des matrices rectangulaires de format (n,p) à coefficients dans $\mathbf{K}$
- $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$: ensemble des matrices carrés d'ordre n à coefficients dans $\mathbf{K}$
- $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$: ensemble des matrices inversibles d'ordre n à coefficients dans $\mathbf{K}$
- $\mathscr{S}_n(\mathbf{K})$, $\mathscr{A}_n(\mathbf{K})$: ensemble des matrices symétriques, antisymétriques d'ordre n à coefficients dans $\mathbf{K}$
- $\mathscr{T}_n(\mathbf{K})^+$: ensemble des matrices triangulaires supérieures d'ordre n à coefficients dans $\mathbf{K}$

Polynômes

- $\mathbf{K}[X]$: ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbf{K}$
- $\mathbf{K}_n[X]$: ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbf{K}$ de degré inférieur ou égal à n
- $\deg(P)$: degré du polynôme P

Algèbre linéaire

- sev : sous-espace vectoriel
- A.L : Application Linéaire
- $\mathrm{vect}(\mathscr{U})$: sous-espace vectoriel engendré par la famille de vecteurs $\mathscr{U}$
- $\mathscr{U} \,\|\, \mathscr{V}$: concaténation de deux familles de vecteurs
- $F+G$, $F \oplus G$: somme, somme directe de deux sev
- $\ker(f)$, $\mathrm{im}(f)$: noyau et image de l'application linéaire f
- $\mathscr{L}(E,F)$: ensemble des applications linéaires de E dans F
- $\mathscr{L}(E)$: ensemble des endomorphismes de E
- $\mathrm{GL}(E)$: ensemble des automorphismes de E c'est-à-dire des endomorphismes de E bijectifs
- $f(\mathscr{F})$: famille constituée des images par f des vecteurs de la famille $\mathscr{F}$ c'est-à-dire si $\mathscr{F} = (u_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ alors $f(\mathscr{F}) := \big(f(u_i)\big)_{1 \leqslant i \leqslant p}$
- $\mathrm{Mat}(f, \mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F)$ ou $\mathscr{M}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)$: matrice représentative de l'application linéaire f dans les bases $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$
- $\mathrm{Mat}(f, \mathscr{B}_E)$ ou $\mathscr{M}_{\mathscr{B}_E}(f)$: matrice de l'endomorphisme f dans la base $\mathscr{B}_E$
- $\dim(E)$: dimension de l'espace vectoriel E

- $\mathrm{rg}(\mathscr{F}), \mathrm{rg}(f), \mathrm{rg}(A)$: rang de la famille de vecteurs $\mathscr{F}$, de l'application linéaire f, de la matrice A
- f_A : application linéaire canoniquement associée à la matrice A
- $\ker(A)$, $\mathrm{im}(A)$: noyau et image de la matrice A
- $\mathscr{P}_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}$: matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ vers la base $\mathscr{B}'$
- $E \simeq F$: les espaces vectoriels E et F sont isomorphes
- $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}), \det(A), \det(f)$: déterminant de la famille $\mathscr{F}$ dans la base $\mathscr{B}$, déterminant de la matrice A, déterminant de l'endomorphisme f
- $\left|a_{i,j}\right|_{[n]}$: déterminant d'ordre n de la matrice $(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$

Espace euclidien (PCSI)

- $\langle\cdot,\cdot\rangle$, $(\cdot\,|\,\cdot)$: produit scalaire
- $\|\cdot\|$: norme euclidienne associée au produit scalaire
- $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ espace préhilbertien réel c'est-à-dire c'est la donnée d'un **R**-espace vectoriel E et d'un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sur E
- b.o.n : Base OrthoNormée ou Base OrthoNormale
- $\mathrm{d}(x;F)$: distance du vecteur x au sev F
- $X^{\perp}$: orthogonal de la partie X
- $F \perp G$: les sev F et G sont orthogonaux c'est-à-dire $\forall (x,y) \in F\times G,\ (x\,|\,y) = 0$

Série

- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$: série de terme général u_n
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$: somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ en cas de convergence
- $S_N = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} u_n$: somme partielle de rang N
- SATP : Série À Termes Positifs
- CV : ConVerge
- DV : DiVerge
- CVA : ConVerge Absolue

Primitive et intégrale

- $B(\omega, r)$: boule ouverte ou disque ouvert de centre ω et de rayon r
- $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ ou $\dfrac{\partial f}{\partial u}\ldots$: dérivée partielle de la fonction f par rapport à la variable x ou u
- $\nabla f(x,y)$: vecteur gradient de f en (x,y)

Géométrie dans le plan et dans l'espace (PTSI)

- $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$: angle non orienté entre les vecteurs u et v ; c'est un nombre appartenant à l'intervalle $[0,\pi]$
- $\overrightarrow{AB}$: vecteur d'origine A et d'extrémité B
- AB ou $\mathrm{d}(A,B)$: distance entre les points A et B
- $[x,y]$, $[x,y,z]$: produit mixte dans le plan, produit mixte dans l'espace
- $u \wedge v$: produit vectoriel des vecteurs u et v
- $\mathrm{d}(M,\mathscr{D})$, $\mathrm{d}(M,\mathscr{P})$: distance du point M à la droite $\mathscr{D}$ dans le plan, au plan $\mathscr{P}$ dans l'espace
- $\mathscr{S}(\Omega,r)$: sphère de centre Ω et de rayon r dans l'espace

Chapitre n° 1

Somme et produit

Sommes de référence

Soit p et q des entiers naturels tels que $p \leqslant q$. L'expression $\sum_{k=p}^{q} a_k$ désigne la somme $a_p + a_{p+1} + \ldots + a_q$. Cette somme contient $q - p + 1$ termes. Il y a quatre sommes de référence à connaître.

1. $\forall n \in \mathbf{N},\ 1 + 2 + \ldots + n = \sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
2. $\forall n \in \mathbf{N},\ 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
3. $\forall n \in \mathbf{N},\ \forall q \in \mathbf{C}$,

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n+1 & \text{si } q = 1 \end{cases}$$

4. La formule du binôme de Newton : $\forall (a,b) \in \mathbf{C}^2,\ (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

Remarques :

- Si $q < p$, on convient que $\sum_{k=p}^{q} a_k = 0$.
- Les sommes $\sum_{k=1}^{n} k$ et $\sum_{k=1}^{n} k^2$ peuvent commencer à $k = 0$ c'est-à-dire on a

$$\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=0}^{n} k \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2$$

- La formule $\sum_{k=0}^{n} q^k = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$ n'est valable que si $q \neq 1$.
- Dans la formule du binôme de Newton, l'exposant $n-k$ peut être mis sur le facteur a :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Il y a deux règles de manipulation sur les sigmas. Soit $(a_k)_{p \leqslant k \leqslant q}$ et $(b_k)_{p \leqslant k \leqslant q}$ des familles de nombres réels ou complexes.

1. La règle de séparation : $\sum_{k=p}^{q} (a_k + b_k) = \sum_{k=p}^{q} a_k + \sum_{k=p}^{q} b_k$.
2. Factorisation/développement : $\forall \lambda \in \mathbf{K}$, $\sum_{k=p}^{q} \lambda a_k = \lambda \sum_{k=p}^{q} a_k$.

Colle n° 1 ⋆

Calculer, pour $n \in \mathbf{N}$, la somme $S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{\frac{k}{2}}$.

On reconnaît la formule du binôme de Newton avec $a = 2^{\frac{1}{2}}$ et $b = 1$:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sqrt{2}^k 1^{n-k} = \boxed{(\sqrt{2}+1)^n}$$

Colle n° 2 ⋆

Calculer, pour $n \in \mathbf{N}$, la somme $S_n = \sum_{i=n}^{2n} (i+1+n)$.

On a

$$S_n = \sum_{i=n}^{2n} i + \sum_{i=n}^{2n} (1+n)$$

Commentaires

Pour se ramener à la somme de référence $\sum_{k=1}^{n} k$, on effectue un changement d'indice dans la première somme. La seconde somme est la somme d'une constante.

On effectue le changement d'indice $j = i - n$ dans la première somme. Lorsque $n \leqslant i \leqslant 2n$ alors $0 \leqslant j \leqslant n$:

$$\sum_{i=n}^{2n} i = \sum_{j=0}^{n} (j+n) = \sum_{j=0}^{n} j + \sum_{j=0}^{n} n = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)n = \frac{3n(n+1)}{2}$$

On a $\sum_{i=n}^{2n} (1+n) = (2n-n+1)(1+n) = (n+1)^2$. Donc

$$S_n = \frac{3n(n+1)}{2} + (n+1)^2 = (n+1)\left(\frac{3n}{2} + n + 1\right) = \boxed{\frac{(n+1)(5n+2)}{2}}$$

Commentaires

On effectue un test de cohérence. Par exemple, pour $n = 1$, on a $S_1 = \sum_{i=1}^{2} (i+2) = 3 + 4 = 7$.

La formule donne $\dfrac{2 \times 7}{2} = 7$ ✓

Colle n° 3 ⋆

Déterminer des réels a et b tels que $\forall k \in \mathbf{N}^*$, $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+1}$. En déduire le calcul de la somme $S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)}$.

On a $\dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+1} = \dfrac{(a+b)k + a}{k(k+1)}$. Afin que cette fraction soit égale à $\dfrac{1}{k(k+1)}$ pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, il suffit de choisir a et b tels que $a + b = 0$ et $a = 1$. On a alors $(a, b) = (1, -1)$. On a donc la décomposition :

$$\forall k \in \mathbf{N}^*, \quad \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

On a alors

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} = \boxed{\frac{n}{n+1}} \end{aligned}$$

Commentaires

La somme S_n est un exemple de somme dite télescopique. C'est une somme du type

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_n)=a_{n+1}-a_1$$

Les termes se simplifient deux à deux. Il ne reste que les termes extrêmes.

Colle n° 4 ⋆

Calculer la somme $S=\sum_{k=1}^{100}|50-k|$.

Commentaires

La valeur absolue du nombre réel x est par définition $|x|=\begin{cases}x & \text{si } x\geqslant 0\\ -x & \text{si } x\leqslant 0\end{cases}$. Il faut donc connaître le signe de $50-k$. D'où l'idée de couper la somme en deux selon que $k\leqslant 50$ ou $k\geqslant 50$.

On a

$$S=\sum_{k=1}^{50}|50-k|+\sum_{k=51}^{100}|50-k|=\sum_{k=1}^{50}(50-k)+\sum_{k=51}^{100}(-50+k)$$

Commentaires

Remarquons que la seconde somme part de $k=51$ et non $k=50$. Sinon le terme pour $k=50$ serait comptabilisé deux fois (ce qui, ici, est sans conséquence car ce terme est nul).

On effectue le changement d'indice $\ell=50-k$ dans la première somme. Lorsque k varie dans $[\![1,50]\!]$ alors ℓ varie dans $[\![0,49]\!]$. On a alors

$$\sum_{k=1}^{50}(50-k)=\sum_{\ell=0}^{49}\ell=\frac{49\times 50}{2}$$

On effectue la changement d'indice $\ell=k-50$ dans la seconde somme. Lorsque k varie dans $[\![51,100]\!]$ alors ℓ varie dans $[\![1,50]\!]$. On a alors

$$\sum_{k=51}^{100}(-50+k)=\sum_{\ell=1}^{50}\ell=\frac{50\times 51}{2}$$

On a donc $S=\dfrac{49\times 50}{2}+\dfrac{50\times 51}{2}=\dfrac{50}{2}(49+51)=\dfrac{50\times 100}{2}=50^2=\boxed{2500}$

Colle n° 5 ⋆⋆

Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on définit sur $\mathbf{R}$ la fonction f_n par $f_n(x) = (1+x)^n$. En calculant la dérivée de f_n de deux façons différentes, en déduire le calcul de la somme $S_n = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$.

Par la formule du binôme de Newton :

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

En dérivant la somme, on a, pour $x \in \mathbf{R}$:

$$f_n'(x) = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\right)' = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} x^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} x^{k-1}$$

En dérivant directement f_n, on a : $f_n'(x) = n(1+x)^{n-1}$. D'où l'égalité

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} x^{k-1} = n(1+x)^{n-1}$$

On évalue l'égalité précédente en $x = 1$; on obtient $\boxed{S_n = n2^{n-1}}$

Commentaires

Une autre façon de calculer la somme est d'utiliser la formule dite « du chef » :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

En effet, on a

$$k\binom{n}{k} = k\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{n(n-1)!}{(k-1)!\big(n-1-(k-1)\big)!} = n\binom{n-1}{k-1}$$

On a alors :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1}$$

On effectue le changement d'indice $\ell = k-1$:

$$S_n = n\sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{n-1}{\ell}$$

On reconnaît la formule du binôme de Newton avec $a = b = 1$ de sorte que

$$S_n = n(1+1)^{n-1} = n2^{n-1}$$

Colle n° 6 ⋆⋆

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On pose, pour tout $p \in \mathbf{N}^*$, $S_p = \sum_{k=1}^{n} k^p$.

1. Exprimer la somme $A = \sum_{k=1}^{n} (k+1)^4$ en fonction de S_1, S_2, S_3 et S_4.
2. À l'aide d'un changement d'indice, exprimer A en fonction de S_4 et n uniquement.
3. En déduire le calcul de la somme S_3.

1. En développant $(k+1)^4$, on a :

$$\begin{aligned} A &= \sum_{k=1}^{n} (k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1) = \sum_{k=1}^{n} k^4 + 4\sum_{k=1}^{n} k^3 + 6\sum_{k=1}^{n} k^2 + 4\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 \\ &= S_4 + 4S_3 + 6S_2 + 4S_1 + n \end{aligned}$$

2. On effectue le changement d'indice $\ell = k+1$. On a

$$A = \sum_{\ell=2}^{n+1} \ell^4 = S_4 + (n+1)^4 - 1$$

Commentaires

Lors d'un changement d'indice, il ne faut pas oublier de changer l'indice initial et final. Ici, lorsque $k = 1$, $\ell = 2$ et lorsque $k = n$, $\ell = n+1$.

3. En égalisant les deux expressions précédentes de A, on a

$$\cancel{S_4} + 4S_3 + 6S_2 + 4S_1 + n = \cancel{S_4} + (n+1)^4 - 1$$

D'où

$$\begin{aligned} 4S_3 &= (n+1)^4 - (n+1) - 6S_2 - 4S_1 \\ &= (n+1)^4 - (n+1) - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) \\ &= (n+1)\left[(n+1)^3 - 1 - n(2n+1) - 2n\right] \\ &= (n+1)\left[(n+1)^3 - (2n+1)(n+1)\right] \\ &= (n+1)^2\left[(n+1)^2 - (2n+1)\right] = n^2(n+1)^2 \end{aligned}$$

Commentaires

Le très mauvais réflexe serait, dans ce genre de calcul, de développer. Il faut, au contraire, factoriser.

D'où

$$\boxed{S_3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = S_1^2}$$

Colle n° 7 ⋆⋆

Calculer $999\,999^3$.

$$\begin{aligned} 999\,999^3 = (10^6-1)^3 &= \sum_{k=0}^{3}\binom{3}{k}(-1)^{3-k}10^{6k} \\ &= -\binom{3}{0}+\binom{3}{1}10^6-\binom{3}{2}10^{12}+\binom{3}{3}10^{18} \\ &= -1+3.10^6-3.10^{12}+10^{18} \end{aligned}$$

On a

$$\begin{array}{rcccccccc} 10^{18} & = & 1 & 000 & 000 & 000 & 000 & 000 & 000 \\ 10^{18}-1 & = & & 999 & 999 & 999 & 999 & 999 & 999 \\ 10^{18}-1-3.10^{12} & = & & 999 & 996 & 999 & 999 & 999 & 999 \\ 10^{18}-1-3.10^{12}+3.10^6 & = & & 999 & 997 & 000 & 002 & 999 & 999 \end{array}$$

On a donc

$$\boxed{999\,999^3 = 999\,997\,000\,002\,999\,999}$$

Somme double

On considère le tableau de nombres avec n lignes et p colonnes :

$$\begin{array}{ccccccc}
a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,p} & \leftarrow & \displaystyle\sum_{j=1}^{p} a_{1,j} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
a_{i,1} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,p} & \leftarrow & \displaystyle\sum_{j=1}^{p} a_{i,j} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
a_{n,1} & & a_{n,j} & \dots & a_{n,p} & \leftarrow & \displaystyle\sum_{j=1}^{p} a_{n,j} \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,1} & & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} & & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,p} & &
\end{array}$$

Le théorème de Fubini exprime le fait que pour calculer la somme de tous les nombres du tableau, on additionne les nombres soit par colonne soit par ligne.

Théorème (Fubini sur un rectangle).

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}\right)}_{\text{par ligne}} = \underbrace{\sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\right)}_{\text{par colonne}}$$

Cette somme se note $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}$.

On considère le triangle de nombres suivant avec n lignes et n colonnes :

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,s} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} & \leftarrow & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{1,j} \\
 & a_{2,2} & \cdots & a_{2,s} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2,n} & \leftarrow & \displaystyle\sum_{j=2}^{n} a_{2,j} \\
 & & \ddots & & & & \vdots & & \\
 & & & a_{s,s} & \cdots & a_{s,n-1} & a_{s,n} & \leftarrow & \displaystyle\sum_{j=s}^{n} a_{s,j} \\
 & & & & \ddots & & \vdots & & \\
 & & & & & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} & \leftarrow & \displaystyle\sum_{j=n-1}^{n} a_{n-1,j} \\
 & & & & & & a_{n,n} & \leftarrow & \displaystyle\sum_{j=n}^{n} a_{n,j} \\
\uparrow & & & & & & & & \\
\displaystyle\sum_{i=1}^{1} a_{i,1} & \displaystyle\sum_{i=1}^{2} a_{i,2} & \cdots & \displaystyle\sum_{i=1}^{s} a_{i,s} & \cdots & \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} a_{i,n-1} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,n} & &
\end{array}$$

Théorème (Fubini sur un triangle).

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} a_{i,j}\right)}_{\text{par ligne}} = \underbrace{\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j} a_{i,j}\right)}_{\text{par colonne}}$$

Cette somme se note $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_{i,j}$.

Colle n° 8 ⋆⋆

Si a et b sont deux réels, on définit

$$\min(a,b) = \begin{cases} b & \text{si } a \geqslant b \\ a & \text{si } b \geqslant a \end{cases} \quad \text{et} \quad \max(a,b) = \begin{cases} a & \text{si } a \geqslant b \\ b & \text{si } b \geqslant a \end{cases}$$

Calculer, pour $n \in \mathbf{N}^*$, la somme $S_n = \displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \min(i,j)$ et en déduire le calcul de $T_n = \displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \max(i,j)$.

Par le théorème Fubini, on a $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} \min(i,j)\right)$. Fixons i dans $[\![1,n]\!]$, on a

$$\sum_{j=1}^{n} \min(i,j) = \sum_{j=1}^{i} \min(i,j) + \sum_{j=i+1}^{n} \min(i,j) = \sum_{j=1}^{i} j + \sum_{j=i+1}^{n} i = \frac{i(i+1)}{2} + (n-i)i$$

On a donc

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i(i+1)}{2} + (n-i)i \right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (i^2 + i + 2ni - 2i^2) = \frac{1}{2} \left(-\sum_{i=1}^{n} i^2 + (2n+1) \sum_{i=1}^{n} i \right)$$
$$= \frac{1}{2} \left(-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{(2n+1)n(n+1)}{2} \right) = \boxed{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

Commentaires

Vérifions la formule pour $n = 2$. On a

$$S_2 = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant 2} \min(i,j) = \min(1,1) + \min(1,2) + \min(2,1) + \min(2,2) = 1 + 1 + 1 + 2 = 5$$

La formule donne $\frac{2 \times 3 \times 5}{6} = 5$ ✓

Pour tout $(a,b) \in \mathbf{R}^2$, on a

$$\min(a,b) + \max(a,b) = a + b$$

En effet, si $a \leqslant b$, $\min(a,b) + \max(a,b) = a + b$ et si $a \geqslant b$, $\min(a,b) + \max(a,b) = b + a$. Ainsi :

$$S_n + T_n = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \big(\min(i,j) + \max(i,j) \big) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (i+j) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} i + \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} j = 2 \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} i$$

pour des raisons de symétrie. Par le théorème de Fubini :

$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} i = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} i \right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2(n+1)}{2}$$

On en déduit que

$$T_n = n^2(n+1) - S_n = n^2(n+1) - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \boxed{\frac{n(n+1)(4n-1)}{6}}$$

Commentaires

Vérifions la formule pour $n = 2$. On a

$$T_2 = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant 2} \max(i,j) = \max(1,1) + \max(1,2) + \max(2,1) + \max(2,2) = 1 + 2 + 2 + 2 = 7$$

La formule donne $\frac{2 \times 3 \times 7}{6} = 7$ ✓

Colle n° 9 ⋆

Calculer, pour $n \in \mathbf{N}^*$, la somme double $S_n = \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \frac{i}{j}$.

D'après le théorème de Fubini, on peut sommer par colonne :

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{j} \frac{i}{j} \right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \left(\sum_{i=1}^{j} i \right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\cancel{j}} \frac{\cancel{j}(j+1)}{2} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} (j+1)$$
$$= \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{n} j + \sum_{j=1}^{n} 1 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{n(n+1)}{2} + n \right) = \boxed{\frac{n(n+3)}{4}}$$

Commentaires

On effectue un test de cohérence avec $n = 2$. Il s'agit d'additionner les nombres de ce tableau :

i \ j	1	2
1	1	$\frac{1}{2}$
2		1

ce qui donne $S_2 = 1 + \frac{1}{2} + 1 = \frac{5}{2}$. La formule donne $\frac{2 \times (2+3)}{4} = \frac{5}{2}$ ✓

Colle n° 10 ⋆⋆

En remarquant que $k = \sum_{\ell=1}^{k} 1$, calculer, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, la somme $S_n = \sum_{k=1}^{n} k 2^k$.

On a

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k 2^k = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{\ell=1}^{k} 1 \right) 2^k = \sum_{1 \leqslant \ell \leqslant k \leqslant n} 2^k$$

Commentaires

Il s'agit d'une somme sur un triangle.

D'après le théorème de Fubini,

$$S_n = \sum_{\ell=1}^{n} \left(\sum_{k=\ell}^{n} 2^k \right) = \sum_{\ell=1}^{n} \left(2^\ell \sum_{k=\ell}^{n} 2^{k-\ell} \right) = \sum_{\ell=1}^{n} \left(2^\ell \sum_{k=0}^{n-\ell} 2^k \right)$$

Commentaires

On a effectué un changement d'indice sans détailler en remplaçant $k-\ell$ par k.

$$S_n = \sum_{\ell=1}^{n} 2^\ell \frac{2^{n-\ell+1}-1}{2-1} = \sum_{\ell=1}^{n} 2^\ell (2^{n-\ell+1}-1) = \sum_{\ell=1}^{n} \left(2^{n+1}-2^\ell\right) = \sum_{\ell=1}^{n} 2^{n+1} - \sum_{\ell=1}^{n} 2^\ell$$

Commentaires

La première somme porte sur une constante car 2^{n+1} ne dépend pas de ℓ.

$$S_n = n2^{n+1} - 2\sum_{\ell=1}^{n} 2^{\ell-1} = n2^{n+1} - 2\sum_{\ell=0}^{n-1} 2^\ell = n2^{n+1} - 2\frac{2^n-1}{2-1} = n2^{n+1} - 2^{n+1} + 2 = \boxed{(n-1)2^{n+1}+2}$$

Commentaires

Proposons une autre méthode pour calculer cette somme. On définit la fonction f_n sur $\mathbf{R}\setminus\{1\}$ par $f_n(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$. On a

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1} \quad \text{car } x \neq 1$$

Dérivons f_n. Pour tout $x \in \mathbf{R}\setminus\{1\}$, on a :

$$f_n'(x) = \sum_{k=0}^{n} kx^{k-1} = \frac{(n+1)x^n(x-1) - (x^{n+1}-1)}{(x-1)^2}$$

On pose $g_n(x) := xf_n'(x) = \sum_{k=0}^{n} kx^k$. On a

$$\begin{aligned} S_n = g_n(2) &= 2\frac{(n+1)2^n(2-1) - (2^{n+1}-1)}{(2-1)^2} = (n+1)2^{n+1} - 2^{n+2} + 2 \\ &= (n-1)2^{n+1} + 2 \end{aligned}$$

Produit

Soit $(p,q) \in \mathbf{N}^2$ tel que $p \leqslant q$. Soit $(a_k)_{p \leqslant k \leqslant q}$ une famille de nombres réels ou complexes. Le produit $a_p \dots a_q$ se note $\prod_{k=p}^{q} a_k$. Il comporte $q-p+1$ facteurs. Si jamais $q < p$ alors on convient que $\prod_{k=p}^{q} a_k = 1$.

Les règles de manipulation d'un produit sont les suivantes. Pour $(a_k)_{p \leqslant k \leqslant q}$ et $(b_k)_{p \leqslant k \leqslant q}$ des familles de nombres réels ou complexes, on a :

1. $\prod_{k=p}^{q} (a_k b_k) = \prod_{k=p}^{q} a_k \prod_{k=p}^{q} b_k$.
2. Si $\lambda \in \mathbf{K}$ alors $\prod_{k=p}^{q} (\lambda a_k) = \lambda^{q-k+1} \prod_{k=p}^{q} a_k$.

La factorielle d'un entier naturel est définie de la façon suivante.

Définition. Soit $n \in \mathbf{N}$. La factorielle n est le nombre défini par

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ \prod_{k=1}^{n} k = 1 \times 2 \times \dots \times n & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

Par définition même de la factorielle, on a la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad (n+1)! = n!(n+1)$$

Colle n° 11 ⋆

Calculer, pour $n \in \mathbf{N}^*$, le produit $P_n = \prod_{k=1}^{n} \mathrm{e}^k$.

Par propriété de l'exponentielle,

$$P_n = \exp\left(\sum_{k=1}^{n} k\right) = \boxed{\mathrm{e}^{\frac{n(n+1)}{2}}}$$

Colle n° 12 ⋆

Calculer, pour un entier $n \geqslant 2$, le produit $P_n = \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right)$.

On a

$$P_n = \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k} = \prod_{k=2}^{n} (k-1) \times \frac{1}{k} = \prod_{k=2}^{n} (k-1) \prod_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$$
$$= \big(1 \times 2 \times \ldots \times (n-1)\big)\left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \ldots \times \frac{1}{n}\right) = (n-1)!\frac{1}{n!} = \boxed{\frac{1}{n}}$$

Commentaires

Effectuons un test de cohérence avec $n = 2$. D'une part, $P_2 = \prod_{k=2}^{2} \left(1 - \frac{1}{k}\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$; d'autre part, la formule trouvée donne $\frac{1}{2}$ ✓

Colle n° 13 ⋆⋆

Pour $n \in \mathbf{N}^*$, montrer que $\prod_{k=1}^{n} (4k-2) = \prod_{k=1}^{n} (n+k)$.

Méthode n° 1 : on procède par récurrence.

- Pour $n = 1$, on a d'une part $\prod_{k=1}^{1} (4k-2) = 2$ et d'autre part $\prod_{k=1}^{1} (1+k) = 2$ donc l'égalité est vraie au rang 1.
- On suppose l'égalité vraie à un rang n. On a

$$\prod_{k=1}^{n+1} (4k-2) = \left(\prod_{k=1}^{n} (4k-2)\right)\big(4(n+1)-2\big)$$

Par hypothèse de récurrence :

$$\prod_{k=1}^{n} (4k-2) = \prod_{k=1}^{n} (n+k)$$

Commentaires

Le but est de faire apparaître le produit $\prod_{k=1}^{n+1}(n+1+k)$. Pour cela, on effectue un changement d'indice.

On pose $\ell = k-1$ de sorte que $k = \ell+1$. On obtient

$$\prod_{k=1}^{n}(n+k) = \prod_{\ell=0}^{n-1}(n+1+\ell) = \frac{\cancel{n+1}}{2(\cancel{n+1})(2n+1)}\prod_{\ell=1}^{n+1}(n+1+\ell)$$

Commentaires

Pour la dernière égalité, on a utilisé

$$\prod_{\ell=0}^{n-1} a_\ell = \frac{a_0}{a_n a_{n+1}}\prod_{\ell=1}^{n+1} a_\ell$$

On en déduit que

$$\prod_{k=1}^{n+1}(4k-2) = \frac{4(n+1)-2}{2(2n+1)}\prod_{\ell=1}^{n+1}(n+1+\ell) = \prod_{\ell=1}^{n+1}(n+1+\ell)$$

La récurrence est donc établie au rang $n+1$.

Méthode n° 2 : on calcule les produits séparément. D'une part :

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n}(4k-2) &= \prod_{k=1}^{n}2(2k-1) = 2^n \times 1\times 3\times \ldots \times (2n-1)\\ &= 2^n\frac{1\times 2\times 3\times 4\times \ldots\times(2n-1)\times(2n)}{2\times 4\times\ldots\times(2n)} = 2^n\frac{(2n)!}{(2.1)(2.2)\ldots\times(2.n)}\\ &= \cancel{2^n}\frac{(2n)!}{\cancel{2^n}n!} = \frac{(2n)!}{n!}\end{aligned}$$

D'autre part :

$$\prod_{k=1}^{n}(n+k) = (n+1)\times\ldots\times(2n) = \frac{1\times 2\times\ldots\times n\times(n+1)\times\ldots\times(2n)}{1\times 2\times\ldots\times n} = \frac{(2n)!}{n!}$$

On en déduit l'égalité des produits.

Colle n° 14 ⋆⋆

Soit $\theta \in]0,\pi[$. On pose, pour $n \in \mathbf{N}^*$, $P_n = \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right)$.
En utilisant la formule $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ pour $x \in \mathbf{R}$, calculer P_n.

Si $\theta \in]0,\pi[$, pour tout entier k, $\frac{\theta}{2^k} \in]0,\pi[$ donc $\sin\left(\frac{\theta}{2^k}\right) \neq 0$.
En utilisant la formule, on a alors :

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{\sin\left(\frac{2\theta}{2^k}\right)}{2\sin\left(\frac{\theta}{2^k}\right)} = \frac{1}{2^n} \prod_{k=1}^{n} \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2^{k-1}}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2^k}\right)} = \frac{1}{2^n} \frac{\prod_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{\theta}{2^{k-1}}\right)}{\prod_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{\theta}{2^k}\right)}$$

Commentaires

On a un produit télescopique ; les facteurs se simplifient deux à deux.

On effectue le changement d'indice $\ell = k-1$ au numérateur.

$$P_n = \frac{1}{2^n} \frac{\prod_{\ell=0}^{n-1} \sin\left(\frac{\theta}{2^\ell}\right)}{\prod_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{\theta}{2^k}\right)} = \frac{1}{2^n} \frac{\sin(\theta) \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{\theta}{2^k}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right) \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{\theta}{2^k}\right)} = \boxed{\frac{\sin(\theta)}{2^n \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}}$$

Coefficient binomial

Définition. Soit $(n,p) \in \mathbf{N}^2$. On définit le coefficient binomial $\binom{n}{p}$ par

$$\binom{n}{p} = \begin{cases} 0 & \text{si } p > n \\ \dfrac{n!}{p!(n-p)!} & \text{si } p \leqslant n \end{cases}$$

On a en particulier $\forall n \in \mathbf{N}$, $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$. Par définition même, les coefficients binomiaux vérifient la relation de symétrie suivante.

$$\forall n \in \mathbf{N}, \forall p \in [\![0,n]\!], \quad \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

On a la relation dite de Pascal suivante.

Théorème (relation de Pascal). Pour tout $(n,p)\in\mathbf{N}^2$, on a

$$\binom{n}{p}+\binom{n}{p+1}=\binom{n+1}{p+1}$$

Cette relation est à la base de la construction du triangle de Pascal :

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & & & & & & \\
1 & 1 & & & & & \\
1 & 2 & 1 & & & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & & & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1
\end{array}$$

Colle n° 15 ⋆

Résoudre l'équation dans $\mathbf{N}$: $\binom{n}{2}=\binom{n}{4}$.

Commentaires

Ne pas écrire immédiatement la définition du coefficient binomial à l'aide des factorielles. Il faut tenir compte des cas particuliers où $n<4$ et $n<2$.

- Si $n=0$, $\binom{0}{2}=0$ et $\binom{0}{4}=0$. Donc 0 est solution de l'équation.
- Si $n=1$, $\binom{1}{2}=0$ et $\binom{1}{4}=0$. Donc 1 est solution de l'équation.
- Si $n=2$, $\binom{2}{2}=1$ et $\binom{2}{4}=0$. Donc 2 n'est pas solution de l'équation.
- Si $n=3$, $\binom{3}{2}=3$ et $\binom{3}{4}=0$. Donc 3 n'est pas solution de l'équation.
- On suppose que $n\geqslant 4$. On a

$$\binom{n}{2}=\binom{n}{4}\iff\frac{n!}{2!(n-2)!}=\frac{n!}{4!(n-4)!}\iff\frac{4!}{2!}=\frac{(n-2)!}{(n-4)!}\iff 12=(n-2)(n-3)$$
$$\iff n^2-5n-6=0\iff(n+1)(n-6)=0\overset{n\in\mathbf{N}}{\iff}n=6$$

L'ensemble des solutions est donc $\boxed{\mathscr{S}=\{0,1,6\}}$

Colle n° 16 ⋆⋆

Soit $(n,m) \in \mathbf{N}^2$. Calculer la somme $S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{m+k}{m}$.

Commentaires

L'astuce consiste à transformer la somme en une somme télescopique en utilisant la relation de Pascal.

D'après la relation de Pascal :

$$\binom{m+k}{m} + \binom{m+k}{m+1} = \binom{m+k+1}{m+1}$$

On en déduit

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \left[\binom{m+k+1}{m+1} - \binom{m+k}{m+1} \right] = \sum_{k=0}^{n} \binom{m+k+1}{m+1} - \sum_{k=0}^{n} \binom{m+k}{m+1}$$

On effectue le changement d'indice $\ell = k+1$ dans la première somme :

$$S_n = \sum_{\ell=1}^{n+1} \binom{m+\ell}{m+1} - \sum_{k=0}^{n} \binom{m+k}{m+1} = \underbrace{-\binom{m}{m+1}}_{=0} + \binom{m+n+1}{m+1} = \boxed{\binom{m+n+1}{m+1}}$$

Commentaires

On effectue des tests de cohérence.

- Pour $n=0$, $S_0 = \binom{m}{m} = 1$. La formule trouvée donne $\binom{m+0+1}{m+1} = 1$ ✓
- Pour $n=1$, $S_1 = \binom{m}{m} + \binom{m+1}{m} = 1 + m + 1 = m+2$.
  La formule donne $\binom{m+1+1}{m+1} = \binom{m+2}{m+1} = m+2$ ✓

Chapitre n° 2

Les nombres complexes

La trigonométrie

Il y a 37 formules de trigonométrie à connaître. Seules 5 sont à connaître par cœur :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \quad (0)$$

et les formules d'addition :

$$\forall (a,b) \in \mathbf{R}^2, \quad \begin{cases} \cos(a+b) &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) & (1) \\ \cos(a-b) &= \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) & (2) \\ \sin(a+b) &= \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b) & (3) \\ \sin(a-b) &= \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b) & (4) \end{cases}$$

On retrouve la formule d'addition pour tangente en écrivant :

$$\tan(a+b) \stackrel{\Delta}{=} \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)}{\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)}$$

On divise par $\cos(a)\cos(b)$ le numérateur et le dénominateur :

$$\tan(a+b) = \frac{\dfrac{\sin(a)\cancel{\cos(b)}}{\cos(a)\cancel{\cos(b)}} + \dfrac{\cancel{\cos(a)}\sin(b)}{\cancel{\cos(a)}\cos(b)}}{1 - \dfrac{\sin(a)\sin(b)}{\cos(a)\cos(b)}} = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$$

Pour obtenir $\tan(a-b)$, on remplace b par $-b$ dans la formule précédente et on utilise l'imparité de la fonction tangente : $\tan(-b) = -\tan(b)$.
On a donc, pour a et b des réels « convenables » :

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)} \quad (5) \qquad \text{et} \qquad \tan(a-b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)} \quad (6)$$

À partir des formules d'addition, on obtient toutes les autres formules. En faisant $a = b$ dans les formules d'addition, on obtient les formules de duplication :

$$\forall a \in \mathbf{R}, \quad \cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a) \tag{7}$$

$$\forall a \in \mathbf{R}, \quad \sin(2a) = 2\cos(a)\sin(a) \tag{8}$$

$$\text{Pour } a \text{ convenable}, \quad \tan(2a) = \frac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)} \tag{9}$$

Les deux dernières égalités dans la formule (7) proviennent de la formule (0).

Les formules de linéarisation permettent de transformer un produit de fonctions trigonométriques en une combinaison linéaire de cosinus et sinus (c'est-à-dire une expression du type $\alpha\cos+\beta\sin$). Ces formules sont utiles pour le calcul de primitives.
En effectuant (1) + (2), (2) − (1) et (3) + (4), on obtient respectivement

$$\forall (a,b) \in \mathbf{R}^2, \quad \begin{cases} \cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)] & (10) \\ \sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)] & (11) \\ \sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)] & (12) \end{cases}$$

À partir des formules (7) et (8) ou en faisant $a = b$ dans (10), (11) et (12), on a

$$\forall a \in \mathbf{R}, \quad \begin{cases} \cos^2(a) = \frac{1+\cos(2a)}{2} & (13) \\ \sin^2(a) = \frac{1-\cos(2a)}{2} & (14) \\ \sin(a)\cos(a) = \frac{1}{2}\sin(2a) & (15) \end{cases}$$

L'opération contraire de la linéarisation consiste à transformer une somme ou une différence de fonctions trigonométriques en un produit. On pose $p = a + b$ et $q = a - b$ dans les formules d'addition de sorte que

$$a = \frac{p+q}{2} \quad \text{et} \quad b = \frac{p-q}{2}$$

On obtient respectivement en faisant (1) + (2), (1) − (2), (3) + (4) et (3) − (4) :

$$\forall (p,q) \in \mathbf{R}^2, \quad \begin{cases} \cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) & (16) \\ \cos(p) - \cos(q) = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right) & (17) \\ \sin(p) + \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) & (18) \\ \sin(p) - \sin(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right) & (19) \end{cases}$$

Pour le calcul de primitives de fractions rationnelles en cos, sin, il est utile de connaître un autre groupe de formules exprimant les fonctions trigonométriques comme une fraction rationnelle (c'est-à-dire un quotient de polynômes) en la variable $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. On retrouve dans l'ordre $\tan(x)$ ou $\cos(x)$ puis $\sin(x)$. Sachant que $x = 2\frac{x}{2}$, on a par les formules de duplication :

$$\tan(x) = \frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2t}{1-t^2}$$

Par les formules de duplication :

$$\cos(x) = \cos\left(2\frac{x}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

On divise cette expression par $\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1$:

$$\cos(x) = \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

On factorise le numérateur et le dénominateur par $\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$: $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

Pour obtenir $\sin(x)$, on écrit

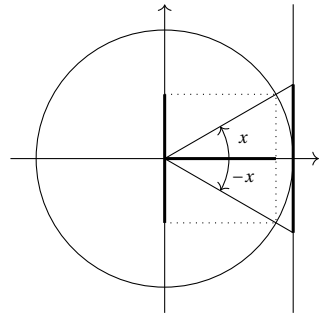
$$\sin(x) = \cos(x)\tan(x) = \frac{\cancel{1-t^2}}{1+t^2}\frac{2t}{\cancel{1-t^2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

On résume, pour un réel x convenable, en posant $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$:

$$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad (20) \qquad \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2} \quad (21) \qquad \tan(x) = \frac{2t}{1-t^2} \quad (22)$$

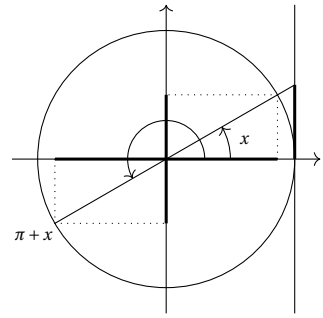
Le dernier groupe de formules (appelées formules sur les angles associés) se retrouve à l'aide d'un dessin.

$$\begin{cases} \cos(-x) = \cos(x) & (23) \\ \sin(-x) = -\sin(x) & (24) \\ \tan(-x) = -\tan(x) & (25) \end{cases}$$



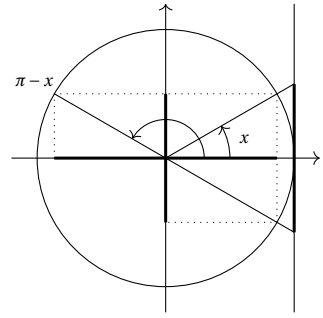
Ces formules traduisent la parité de la fonction cosinus et l'imparité des fonctions sinus et tangente.

$$\begin{cases} \cos(\pi+x) &= -\cos(x) & (26)\\ \sin(\pi+x) &= -\sin(x) & (27)\\ \tan(\pi+x) &= \tan(x) & (28) \end{cases}$$

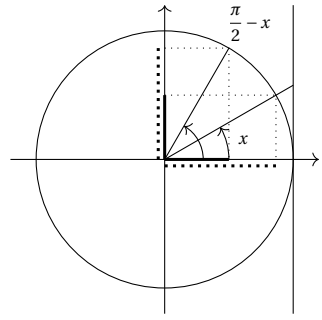


La formule (28) exprime la π-périodicité de la fonction tangente.

$$\begin{cases} \cos(\pi-x) &= -\cos(x) & (29)\\ \sin(\pi-x) &= \sin(x) & (30)\\ \tan(\pi-x) &= -\tan(x) & (31) \end{cases}$$



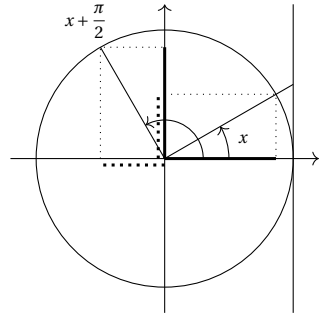
$$\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) &= \sin(x) & (32)\\ \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) &= \cos(x) & (33)\\ \tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right) &= \dfrac{1}{\tan(x)} & (34) \end{cases}$$



On retrouve la formule pour tangente en revenant à la définition :

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right) \overset{\Delta}{=} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{1}{\tan(x)}$$

$$\begin{cases} \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) &= -\sin(x) & (35)\\ \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) &= \cos(x) & (36)\\ \tan\left(x+\frac{\pi}{2}\right) &= -\dfrac{1}{\tan(x)} & (37) \end{cases}$$



On retrouve la formule pour tangente en revenant à la définition :

$$\tan\left(x+\frac{\pi}{2}\right) \overset{\Delta}{=} \frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\cos(x)}{-\sin(x)} = -\frac{1}{\tan(x)}$$

Colle n° 17 ⋆

Calculer la valeur de

$$A = \sin^4\left(\frac{\pi}{8}\right) + \sin^4\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \sin^4\left(\frac{5\pi}{8}\right) + \sin^4\left(\frac{7\pi}{8}\right)$$

Pour tout réel x, on linéarise $\sin^4(x)$. Comme $\sin^2(x) = \frac{1}{2}\big(1-\cos(2x)\big)$, on a

$$\sin^4(x) = \frac{1}{4}\big(1-\cos(2x)\big)^2 = \frac{1}{4}\big(1-2\cos(2x)+\cos^2(2x)\big)$$

Or $\cos^2(2x) = \frac{1}{2}\big(1+\cos(4x)\big)$, on a donc

$$\sin^4(x) = \frac{1}{8}\big(3-4\cos(2x)+\cos(4x)\big)$$

Commentaires

L'autre méthode pour linéariser est d'utiliser les nombres complexes. La formule d'Euler pour le sinus s'écrit $\sin(x) = \dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$. On a alors

$$\sin^4(x) = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^4 = \frac{1}{2^4}\big(e^{ix}-e^{-ix}\big)^4 = \frac{1}{2^4}\sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}\big(e^{ix}\big)^k\big(-e^{-ix}\big)^{4-k}$$

La formule de Moivre permet d'écrire :

$$\big(e^{ix}\big)^k\big(-e^{-ix}\big)^{4-k} = (-1)^{4-k}e^{ikx}e^{-(4-k)ix} = (-1)^{4-k}e^{2i(k-2)x}$$

On obtient

$$\sin^4(x) = \frac{1}{2^4}\big(e^{-i4x}-4e^{-i2x}+6-4e^{i2x}+e^{i4x}\big)$$

On utilise la formule d'Euler : $e^{i\theta}+e^{-i\theta} = 2\cos(\theta)$:

$$\sin^4(x) = \frac{1}{2^4}\big(2\cos(4x)-8\cos(2x)+6\big) = \frac{1}{2^3}\big(\cos(4x)-4\cos(2x)+3\big)$$

On en déduit que :

$$\sin^4\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{1}{8}\left(3-2\sqrt{2}\right) \qquad \sin^4\left(\frac{3\pi}{8}\right)=\frac{1}{8}\left(3+2\sqrt{2}\right)$$
$$\sin^4\left(\frac{5\pi}{8}\right)=\frac{1}{8}\left(3+2\sqrt{2}\right) \qquad \sin^4\left(\frac{7\pi}{8}\right)=\frac{1}{8}\left(3-2\sqrt{2}\right)$$

Donc $\boxed{A=\frac{3}{2}}$

Commentaires

Le calcul des quatre sinus n'est pas utile. Il suffit de calculer $\sin^4\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin^4\left(\frac{3\pi}{8}\right)$ car $\sin\left(\frac{5\pi}{8}\right)=\sin\left(\pi-\frac{3\pi}{8}\right)=\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)$. Et de même, $\sin\left(\frac{7\pi}{8}\right)=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{8}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Colle n° 18 ⋆⋆

1. Pour $\theta\in\mathbf{R}$, déterminer $\cos(5\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ uniquement.

On pose $u=\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$.

2. Montrer que u vérifie la relation $16u^5-20u^3+5u=0$.
3. Résoudre l'équation $(E):16x^5-20x^3+5x=0$.
4. Justifier que $u>\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et vérifier que $\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}<\frac{\sqrt{2}}{2}$.
5. En déduire la valeur exacte de u.
6. Déterminer alors successivement $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

1. Soit $\theta\in\mathbf{R}$. Utilisons les formules d'addition pour décomposer $\cos(5\theta)$:

$$\cos(5\theta)=\cos(4\theta+\theta)=\cos(4\theta)\cos(\theta)-\sin(4\theta)\sin(\theta)$$

Or, d'après les formules de duplication :

$$\begin{aligned}\cos(4\theta)&=2\cos^2(2\theta)-1=2\left(2\cos^2(\theta)-1\right)^2-1=2\left(4\cos^4(\theta)-4\cos^2(\theta)+1\right)-1\\&=8\cos^4(\theta)-8\cos^2(\theta)+1\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\sin(4\theta)&=2\sin(2\theta)\cos(2\theta)=4\sin(\theta)\cos(\theta)\left(2\cos^2(\theta)-1\right)\\&=8\sin(\theta)\cos^3(\theta)-4\sin(\theta)\cos(\theta)\end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned}\cos(5\theta) &= \cos(\theta)\big(8\cos^4(\theta) - 8\cos^2(\theta) + 1\big) - \sin(\theta)\big(8\sin(\theta)\cos^3(\theta) - 4\sin(\theta)\cos(\theta)\big)\\ &= 8\cos^5(\theta) - 8\cos^3(\theta) + \cos(\theta) - \big[8\sin^2(\theta)\cos^3(\theta) - 4\sin^2(\theta)\cos(\theta)\big]\\ &= 8\cos^5(\theta) - 8\cos^3(\theta) + \cos(\theta) - 8\big(1-\cos^2(\theta)\big)\cos^3(\theta) + 4\big(1-\cos^2(\theta)\big)\cos(\theta)\\ &= \boxed{16\cos^5(\theta) - 20\cos^3(\theta) + 5\cos(\theta)}\end{aligned}$$

2. On applique la relation précédente à $\theta = \dfrac{\pi}{10}$:

$$0 = 16\cos^5\left(\frac{\pi}{10}\right) - 20\cos^3\left(\frac{\pi}{10}\right) + 5\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$$

donc u vérifie l'équation $16x^5 - 20x^3 + 5x = 0$.

3.

> **Commentaires**
>
> L'équation du 5^{e} degré se ramène à la résolution d'une équation du second degré en factorisant et en effectuant un changement de variable.

On a

$$(E) \iff x(16x^4 - 20x^2 + 5) = 0 \iff x = 0 \quad \text{ou} \quad 16x^4 - 20x^2 + 5 = 0$$

Posons $X := x^2$. L'équation du 4^{e} degré s'écrit alors $16X^2 - 20X + 5 = 0$. Son discriminant est $\Delta = (-20)^2 - 4 \times 5 \times 16 = 80$. Les racines sont

$$X_1 = \frac{20 - \sqrt{80}}{32} = \frac{5 - \sqrt{5}}{8} \quad \text{ou} \quad X_2 = \frac{5 + \sqrt{5}}{8}$$

Comme X_1 et X_2 sont positifs, les racines de l'équation (E) sont

$$\boxed{\mathscr{S}_E = \left\{0, -\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}, \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}, -\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}, \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}\right\}}$$

4. Comme $0 \leqslant \dfrac{\pi}{10} < \dfrac{\pi}{4} \leqslant \pi$ et la fonction cosinus est strictement décroissante sur $[0, \pi]$, on a

$$u = \cos\left(\frac{\pi}{10}\right) > \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

On a les équivalences suivantes :

$$\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}} < \frac{\sqrt{2}}{2} \iff \frac{5-\sqrt{5}}{8} < \frac{1}{2} \iff \frac{5}{8} - \frac{1}{2} = \frac{1}{8} < \frac{\sqrt{5}}{8} \iff 1 < 5$$

Comme l'affirmation $1 < 5$ est vraie, on en déduit que

$$\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}} < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

5. u est solution de l'équation (E) d'après la question 2 donc u est égal à l'une des cinq solutions de (E). De plus, u est strictement positif donc

$$u = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}} \quad \text{ou} \quad u = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$$

Comme $u > \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}} < \frac{\sqrt{2}}{2}$, la seule possibilité pour u est

$$\boxed{u = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}}$$

6. Comme $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)$ est positif, on a

$$\sin\left(\frac{\pi}{10}\right) = \sqrt{1-\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right)} = \boxed{\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{8}}}$$

Commentaires

On peut obtenir une expression plus simple en écrivant :

$$\sin\left(\frac{\pi}{10}\right) = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{8}} = \frac{\sqrt{3-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6-2\sqrt{5}}}{4} = \frac{\sqrt{(1-\sqrt{5})^2}}{4} = \frac{|1-\sqrt{5}|}{4} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

D'après les formules de duplication : $\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$. Avec $\theta = \frac{\pi}{10}$, on obtient :

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = 2u^2 - 1 = \boxed{\frac{1+\sqrt{5}}{4}}$$

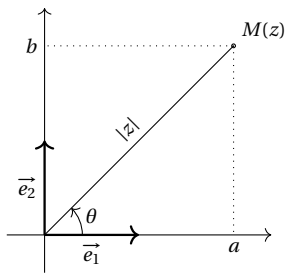
Avec $\theta = \frac{\pi}{5}$, on obtient :

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) - 1 = \boxed{\frac{\sqrt{5}-1}{4}}$$

Forme algébrique, forme exponentielle

On munit le plan $\mathscr{P}$ d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$.
Un nombre complexe z peut s'écrire sous

- la forme algébrique $z = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbf{R}^2$. a s'appelle la partie réelle et se note $\mathfrak{Re}(z)$, b s'appelle la partie imaginaire et se note $\mathfrak{Im}(z)$.
- la forme exponentielle $z = \rho\, e^{i\theta}$ (si z est non nul) avec $\rho \in \mathbf{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbf{R}$. L'interprétation géométrique de ρ et θ est $\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = OM$ (le module de z) et θ est l'angle orienté entre le vecteur $\vec{e_1}$ et le vecteur $\overrightarrow{OM}$ où M est le point d'affixe z. L'angle θ est un argument de z noté $\arg(z)$. (« un » car θ n'est défini que modulo 2π).



L'argument vérifie les propriétés suivantes. z, z' désignent des complexes non nuls, m est un entier relatif.

$$\begin{array}{ll} \arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')\,[2\pi] & z \in \mathbf{R}^* \iff \arg(z) = 0\,[\pi] \\ \arg(z^m) = m\arg(z)\,[2\pi] & z \in i\mathbf{R}^* \iff \arg(z) = \dfrac{\pi}{2}\,[\pi] \\ \arg(\overline{z}) = -\arg(z)\,[2\pi] & z \in \mathbf{R}_+^* \iff \arg(z) = 0\,[2\pi] \\ \arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')\,[2\pi] & z \in i\mathbf{R}_+^* \iff \arg(z) = \dfrac{\pi}{2}\,[2\pi] \end{array}$$

La formule $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$ a l'interprétation géométrique suivante.

Théorème. Soit A, B, C, D des points du plan tels que $A \neq B$ et $C \neq D$. L'angle orienté entre les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ est donné par la formule :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right)$$

Dans les exercices sur les nombres complexes, il faut se demander si on utilise la forme algébrique ou la forme exponentielle.
La forme algébrique est appropriée lorsqu'on additionne ou soustrait des nombres complexes car on dispose des propriétés suivantes :

- $\forall (z_1, z_2) \in \mathbf{C}^2$, $\mathfrak{Re}(z_1 + z_2) = \mathfrak{Re}(z_1) + \mathfrak{Re}(z_2)$ et $\mathfrak{Im}(z_1 + z_2) = \mathfrak{Im}(z_1) + \mathfrak{Im}(z_2)$
- $\forall z \in \mathbf{C}$, $\forall \lambda \in \mathbf{R}$, $\mathfrak{Re}(\lambda z) = \lambda \mathfrak{Re}(z)$ et $\mathfrak{Im}(\lambda z) = \lambda \mathfrak{Im}(z)$

La forme exponentielle est appropriée lorsqu'on divise ou multiplie des nombres complexes car on dispose des propriétés suivantes : $\forall (\rho_1, \rho_2) \in (\mathbf{R}_+^*)^2$, $\forall (\theta_1, \theta_2) \in \mathbf{R}^2$:

$$\frac{\rho_1\, e^{i\theta_1}}{\rho_2\, e^{i\theta_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\, e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \qquad \text{et} \qquad \rho_1\, e^{i\theta_1}\, \rho_2\, e^{i\theta_2} = \rho_1 \rho_2\, e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

La formule de Moivre permet également d'obtenir

$$\forall m \in \mathbf{Z}, \forall \rho \in \mathbf{R}_+^*, \forall \theta \in \mathbf{R}, \quad \left(\rho\, \mathrm{e}^{i\theta}\right)^m = \rho^m\, \mathrm{e}^{im\theta}$$

Colle n° 19 ⋆

Pour quelle(s) valeur(s) de l'entier relatif n a-t-on $\left(1+i\sqrt{3}\right)^n \in \mathbf{R}^+$?

Commentaires

Le nombre complexe $1+i\sqrt{3}$ est élevé à une puissance entière. On va donc utiliser la forme exponentielle de $1+i\sqrt{3}$.
Pour mettre un nombre complexe sous la forme exponentielle, on factorise par son module.
Un nombre complexe est un réel positif si, et seulement si, son argument est nul modulo 2π.

Posons $z_n := \left(1+i\sqrt{3}\right)^n$. On a $|1+i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$. On factorise donc $1+i\sqrt{3}$ par 2 :

$$1+i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] = 2\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}$$

La formule de Moivre permet d'écrire :

$$z_n = \left(2\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}\right)^n = \underbrace{2^n}_{>0}\,\mathrm{e}^{i\frac{n\pi}{3}}$$

Commentaires

L'écriture $z_n = 2^n\,\mathrm{e}^{i\frac{n\pi}{3}}$ est bien la forme exponentielle de z_n car elle est de la forme $\rho\,\mathrm{e}^{i\theta}$ avec $\rho = 2^n$ qui est un réel strictement positif.

Un argument de $\left(1+i\sqrt{3}\right)^n$ est $\dfrac{n\pi}{3}$. On a les équivalences suivantes :

$$z_n \in \mathbf{R}_+ \iff \arg(z_n) = 0\,[2\pi] \iff \exists\, k \in \mathbf{Z} \text{ tel que } \frac{n\pi}{3} = 2k\pi \iff \exists\, k \in \mathbf{Z} \text{ tel que } n = 6k.$$

Commentaires

Attention à la manipulation des congruences modulo 2π :

$$\arg(z_n) = 0\,[2\pi] \iff \frac{n\pi}{3} = 0\,[2\pi] \iff \cancel{n\pi = 0\,[2\pi]}$$

Lorsqu'on multiplie par 3, le « modulo 2π » devient « modulo 6π ». Le plus prudent est de traduire le « modulo 2π » avec un entier relatif k.

L'ensemble cherché est donc l'ensemble des multiples de 6 ce qui s'écrit

$$\boxed{\mathscr{S} = \{6k \mid k \in \mathbf{Z}\}}$$

Colle n° 20 ⋆

Déterminer dans le plan complexe l'ensemble des points d'affixes z tel que le complexe $\dfrac{z-1}{z-i}$ soit un imaginaire pur.

Commentaires

Le numérateur et le dénominateur présentent une soustraction : on va plutôt utiliser la forme algébrique de z.
Un complexe est un imaginaire pur si, et seulement si, sa partie réelle est nulle.
Pour mettre sous forme algébrique une fraction $\dfrac{a}{b}$ avec $(a,b) \in \mathbf{C} \times \mathbf{C}^*$, on multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué de b :

$$\frac{a}{b} = \frac{a\overline{b}}{b\overline{b}} = \frac{a\overline{b}}{|b|^2}$$

Posons $Z := \dfrac{z-1}{z-i}$. Soit $z = x + iy$ avec $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ un nombre complexe différent de i. On a

$$Z = \frac{x-1+iy}{x+(y-1)i} = \frac{\big(x-1+iy\big)\big(x-(y-1)i\big)}{|x+(y-1)i|^2} = \frac{x(x-1)+y(y-1)}{|x+(y-1)i|^2} + i\ldots$$

où les pointillés désignent une quantité réelle.

Commentaires

Il n'est pas nécessaire dans ce calcul de tout développer. Seule la partie réelle nous intéresse. Il n'est pas nécessaire de développer le dénominateur.

On a les équivalences suivantes :

$$Z \in i\mathbf{R} \iff \mathfrak{Re}(Z) = 0 \iff \frac{x(x-1)+y(y-1)}{|x+(y-1)i|^2} = 0 \iff x(x-1)+y(y-1) = 0$$
$$\iff x^2+y^2-x-y = 0$$

Commentaires

On reconnaît l'équation d'un cercle. L'équation cartésienne du cercle de centre de coordonnées (a,b) et de rayon r est de la forme

$$(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2$$

Ce qui donne après développement une équation du type :

$$x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma = 0$$

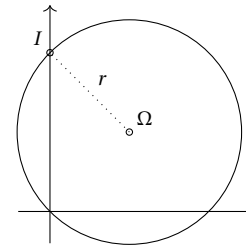
Pour transformer l'équation $x^2+y^2-x-y=0$ en une équation cartésienne de cercle, on considère x^2-x comme le début d'une identité remarquable : $x^2-x = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$.

On a

$$Z \in i\mathbf{R} \iff \left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4} = 0 \iff \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

Notons que le point I d'affixe i c'est-à-dire le point de coordonnées $(0,1)$ vérifie l'équation ci-dessus. On en déduit que l'ensemble cherché est le cercle de centre le point Ω de coordonnées $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ et de rayon $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$ noté $\mathscr{C}(\Omega;r)$ privé du point I. On a donc

$$\boxed{\mathscr{S} = \mathscr{C}(\Omega,r)\setminus\{I\}}$$



Colle n° 21 ⋆⋆

Soit $z \in \mathbf{C}$. On considère dans le plan complexe les points $A(1)$, $M(z)$ et $N(1+z^2)$. Déterminer les points M tels que les points A, M et N soient alignés.

Commentaires

On commence par étudier les cas particuliers c'est-à-dire les cas où deux points sont confondus.

Dans les cas où au moins deux points sont confondus alors les trois points sont alignés.

- On a $A = M \iff z = 1$.
- On a $A = N \iff 1 = 1 + z^2 \iff z^2 = 0 \iff z = 0$.
- On a $M = N \iff z = 1 + z^2 \iff z^2 - z + 1 = 0 \iff z = \dfrac{1 \pm \sqrt{3}i}{2} = \mathrm{e}^{\pm \frac{i\pi}{3}}$.

Dans la suite, on suppose que $z \in \mathbf{C} \setminus \{0, 1, \mathrm{e}^{\pm \frac{i\pi}{3}}\}$.
Dans ce cas, les trois points A, M et N sont deux à deux distincts. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} A, M, N \text{ sont alignés } &\iff (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}) = 0\,[\pi] \iff \arg\left(\frac{z_N - z_A}{z_M - z_A}\right) = 0\,[\pi] \\ &\iff \arg\left(\frac{z^2}{z-1}\right) = 0\,[\pi] \iff \frac{z^2}{z-1} \in \mathbf{R} \iff \mathfrak{Im}\left(\frac{z^2}{z-1}\right) = 0 \end{aligned}$$

Commentaires

L'argument est bien défini car $z_M - z_A \neq 0$ et et $z_N - z_A \neq 0$.

Posons à présent $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. On a

$$\frac{z^2}{z-1} = \frac{(x+iy)^2}{x-1+iy} = \frac{(x^2 - y^2 + 2ixy)(x-1-iy)}{|x-1+iy|^2} = \underbrace{\cdots}_{\in \mathbf{R}} + i\frac{-y(x^2-y^2) + 2xy(x-1)}{|x-1+iy|^2}$$

On a donc

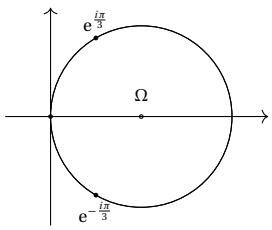
$$A, M, N \text{ sont alignés } \iff -y(x^2 - y^2) + 2xy(x-1) = 0 \iff y(x^2 + y^2 - 2x) = 0$$

On obtient les équations $y = 0$ (l'axe des abscisses) et $x^2 + y^2 - 2x = 0$. On a

$$x^2 + y^2 - 2x = 0 \iff (x-1)^2 + y^2 = 1 \iff (x, y) \in \mathscr{C}\big((1,0); 1\big)$$

L'ensemble cherché est donc l'axe des abscisses (Ox) et le cercle $\mathscr{C}\big(\Omega; 1\big)$ de centre $\Omega(1,0)$ et de rayon 1.
Examinons les cas particuliers. Les points d'affixes $z = 1$ ou $z = 0$ appartiennent à l'axe des abscisses. Les points d'affixes $\mathrm{e}^{\pm \frac{i\pi}{3}}$ appartiennent au cercle. L'ensemble cherché est donc

$$\boxed{\mathscr{S} = \mathscr{C}\big(\Omega; 1\big) \cup (Ox)}$$



Commentaires

On peut vérifier par exemple que le point M d'affixe $z = 1 + i$ qui appartient au cercle est solution du problème. On a $1 + z^2 = 1 + (1+i)^2 = 1 + 2i$ donc N a pour affixe $1 + 2i$. Les points A, M et N sont sur la droite verticale d'équation $x = 1$ donc sont bien alignés.

Conjugué, module, exponentielle d'un complexe

On rappelle les définitions suivantes.

Définition. Soit $z = a + ib \in \mathbf{C}$ avec $(a, b) \in \mathbf{R}^2$. On note M le point d'affixe z *i.e.* le point de coordonnées (a, b). Soit $\theta \in \mathbf{R}$.

- Le module de z est $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = OM$.
- Le conjugué de z est $\overline{z} = a - ib$. Le point M' d'affixe $\overline{z}$ est le symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses.
- $\mathrm{e}^{i\theta} := \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.
- $\mathrm{e}^{z} := \mathrm{e}^{a}\,\mathrm{e}^{ib}$ autrement dit $\mathrm{e}^{z} = \mathrm{e}^{\mathfrak{Re}(z)}\,\mathrm{e}^{i\mathfrak{Im}(z)}$.

Le module, le conjugué et l'exponentielle vérifient les propriétés suivantes. z, z' sont des complexes (non nuls quand c'est nécessaire), n un entier naturel et m un entier relatif.

$$z\overline{z} = |z|^2 \qquad |zz'| = |z||z'| \qquad |z^n| = |z|^n \qquad \left|\frac{z'}{z}\right| = \frac{|z'|}{|z|}$$

$$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'} \qquad \overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'} \qquad \overline{z^n} = (\overline{z})^n \qquad \overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\overline{z'}}{\overline{z}}$$

$$\overline{\mathrm{e}^{z}} = \mathrm{e}^{\overline{z}} \qquad \mathrm{e}^{z}\,\mathrm{e}^{z'} = \mathrm{e}^{z+z'} \qquad \frac{\mathrm{e}^{z}}{\mathrm{e}^{z'}} = \mathrm{e}^{z-z'} \qquad (\mathrm{e}^{z})^m = \mathrm{e}^{mz}$$

La dernière égalité pour z un nombre imaginaire pur s'appelle la formule de Moivre.

Théorème (formule de Moivre). $\forall m \in \mathbf{Z}, \forall \theta \in \mathbf{R}, \left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)^m = \mathrm{e}^{im\theta}$.

Le module vis-à-vis d'une somme se comporte ainsi.

Théorème (inégalités triangulaires).

$$\forall (z, z') \in \mathbf{C}^2, \quad |z + z'| \leqslant |z| + |z'| \quad \text{et} \quad \big||z| - |z'|\big| \leqslant |z - z'|$$

Les fonctions trigonométriques cosinus et sinus s'expriment en fonction de $\mathrm{e}^{i\theta}$:

Théorème (formules d'Euler).

$$\forall \theta \in \mathbf{R}, \quad \cos(\theta) = \frac{\mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{\mathrm{e}^{i\theta} - \mathrm{e}^{-i\theta}}{2i}$$

Colle n° 22 ⋆

Résoudre l'équation $e^z = -1 + i\sqrt{3}$ d'inconnue complexe z.

Commentaires

La méthode consiste à mettre le second membre sous la forme exponentielle.

On a $|-1+i\sqrt{3}| = 2$ d'où $-1+i\sqrt{3} = 2\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

Posons $z = x+iy$ avec $(x,y) \in \mathbf{R}^2$. On a, par définition, $e^z = e^x e^{iy}$ de sorte que l'équation s'écrit :

$$\begin{aligned} e^x e^{iy} = 2e^{\frac{2i\pi}{3}} &\iff \left(e^x = 2 \text{ et } \exists k \in \mathbf{Z} \text{ tel que } y = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right) \\ &\iff \left(x = \ln(2) \text{ et } \exists k \in \mathbf{Z} \text{ tel que } y = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right) \end{aligned}$$

Commentaires

On a utilisé « l'unicité » de l'écriture d'un nombre complexe sous forme exponentielle : $\forall (\rho_1,\rho_2) \in (\mathbf{R}_+^*)^2, \forall (\theta_1,\theta_2) \in \mathbf{R}^2$,

$$\rho_1 e^{i\theta_1} = \rho_2 e^{i\theta_2} \Rightarrow \left((\rho_1 = \rho_2) \text{ et } \exists k \in \mathbf{Z} \text{ tel que } \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi\right)$$

On en déduit que

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ \ln(2) + i\left(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right) \,\middle|\, k \in \mathbf{Z} \right\}}$$

Colle n° 23 ⋆

On note $\mathbf{U}$ l'ensemble des complexes de module 1. Soit $(a,b) \in \mathbf{U}^2$ tel que $a \neq b$. Montrer que

$$\forall z \in \mathbf{C}, \quad \frac{z + ab\overline{z} - a - b}{a-b} \in i\mathbf{R}$$

Commentaires

Passer en forme algébrique n'est pas une bonne idée ici ! Un nombre complexe Z est un imaginaire pur si, et seulement si, $\overline{Z} = -Z$. On va donc calculer le conjugué de la fraction. Penser à la formule $|u|^2 = u\overline{u}$.

Comme a et b sont de module 1, on a $1 = |a|^2 = a\overline{a}$ donc $\overline{a} = \dfrac{1}{a}$. De même, $\overline{b} = \dfrac{1}{b}$.
Notons Z la fraction de l'énoncé. Par propriété sur le conjugué :

$$\overline{Z} = \frac{\overline{z} + \overline{a}\overline{b}\overline{z} - \overline{a} - \overline{b}}{\overline{a} - \overline{b}} = \frac{\overline{z} + \frac{z}{ab} - \frac{1}{a} - \frac{1}{b}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} = \frac{ab\overline{z} + z - b - a}{b - a} = -Z$$

Donc $Z \in i\mathbf{R}$.

Colle n° 24 ⋆⋆

Soit $z \in \mathbf{C}$. Déterminer le module et un argument de $\mathrm{e}^{\mathrm{e}^z}$.

Commentaires

Par définition, $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{\mathfrak{Re}(z)}\,\mathrm{e}^{i\mathfrak{Im}(z)} = \mathrm{e}^{\mathfrak{Re}(z)}\left[\cos\left(\mathfrak{Im}(z)\right) + i\sin\left(\mathfrak{Im}(z)\right)\right]$.

Posons $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. On a

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x\left[\cos(y) + i\sin(y)\right] = \underbrace{\mathrm{e}^x\cos(y)}_{\substack{\text{partie}\\ \text{réelle}}} + i\underbrace{\mathrm{e}^x\sin(y)}_{\substack{\text{partie}\\ \text{imaginaire}}}$$

On en déduit par définition de l'exponentielle d'un nombre complexe :

$$\mathrm{e}^{\mathrm{e}^z} = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x\cos(y)}\,\mathrm{e}^{i\left(\mathrm{e}^x\sin(y)\right)}$$

Comme $\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x\cos(y)} > 0$, l'égalité précédente est la forme exponentielle de $\mathrm{e}^{\mathrm{e}^z}$. On a donc

$$\boxed{\left|\mathrm{e}^{\mathrm{e}^z}\right| = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x\cos(y)}} \quad \text{et} \quad \boxed{\arg\left(\mathrm{e}^{\mathrm{e}^z}\right) = \mathrm{e}^x\sin(y)\ [2\pi]}$$

Commentaires

Ne pas oublier le modulo 2π ; un argument est un angle et un angle n'est défini qu'à $2k\pi$ près ($k \in \mathbf{Z}$).

Colle n° 25 ⋆⋆⋆

À quelle condition sur les complexes z et z' a-t-on égalité dans l'inégalité triangulaire ?

Autrement dit, on cherche pour quels $(z, z') \in \mathbf{C}^2$ on a $|z+z'| = |z|+|z'|$. Comme un module est positif, cette égalité est équivalente à $|z+z'|^2 = \left(|z|+|z'|\right)^2$. On note $\delta(z) = |z+z'|^2 - \left(|z|+|z'|\right)^2$. Il y a égalité dans l'inégalité triangulaire si, et seulement si, $\delta(z) = 0$.

Commentaires

Pour calculer avec le module, on utilise la formule $|z|^2 = z\overline{z}$.

On a

$$\begin{aligned}\delta(z) &= (z+z')(\overline{z+z'}) - \left(|z|^2 + |z'|^2 + 2|z||z'|\right)\\ &= (z+z')(\overline{z}+\overline{z'}) - \left(|z|^2 + |z'|^2 + 2|\overline{z}||z'|\right) \quad \text{car } |z| = |\overline{z}|\\ &= z\overline{z} + z\overline{z'} + z'\overline{z} + z'\overline{z'} - \left(|z|^2 + |z'|^2 + 2|\overline{z}z'|\right) \quad \text{car } |\overline{z}||z'| = |\overline{z}z'|\\ &= |z|^2 + |z'|^2 + 2\mathfrak{Re}(z'\overline{z}) - \left(|z|^2 + |z'|^2 + 2|\overline{z}z'|\right)\\ &= 2\left(\mathfrak{Re}(z'\overline{z}) - |\overline{z}z'|\right)\end{aligned}$$

On a donc $\delta(z) = 0 \iff \mathfrak{Re}(z'\overline{z}) = |z'\overline{z}|$. Soit à présent $u = x + iy \in \mathbf{C}$ avec $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. On a

$$\mathfrak{Re}(u) = |u| \iff x = \sqrt{x^2+y^2} \iff (x \geqslant 0 \text{ et } x^2 = x^2 + y^2) \iff (x \geqslant 0 \text{ et } y = 0) \iff u \in \mathbf{R}_+$$

On a donc $\delta(z) = 0$ si, et seulement si, $z'\overline{z} \in \mathbf{R}_+$. Si $z = 0$ ou $z' = 0$ alors cette condition est vérifiée. Supposons que z et z' soient non nuls. Alors

$$z'\overline{z} \in \mathbf{R}_+ \iff \arg(z'\overline{z}) = 0\,[2\pi] \iff \arg(z') - \arg(z) = 0\,[2\pi] \iff \arg(z) = \arg(z')\,[2\pi]$$

Commentaires

Le nombre zéro n'a pas d'argument ; c'est la raison pour laquelle on écarte le cas où le produit $z'\overline{z}$ est nul.

Conclusion : $|z+z'| = |z| + |z'|$ si, et seulement si, les points $M(z)$ et $M'(z')$ sont sur une même demi-droite d'origine O.

Équation du second degré

Une racine carrée d'un nombre complexe z est un nombre complexe u tel que $u^2 = z$. Tout nombre complexe non nul possède deux racines carrées opposées. Dans le cas où z est un nombre réel négatif, les racines carrées de z sont $i\sqrt{-z}$ ou $-i\sqrt{-z}$.

Théorème (Équation du second degré). Soit $(a, b, c) \in \mathbf{C}^* \times \mathbf{C}^2$. On note $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de l'équation

$$(E) : az^2 + bz + c = 0$$

du second degré d'inconnue complexe z.

- Si $\Delta \neq 0$ alors on note δ une racine carrée de Δ. L'équation (E) admet alors deux solutions :

$$\mathscr{S} = \left\{\frac{-b+\delta}{2a}; \frac{-b-\delta}{2a}\right\}$$

► Si $\Delta = 0$ alors (E) admet une unique solution :

$$\mathscr{S} = \left\{ -\frac{b}{2a} \right\}$$

Colle n° 26 ⋆

Résoudre dans $\mathbf{C}$ l'équation $z^2 + 4z + 4(1-i) = 0$. On mettra les solutions sous forme algébrique.

Le discriminant est $\Delta = 4^2 - 4^2(1-i) = 16i$. Soit $\delta = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ une racine carrée de Δ. On a

$$\delta^2 = \Delta \iff (x+iy)^2 = 16i \iff \left\{ \begin{array}{lcl} x^2 - y^2 & = & 0 \\ 2xy & = & 16 \end{array} \right.$$

Commentaires

La méthode pour résoudre ce système de deux équations à deux inconnues consiste à ajouter une troisième équation provenant du module.

Ajoutons une troisième équation :

$$\delta^2 = \Delta \Rightarrow |\delta^2| = 16 \iff |\delta|^2 = 16 \iff x^2 + y^2 = 16$$

Commentaires

Il n'y a pas équivalence entre $z = z'$ et $|z| = |z'|$. On a seulement l'implication

$$z = z' \Rightarrow |z| = |z'|$$

On a donc

$$\Delta = \delta^2 \iff (x+iy)^2 = 16i \iff \left\{ \begin{array}{lcll} x^2 - y^2 & = & 0 & (1) \\ x^2 + y^2 & = & 16 & (2) \\ 2xy & = & 16 & \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{lcll} x^2 & = & 8 & (1)+(2) \\ y^2 & = & 8 & (2)-(1) \\ \text{sgn}(xy) & = & \text{positif} & \end{array} \right.$$

On a donc $\delta = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\,i$ (ou son opposé).