PC/PC*
PSI/PSI*

MATHS

1 DEVOIR CORRIGÉ PAR SEMAINE

avec annales & corrigés commentés

Maxime Bailleul

ellipses

PC/PC*
PSI/PSI*

MATHS

1 DEVOIR CORRIGÉ PAR SEMAINE

Maxime BAILLEUL

Enseignant de mathématiques en MP
au lycée Robespierre (Arras)

ellipses

Conception graphique couverture : Nathalie FOULLOY

ISBN 9782340-114661

Dépôt légal : juin 2026

www.editions-ellipses.fr

Sommaire

Devoirs

Annales

Corrigés

Introduction

Méthodes de travail en PSI-PC

Avec 6 ou 7 heures de cours de Mathématiques et 3 heures de travaux dirigés par semaine, le rythme est très soutenu pour un étudiant de PSI-PC.

Afin de se préparer au mieux au concours, voici quelques conseils de méthodologie :

— La *connaissance du cours* est primordiale. Il faut être très attentif en classe et relire son cours tous les soirs pour pouvoir suivre lors du prochain cours. Il faut profiter du week-end, ou d'un moment libre dans la semaine, pour étudier celui-ci : apprendre les définitions et les théorèmes, comprendre et savoir refaire les preuves et les exemples. C'est la priorité avant d'attaquer des exercices.

— Il faut *pratiquer* et ne pas juste comprendre les corrections de l'enseignant. Il faut traiter de nombreux exercices (de TD par exemple) pour se confronter à des problèmes.

— Il faut se *préparer au concours*, en condition, avec des devoirs plus longs comme vous trouverez dans ce livre.

Que contient ce livre ?

Ce livre contient :

— 25 devoirs, de durée variable, vous permettant de réviser tous les chapitres de l'année. Les corrections de ceux-ci sont très détaillées et contiennent de nombreux rappels de cours et de méthodologie.

— 2 sujets de concours complets, corrigés comme les devoirs précédents, à traiter avant les écrits des concours.

Avant les énoncés des devoirs, vous trouverez un tableau récapitulatif permettant d'associer chaque devoir aux différents thèmes du programme. Les devoirs n'ont pas nécessairement la même progression que votre cours mais le tableau permet de s'y retrouver.

Mise en garde

Travailler le sujet directement avec le corrigé est très peu utile. Il faut d'abord essayer de répondre aux questions, et en cas de blocage, comprendre avec le corrigé les points à retravailler.

Les devoirs couvrent tous les chapitres de l'année mais pas toutes les notions : c'est impossible dans un seul livre. Il est donc très important de compléter son travail avec les exemples du cours et les exercices de travaux dirigés.

Bon courage !

Devoirs par thèmes

Les tableaux suivants vous permettront de choisir les devoirs à travailler, suivant l'avancement de votre cours.

Les thèmes donnés sont généraux mais vous trouverez au début de chaque devoir des sous-thèmes beaucoup plus précis.

Chapitres \ Devoirs	1	2	3	4	5	6	7
Algèbre linéaire et réduction			X			X	
Espaces euclidiens						X	
Topologie et espaces normés					X		
Séries numériques	X	X		X	X		
Suites et séries de fonctions				X			
Séries entières							
Intégration							X
Probabilités							
Équations différentielles							
Calcul différentiel							

Chapitres \ Devoirs	8	9	10	11	12	13	14
Algèbre linéaire et réduction							X
Espaces euclidiens							
Topologie et espaces normés				X			X
Séries numériques		X	X				
Suites et séries de fonctions			X	X		X	
Séries entières						X	
Intégration	X				X	X	
Probabilités							
Équations différentielles							
Calcul différentiel							

Chapitres \ Devoirs	15	16	17	18	19	20	21
Algèbre linéaire et réduction	X			X			
Espaces euclidiens						X	
Topologie et espaces normés							
Séries numériques							
Suites et séries de fonctions							
Séries entières							
Intégration			X				
Probabilités		X			X		
Équations différentielles							X
Calcul différentiel							

Dans le dernier tableau, S1 et S2 désignent les deux sujets complets.

Chapitres \ Devoirs	22	23	24	25	S1	S2
Algèbre linéaire et réduction		X		X	X	
Espaces euclidiens			X	X	X	
Topologie et espaces normés			X		X	X
Séries numériques						X
Suites et séries de fonctions	X					
Séries entières	X					X
Intégration	X					
Probabilités						
Équations différentielles						
Calcul différentiel			X			

DEVOIRS

Intégrales de Wallis et formule de Stirling

Temps de résolution
1 heure 20

Thèmes abordés

— Intégrales (de fonctions continues sur un segment).
— Suites numériques.
— Séries numériques.
— Développements limités.

Conseils pour aborder le devoir

— Savoir étudier une suite dont le terme général est défini par une intégrale.
— Connaître les développements limités usuels.
— Savoir manipuler des équivalents.
— Savoir étudier la nature d'une série à l'aide d'un critère de comparaison.

Énoncé du devoir

1. Pour tout entier naturel n, on pose :

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^n \, \mathrm{d}t$$

   (a) Calculer W_0 et W_1.

   (b) Montrer que pour tout entier $n \geq 0$,

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^n \, \mathrm{d}t$$

   (c) Montrer que la suite $(W_n)_{n\geq 0}$ est strictement décroissante.

   (d) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout entier $n \geq 0$,

$$W_{n+2} = \left(\frac{n+1}{n+2}\right) W_n$$

   (e) En déduire que pour tout entier $p \geq 0$,

$$W_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad W_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$$

   (f) Montrer que pour tout entier $n \geq 0$,

$$W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}$$

   (g) Montrer que pour tout entier $n \geq 0$,

$$1 - \frac{1}{n+2} < \frac{W_{n+1}}{W_n} < 1$$

   et en déduire que $W_n \underset{+\infty}{\sim} W_{n+1}$.

   (h) Montrer que :

$$W_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

2. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par :

$$\forall n \geq 1, \; u_n = \frac{n!\mathrm{e}^n}{n^n\sqrt{n}}$$

   et $(v_n)_{n\geq 2}$ la suite définie par :

$$\forall n \geq 2, \; v_n = \ln(u_n) - \ln(u_{n-1})$$

(a) Exprimer simplement v_n en fonction de $n \geq 2$ et en donner un développement asymptotique à l'ordre 2 en $\frac{1}{n}$.

(b) En déduire que $\sum_{n \geq 2} v_n$ converge.

Montrer alors que les suites $(\ln(u_n))_{n \geq 1}$ puis $(u_n)_{n \geq 1}$ convergent puis qu'il existe un réel $K > 0$ tel que :

$$n! \underset{+\infty}{\sim} K \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{n}$$

(c) En utilisant cet équivalent, donner un équivalent de W_{2p} quand p tend vers $+\infty$ et en déduire la valeur de K pour retrouver la formule de Stirling.

Développement asymptotique de la série harmonique

Temps de résolution
2 heures 30

Thèmes abordés

— Suites numériques.
— Séries numériques.
— Développements limités.

Conseils pour aborder le devoir

— Connaître l'*égalité des accroissements finis*.
— Savoir effectuer une *comparaison série-intégrale*.
— Être à l'aise avec des *techniques calculatoires* (télescopage, majoration d'intégrale, développements limités...).

Énoncé du devoir

Dans tout le devoir, on considère la suite $(H_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$\forall n \geq 1,\ H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

et la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$\forall n \geq 1,\ u_n = H_n - \ln(n)$$

Partie 1

1. Établir pour tout entier naturel k non nul, l'encadrement suivant :

$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$$

2. (a) Quelle est la limite de la suite $(H_n)_{n\geq 1}$?
   (b) Montrer pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\ln(n) + \frac{1}{n} \leq H_n \leq \ln(n) + 1$$

   (c) En déduire un équivalent simple de H_n quand n tend vers $+\infty$.
3. (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.
   (b) En déduire que cette suite est convergente. On note γ sa limite. Montrer que γ appartient à $[0, 1]$.
4. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On pose pour tout entier naturel k non nul :

$$J_k = \frac{1}{2} \int_k^{k+1} \left(t - k - \frac{1}{2}\right)^2 f''(t)\,\mathrm{d}t$$

   (a) Établir pour tout entier naturel k non nul, l'égalité suivante :

$$J_k = \frac{f'(k+1) - f'(k)}{8} - \frac{f(k+1) + f(k)}{2} + \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t$$

   (b) En déduire pour tout entier naturel n non nul, la relation suivante :

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \frac{f(1) + f(n)}{2} + \frac{f'(n) - f'(1)}{8} + \int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{k=1}^{n-1} J_k$$

5. On suppose dans cette question que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x > 0,\ f(x) = \frac{1}{x}$$

(a) Établir pour tout entier naturel k non nul, la double inégalité suivante :

$$0 \leq J_k \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{4t^3} \, \mathrm{d}t$$

(b) En déduire que la série de terme général J_k est convergente.

(c) En déduire également, pour tout entier naturel n non nul, l'encadrement suivant :

$$0 \leq \sum_{k=n}^{+\infty} J_k \leq \frac{1}{8n^2}$$

(d) Montrer que :

$$H_n \underset{+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Partie 2

On admet dans la suite le résultat suivant : si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites de réels strictement positifs, et la série de terme général b_n converge, alors la série de terme général a_n converge et :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k$$

6. Soit α un réel strictement supérieur à 1.

(a) Montrer que pour tout entier k supérieur ou égal à 2 , on a :

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha} \, \mathrm{d}t \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^\alpha} \, \mathrm{d}t$$

(b) En déduire pour tout entier naturel n non nul et pour tout entier N strictement supérieur à n, la double inégalité suivante :

$$\int_{n+1}^{N+1} \frac{1}{t^\alpha} \, \mathrm{d}t \leq \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_n^N \frac{1}{t^\alpha} \, \mathrm{d}t$$

(c) Établir l'équivalence suivante :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha-1} \times \frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

Partie 3

On considère les suites $(x_n)_{n\geq 1}$ et $(y_n)_{n\geq 2}$ définies par :

$$\forall n \geq 1,\ x_n = u_n - \frac{1}{2n}$$

et :

$$\forall n \geq 2,\ y_n = x_n - x_{n-1}$$

7. (a) Quelle est la limite de la suite $(x_n)_{n\geq 1}$?

   (b) Justifier pour tout entier naturel n non nul, l'égalité suivante :

$$\gamma - x_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} y_k$$

   (c) En déduire pour tout entier naturel n non nul, l'égalité suivante :

$$\gamma - x_n = \frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} + 2\ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)\right)$$

8. (a) Montrer que :

$$\frac{1}{k-1} \underset{+\infty}{=} \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^3} + o\left(\frac{1}{k^3}\right)$$

   (b) Montrer que :

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} + 2\ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{3k^3}$$

9. Montrer finalement le développement asymptotique suivant :

$$H_n \underset{+\infty}{=} \gamma + \ln(n) + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Révisions d'algèbre linéaire

Temps de résolution
2 heures

Thèmes abordés

— Espaces vectoriels et applications linéaires.
— Matrices semblables et changement de bases.
— Équations différentielles linéaires d'ordre un.

Conseils pour aborder le devoir

— Savoir déterminer la matrice d'un endomorphisme dans une base donnée.
— Savoir déterminer une matrice de passage et connaître la *formule de changement de base.*
— Savoir étudier une symétrie vectorielle.
— Connaître l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre un.

Énoncé du devoir

Dans tout ce devoir, n désigne un entier naturel non nul, a et b sont deux nombres réels.

La notation $\mathbb{R}_n[X]$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ et ayant un degré inférieur ou égal à n.

Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose :

$$\varphi_n(P) = (X-a)(X-b)P' - n\left(X - \frac{a+b}{2}\right)P$$

Partie 1 : étude de φ_1

Dans toute cette partie, on suppose que $n = 1$. On pose donc :

$$\forall P \in \mathbb{R}_1[X],\ \varphi_1(P) = (X-a)(X-b)P' - \left(X - \frac{a+b}{2}\right)P$$

1. Démontrer que φ_1 est un endomorphisme de $\mathbb{R}_1[X]$.
2. Soit $\mathcal{B}_1 = (1, X)$ la base canonique de $\mathbb{R}_1[X]$. Déterminer $M_1 = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(\varphi_1)$.
3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que φ_1 soit bijective.
4. On suppose, dans cette question seulement, que $a \neq b$.

   (a) Démontrer que la famille $\mathcal{B} = (X-a, X-b)$ est une base de $\mathbb{R}_1[X]$.

   (b) Calculer $\varphi_1(X-a)$ et $\varphi_1(X-b)$ puis en déduire $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi_1)$.

   (c) Déterminer la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_1$ à la base $\mathcal{B}$, notée $P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}}$. Déterminer de même la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}_1$, notée $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1}$.

   (d) Donner une égalité reliant les matrices $M, M_1, P_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1}$ et $P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}}$.

   (e) Soit $p \in \mathbb{N}$. Calculer M^p puis en déduire une expression explicite de M_1^p.

5. On s'intéresse dans cette question à l'ensemble :

$$\Gamma = \left\{\alpha \mathrm{I}_2 + \beta M_1 + \gamma M_1^2 + \delta M_1^3, (\alpha,\beta,\gamma,\delta) \in \mathbb{R}^4\right\}$$

   (a) Démontrer que Γ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

   (b) Prouver que les matrices M_1^2 et M_1^3 sont des combinaisons linéaires de M_1 et I_2.

   (c) Déterminer une base de Γ.

6. On suppose dans cette question que $a = 4$ et $b = 2$. Déterminer φ_1^2. En déduire la nature de φ_1 et préciser ses éléments caractéristiques (on donnera une base de chacun des deux espaces vectoriels concernés).

Partie 2 : quelques généralités sur φ_n

7. Démontrer que φ_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
8. On se propose dans cette question de déterminer $\operatorname{Ker}(\varphi_n)$.

   On pose $\alpha = \max(a, b)$ et on considère l'intervalle $I =]\alpha, +\infty[$.

   (a) Démontrer que la fonction $f : x \longmapsto \frac{2x-(a+b)}{x^2-(a+b)x+ab}$ est continue sur I.

   (b) Déterminer une primitive F de la fonction f sur I.

   (c) Résoudre sur l'intervalle I l'équation différentielle (E) :

   $$y' - \frac{nx - n\frac{a+b}{2}}{(x-a)(x-b)}y = 0$$

   (d) On suppose que n est pair et on écrit $n = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}^*$. Déduire de la question 8.(c) une base de l'espace vectoriel $\operatorname{Ker}(\varphi_{2p})$.

   (e) On suppose maintenant que n est impair et on écrit $n = 2p+1$ avec $p \in \mathbb{N}$. Déduire de la question 8.(c) une base de l'espace vectoriel $\operatorname{Ker}(\varphi_{2p+1})$ (on pourra discuter suivant les valeurs de a et b).

Étude d'une somme de série de fonctions

Temps de résolution
1 heure

Thèmes abordés

— Séries numériques.
— Suites de fonctions.
— Séries de fonctions.

Conseils pour aborder le devoir

— Savoir étudier les différents types de convergence (simple, uniforme) liées aux suites de fonctions.
— Savoir étudier les différents types de convergence (simple, uniforme, normale) liées aux séries de fonctions.
— Connaître le théorème de continuité lié aux séries de fonctions.
— Connaître le théorème de dérivabilité lié aux séries de fonctions.
— Connaître les formes usuelles liées aux calculs de primitives.

Énoncé du devoir

Soit $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ la série de fonctions de terme général u_n définie par :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall x\in\mathbb{R},\ u_n(x)=\frac{2x}{x^2+n^2\pi^2}$$

1. (a) Montrer que $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

   On note $U=\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ la somme de cette série de fonctions.

   (b) Montrer que pour tout $a>0$, $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ converge normalement sur $[-a,a]$.

   (c) La série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ converge-t-elle normalement sur $\mathbb{R}$?

   (d) Montrer que U est continue sur $\mathbb{R}$.

2. (a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Déterminer la primitive de u_n sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.

   (b) Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définie par :

   $$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall x\in\mathbb{R},\ v_n(x)=\ln\left(1+\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$$

   Montrer que $\sum\limits_{n\geq 1} v_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

   On note $V=\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n$ la somme de cette série de fonctions.

   (c) Montrer que V est la primitive de U sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.

3. On considère la suite $(p_n)_{n\geq 0}$ de fonctions polynomiales définie par :
   — Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $p_0(x)=x$.
   — Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$,

   $$p_n(x)=x\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$$

   Montrer que la suite $(p_n)_{n\geq 0}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction p que l'on exprimera à l'aide de V puis de U.

Théorème du point fixe

Temps de résolution
1 heure 30

Thèmes abordés

— Suites numériques.
— Séries numériques.
— Espaces vectoriels normés.

Conseils pour aborder le devoir

— Savoir étudier des suites récurrentes.
— Connaître l'*inégalité des accroissements finis*.
— Connaître les normes usuelles sur $\mathbb{R}^n$.

Énoncé du devoir

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie.

— Soit $k \in [0, 1[$. On dit qu'une application $f : E \to E$ est *k-contractante* si :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|$$

— Pour une application $f : E \to E$ et un entier naturel non nul n, on note f^n, l'application de E dans E, définie par $f^n = f \circ f \circ \cdots \circ f$ (composée n fois). On note f^0 l'identité de E.

Partie 1 : théorème du point fixe

Dans cette partie, on fixe $k \in [0,1[$ et on note f une application k-contractante de E.

Pour $a \in E$, on considère la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ définie par $x_0 = a$ et :

$$\forall n \geq 0,\, x_{n+1} = f(x_n)$$

Pour tout entier naturel n, on note :

$$u_n = x_{n+1} - x_n$$

1. Démontrer que :
$$\forall n \geq 0,\, \|u_{n+1}\| \leq k\|u_n\|$$
2. En déduire que :
$$\forall n \geq 0,\, \|u_n\| \leq k^n\|f(a) - a\|$$
3. Montrer que $\sum\limits_{n\geq 0} \|u_n\|$ converge. On admet alors que la série de vecteurs de terme général u_n converge ce qui signifie que la suite de ses sommes partielles est convergente.
4. Démontrer alors que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers un élément ℓ de E.
5. Prouver que ℓ est un point fixe, de f, c'est-à-dire vérifiant $f(\ell) = \ell$.
6. Montrer que f admet un unique point fixe.

On vient donc de démontrer le résultat suivant qui peut donc être utilisé directement dans la suite de l'exercice :

Théorème du point fixe. Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie, $k \in [0,1[$ et $f : E \to E$ une application k-contractante. Alors f admet un unique point fixe et pour tout $a \in E$, la suite $(f^n(a))_{n\geq 0}$ converge vers ce point fixe.

Partie 2 : sur la nécessité d'avoir toutes les hypothèses

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\, g(t) = t + \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(t)$$

7. Montrer que pour tout réel t, $|g'(t)| \leq 1$. En déduire que :
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\, |g(x) - g(y)| \leq |x - y|$$
8. La fonction g admet-elle un point fixe ? Est-elle k-contractante pour un réel $k \in [0,1[$?

Partie 3 : un exemple dans $\mathbb{R}$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(g(x))$$

où $g(x) = \frac{x}{5} + 1$.

9. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et :

$$\forall n \geq 0,\ u_{n+1} = \frac{u_n}{5} + 1$$

   Montrer à l'aide du théorème du point fixe que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers un réel ℓ que l'on précisera.
10. Démontrer que pour tout réel x et tout entier naturel n, $f(x) = f(g^n(x))$.
11. En déduire que f est constante.

Partie 4 : un exemple dans $\mathbb{R}^2$

On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme 1.

On s'intéresse dans cette question au système suivant d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$(\mathcal{S}) : \left\{ \begin{array}{ccc} 4x & = & \sin(x+y) \\ 3y & = & 3 + 2\,\mathrm{Arctan}\,(x-y) \end{array} \right.$$

et on considère l'application $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \psi((x, y)) = \left(\frac{1}{4}\sin(x+y), 1 + \frac{2}{3}\,\mathrm{Arctan}\,(x-y) \right)$$

12. Rappeler la définition de la norme 1 sur $\mathbb{R}^2$.
13. Montrer que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$:

$$|\sin(a) - \sin(b)| \leq |a - b|$$

   et :

$$|\,\mathrm{Arctan}\,(a) - \mathrm{Arctan}\,(b)| \leq |a - b|$$

14. Prouver que ψ est k-contractante pour un réel $k \in [0, 1[$.
15. En déduire que $(\mathcal{S})$ a une unique solution.
16. Dans cette question, $\mathbb{R}^2$ est muni de la norme infini.
    (a) Rappeler la définition de la norme infini sur $\mathbb{R}^2$.
    (b) Déterminer :

$$\|\psi((\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2})) - \psi((0, 0))\|_\infty$$

    (c) L'application ψ est-elle encore k-contractante pour un réel $k \in [0, 1[$ pour la norme infini ?

Calcul d'une distance

Temps de résolution
45 minutes

Thèmes abordés

— Espaces euclidiens.
— Algèbre linéaire.

Conseils pour aborder le devoir

— Savoir montrer qu'une application est un produit scalaire.
— Savoir déterminer l'expression d'une projection orthogonale.

Énoncé du devoir

Dans cet devoir, E désigne l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 et à coefficients réels.

On note $\mathcal{B} = \left(1, X, X^2\right)$ la base canonique de E.

Pour tout couple (P, Q) d'éléments de E, on pose :

$$\langle P, Q\rangle \;=\; P(1)Q(1) + P'(1)Q'(1) + P''(1)Q''(1)$$

1. Vérifier que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.
2. Déterminer une base orthonormale de E pour ce produit scalaire.
3. Déterminer la distance du polynôme $U = X^2 - 4$ à $\mathbb{R}_1[X]$.
4. Soit H l'ensemble des polynômes P de E tels que $P(1) = 0$.
   (a) Vérifier que H est un sous-espace vectoriel de E. Quelle est sa dimension ?
   (b) Soit φ la projection orthogonale sur H. Déterminer la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$.

Une famille d'intégrales généralisées

Temps de résolution
1 heure 30

Thèmes abordés

— Équivalents et développements limités.
— Intégrales généralisées.

Conseils pour aborder le devoir

— Savoir montrer qu'une fonction est intégrable sur un intervalle donné.
— Connaître le *théorème de changement de variable.*
— Connaître le *théorème fondamental de l'analyse.*

Énoncé du devoir

Dans ce devoir, on étudie la convergence et la valeur d'intégrales de la forme suivante :

$$I(f) = \int_0^{+\infty} \frac{f(t) - f(2t)}{t} \, \mathrm{d}t$$

où f désigne une fonction continue définie sur $[0, +\infty[$ à valeurs réelles.

Partie 1 : cas où la fonction f est définie par $f(t) = \frac{P(t)}{t^2+1}$ avec P polynomiale

1. On suppose dans cette sous-question que P est constant égal à 1 donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ f(t) = \frac{1}{t^2+1}$$

   (a) Déterminer dans ce cas, pour tout réel $t > 0$, l'expression de $\frac{f(t)-f(2t)}{t}$, en donner un équivalent en $+\infty$ et justifier la convergence de l'intégrale $I(f)$.

   (b) Effectuer dans l'intégrale $I(f)$ le changement de variable défini par $u = t^2$.

   (c) En déduire la valeur de l'intégrale $I(f)$.

2. On suppose dans cette sous-question que $P = X$ donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ f(t) = \frac{t}{t^2+1}$$

   (a) Justifier la convergence des intégrales :

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \frac{f(2t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

   et préciser leurs valeurs.

   (b) En déduire la convergence et la valeur de l'intégrale $I(f)$.

3. On suppose dans cette sous-question que $P = X^2$. Montrer que $I(f)$ converge et donner sa valeur.

4. Montrer que si $P \in \mathbb{R}_2[X]$, $I(f)$ converge. Donner la valeur de $I(f)$ en fonction des coefficients de P.

5. On suppose dans cette sous-question que $P = X^3$.

   (a) Étudier la convergence de l'intégrale $I(f)$.

   (b) Que dire de l'intégrale $I(f)$ si l'on suppose que $P = X^n$ avec $n \geq 3$?

Partie 2 : cas où la fonction f est définie par $f(t) = \mathrm{e}^{-t}$

On suppose que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $f(t) = \mathrm{e}^{-t}$.

6. Montrer que $I(f)$ converge.

7. Pour tout réel $\varepsilon > 0$, établir l'égalité suivante (en justifiant l'existence des intégrales) :

$$\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2t}}{t}\,\mathrm{d}t = \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\mathrm{d}u - \int_{2\varepsilon}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\mathrm{d}u$$

8. En déduire que pour tout réel $\varepsilon > 0$, on a :

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2t}}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{\mathrm{e}^{-u} - 1}{u}\mathrm{d}u + \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{\mathrm{d}u}{u}$$

9. On considère la fonction h définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par

$$h(u) = \frac{\mathrm{e}^{-u} - 1}{u}$$

si $u \neq 0$, et $h(0) = -1$. Établir que h est continue sur $\mathbb{R}$, puis qu'elle admet une primitive H de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et qu'on a pour tout réel $\varepsilon > 0$,

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2t}}{t}\,\mathrm{d}t = H(2\varepsilon) - H(\varepsilon) + \ln(2)$$

10. En déduire enfin la valeur de l'intégrale $I(f)$.
11. Déterminer la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{u-1}{\ln(u)}\mathrm{d}u$.

Intégrales à paramètres

Temps de résolution
1 heure

Thèmes abordés

— Intégrales généralisées.
— Intégrales à paramètres.

Conseils pour aborder le devoir

— Savoir montrer qu'une fonction est intégrable sur un intervalle donné.
— Connaître le *théorème fondamental de l'analyse*.
— Connaître le *théorème de changement de variable*.
— Connaître les *théorèmes de continuité et de dérivabilité* des intégrales à paramètres.
— Connaître le *théorème de limite de la dérivée*.

Énoncé du devoir

On pose :

$$\varphi(x) = \int_0^x \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+xt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

1. (a) Montrer que φ est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.
   (b) Démontrer que $\lim\limits_{x\to 0} \varphi(x) = 0$ et prolonger φ par continuité en 0.
   (c) Établir enfin que φ admet une limite en $+\infty$ que l'on calculera.
2. (a) Démontrer que pour $u \geq 0$, on a l'inégalité $\ln(1+u) \leq \sqrt{u}$.
   (b) En déduire que f est définie sur $[0,+\infty[$.
   (c) Démontrer que f est continue sur $[0,+\infty[$.
3. (a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.
   (b) Pour tout $x \geq 0$, déterminer $\alpha(x)$ tel que :

$$\forall t \geq 0, \quad \frac{t}{(1+t^2)(1+xt)} = \alpha(x)\left(\frac{-x}{1+xt} + \frac{t+x}{1+t^2}\right)$$

   (c) En déduire l'expression de $f'(x)$ pour $x > 0$.
4. Exprimer f à l'aide de φ. Donner un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
5. La fonction f est-elle dérivable en 0 ? Quelle est la tangente au graphe de f en 0 ?