

Yves Granjon

# TOUT EN FICHES

EXERCICES ET MÉTHODES DE

# MÉCANIQUE

MÉCANIQUE DU POINT  
ET DU SOLIDE INDÉFORMABLE

**LICENCE, IUT, CAPES, ÉCOLES D'INGÉNIEURS**

**DUNOD**

Illustration de couverture : dmitro2009 – shutterstock.com

© Dunod, 2020  
11, rue Paul Bert, 92240 Malakoff  
[www.dunod.com](http://www.dunod.com)  
ISBN 978-2-10-082296-6

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

# Table des matières

|                                                   |     |
|---------------------------------------------------|-----|
| Avant-propos                                      | vii |
| 1 Cinématique du point                            | 1   |
| Fiche 1 Rappel sur les vecteurs.....              | 1   |
| Fiche 2 Définitions fondamentales.....            | 4   |
| Fiche 3 Systèmes de coordonnées .....             | 5   |
| Fiche 4 Notion de trajectoire .....               | 7   |
| Fiche 5 Mouvement rectiligne.....                 | 7   |
| Fiche 6 Mouvement circulaire .....                | 8   |
| QCM .....                                         | 10  |
| Vrai ou faux ?.....                               | 13  |
| Exercices .....                                   | 15  |
| 2 Dynamique du point                              | 23  |
| Fiche 1 Notions de masses et de forces.....       | 23  |
| Fiche 2 Référentiels et repères.....              | 25  |
| Fiche 3 Lois de Newton .....                      | 26  |
| Fiche 4 Le pendule simple .....                   | 28  |
| QCM .....                                         | 31  |
| Vrai ou faux ?.....                               | 34  |
| Exercices .....                                   | 36  |
| 3 Travail et énergie                              | 45  |
| Fiche 1 Travail d'une force.....                  | 45  |
| Fiche 2 Énergie cinétique.....                    | 46  |
| Fiche 3 Théorème de l'énergie cinétique.....      | 47  |
| Fiche 4 Énergie potentielle de pesanteur .....    | 47  |
| Fiche 5 Conservation de l'énergie mécanique ..... | 48  |

|   |                                                               |     |
|---|---------------------------------------------------------------|-----|
|   | QCM .....                                                     | 50  |
|   | Vrai ou faux ?.....                                           | 53  |
|   | Exercices .....                                               | 55  |
| 4 | <b>Moment cinétique d'un point matériel</b>                   | 65  |
|   | Fiche 1 Définitions.....                                      | 65  |
|   | Fiche 2 Théorème du moment cinétique.....                     | 68  |
|   | QCM .....                                                     | 70  |
|   | Vrai ou faux ?.....                                           | 73  |
|   | Exercices .....                                               | 75  |
| 5 | <b>Changements de référentiel</b>                             | 87  |
|   | Fiche 1 Composition des vitesses.....                         | 87  |
|   | Fiche 2 Expression de la vitesse d'entraînement.....          | 89  |
|   | Fiche 3 Composition des accélérations .....                   | 91  |
|   | Fiche 4 Cas des référentiels non galiléens .....              | 91  |
|   | QCM .....                                                     | 95  |
|   | Vrai ou faux ?.....                                           | 98  |
|   | Exercices .....                                               | 100 |
| 6 | <b>Cinématique du solide</b>                                  | 113 |
|   | Fiche 1 Mouvements simples.....                               | 113 |
|   | Fiche 2 Mouvement quelconque d'un solide .....                | 116 |
|   | Fiche 3 Mouvement composé : le roulement sans glissement..... | 117 |
|   | Fiche 4 Changement de référentiel .....                       | 119 |
|   | QCM .....                                                     | 122 |
|   | Vrai ou faux ?.....                                           | 125 |
|   | Exercices .....                                               | 127 |
| 7 | <b>Cinétique du solide</b>                                    | 141 |
|   | Fiche 1 Centre d'inertie d'un solide.....                     | 141 |
|   | Fiche 2 Éléments cinétiques d'un système .....                | 145 |
|   | Fiche 3 Théorèmes de Koenig.....                              | 147 |
|   | Fiche 4 Mouvement d'un solide autour d'un axe fixe.....       | 149 |
|   | QCM .....                                                     | 153 |
|   | Vrai ou faux ?.....                                           | 156 |
|   | Exercices .....                                               | 158 |

|         |                                                                         |     |
|---------|-------------------------------------------------------------------------|-----|
| 8       | <b>Théorèmes généraux de la dynamique du solide</b>                     | 177 |
| Fiche 1 | Théorème de la résultante cinétique.....                                | 177 |
| Fiche 2 | Théorème du moment cinétique.....                                       | 178 |
| Fiche 3 | Principe fondamental de la mécanique du solide.....                     | 179 |
| Fiche 4 | Théorème du moment cinétique dans le référentiel<br>barycentrique ..... | 180 |
| Fiche 5 | Théorème de la résultante cinétique dans un repère<br>entraîné.....     | 181 |
| Fiche 6 | Méthode générale de résolution de problèmes.....                        | 181 |
| Fiche 7 | Différents types de forces .....                                        | 182 |
|         | QCM .....                                                               | 186 |
|         | Vrai ou faux ?.....                                                     | 189 |
|         | Exercices .....                                                         | 191 |
| 9       | <b>Travail et énergie en mécanique du solide</b>                        | 217 |
| Fiche 1 | Théorème de l'énergie cinétique.....                                    | 217 |
| Fiche 2 | Travail des forces de pesanteur.....                                    | 218 |
| Fiche 3 | Travail des forces extérieures appliquées à un solide.....              | 219 |
| Fiche 4 | Travail des forces de réaction.....                                     | 221 |
| Fiche 5 | Énergie potentielle.....                                                | 222 |
| Fiche 6 | Conservation de l'énergie d'un système isolé .....                      | 226 |
|         | QCM .....                                                               | 227 |
|         | Vrai ou faux ?.....                                                     | 230 |
|         | Exercices .....                                                         | 232 |
|         | <b>Formulaire mathématique</b>                                          | 253 |
|         | <b>Index</b>                                                            | 257 |



# Avant-propos

La mécanique est la discipline qui s'intéresse au mouvement et plus généralement au comportement des corps ponctuels ou non lorsque ceux-ci sont soumis à des actions, par exemple des forces extérieures.

Nous abordons dans un premier temps la mécanique du point, plus simple à étudier, puis, la mécanique du solide pour laquelle il est important de bien maîtriser les notions élémentaires de mécanique du point.

Qu'il s'agisse de points ou de solides, la mécanique est une science très vaste dont nous n'abordons dans cet ouvrage que les fondamentaux en les appliquant uniquement aux solides indéformables. Plus tard, le lecteur désireux de poursuivre une étude plus approfondie de ce domaine pourra aborder des sujets encore plus passionnants comme la mécanique des solides déformables, la résistance des matériaux, etc.

Ces sujets nécessiteront sans aucun doute une bonne maîtrise des bases de la mécanique. Nous avons donc tenté de les rassembler dans cet ouvrage en abordant successivement les grands domaines selon lesquels elle est, en général, structurée. Nous parlerons donc d'abord de cinématique du point, discipline dont le but est de décrire géométriquement les mouvements des objets ponctuels, puis la cinétique du point où l'on étudie l'influence de la masse sur les mouvements, puis la dynamique qui relie le mouvement des objets aux actions mécaniques qu'ils subissent. Enfin, les aspects énergétiques des mouvements seront abordés. Ces quatre champs d'étude seront détaillés pour la mécanique du point dans les quatre premiers chapitres puis généralisés au solide indéformable qui, disons-le, peut être considéré comme un ensemble de point. Un chapitre particulier sera consacré aux changements de référentiel, une notion qui nous accompagnera tout au long de cet ouvrage et qui est fondamentale.

La mécanique fait appel à un formalisme mathématique auquel il faut s'entraîner et s'habituer : géométrie, calcul vectoriel, trigonométrie, calcul différentiel et analyse sont des outils courants. En ce sens, la mécanique fait partie des domaines les plus complets des sciences physiques et il est couramment admis qu'être bon en mécanique, c'est être bon en sciences, tout simplement.

C'est pourquoi nous avons privilégié une approche simple des phénomènes décrits, sans pour autant délaisser le nécessaire formalisme sans lequel la résolution d'un problème ne serait qu'un bricolage hasardeux mais sans tomber dans une approche théorique ex-cessive comme celle qu'on rencontre trop souvent dans certains ouvrages. En particulier, cet ouvrage privilégie aussi le raisonnement physique qui, seul, permet de comprendre avant d'appliquer des formules toutes faites.

Au sein de chaque chapitre, les résultats essentiels du cours sont présentés sous forme de fiches. Chaque fiche aborde un principe fondamental, une loi physique ou un théorème particulier. À la fin de chaque chapitre, un QCM permet au lecteur de tester ses connaissances et de valider ses acquis. Un ensemble de questions Vrai/faux complète cet outil d'auto-évaluation. Le lecteur pourra ensuite s'entraîner avec des exercices et des problèmes entièrement corrigés. Les solutions sont présentées dans leurs moindres détails en insistant systématiquement sur les méthodes à assimiler et sur le savoir-faire à acquérir absolument pour être capable de résoudre n'importe quel problème de mécanique. Chaque chapitre propose des exercices de difficultés variées. Il est conseillé de les aborder dans l'ordre, sans chercher à brûler les étapes en négligeant tel ou tel qui paraît trop facile et sans succomber à la tentation de lire trop rapidement la solution. Par ailleurs, de nombreux exercices nécessitent l'utilisation de résultats des exercices précédents. Certains de ces exercices sont de grands classiques ; d'autres sont plus originaux. Ils ont tous vocation à guider l'étudiant vers la maîtrise des différentes notions et de l'aider à acquérir suffisamment d'aisance pour aborder avec succès des problèmes de plus en plus sophistiqués.

Rappelons enfin que les progrès effectués sont toujours proportionnels aux efforts consentis pour résoudre les premiers exercices. Ne vous découragez pas, donc, devant un exercice qui paraît difficile. En mécanique comme partout ailleurs, les premiers pas ne sont pas les plus faciles.

Un dernier conseil : bien veiller à observer une rigueur absolue quant aux notations ou aux conventions de signes. La plupart des erreurs proviennent du non-respect de ces règles élémentaires.

Cet ouvrage a été conçu avec le souci constant de rendre la mécanique du point et la mécanique du solide accessibles au plus grand nombre. Je souhaite que chaque lecteur puisse y trouver les réponses à ses questions et les clés de sa réussite.

YG

# Cinématique du point

1

## MOTS CLÉS

Vecteurs, produit vectoriel, vecteur position, vecteur vitesse, accélération, coordonnées cartésiennes, coordonnées cylindriques, coordonnées sphériques, trajectoire, mouvement rectiligne, mouvement uniforme, mouvement circulaire, vitesse angulaire.

Les cinq premiers chapitres de cet ouvrage sont consacrés à la mécanique du point matériel. On considérera alors des objets matériels suffisamment petits pour être assimilables à des points. D'une manière générale, la mécanique du point s'intéresse au mouvement des points matériels soumis à des actions extérieures. Mais dans ce premier chapitre, nous allons uniquement aborder la cinématique du point qui consiste à décrire le mouvement d'un point dans l'espace, indépendamment des causes qui lui donnent naissance. Nous sommes ainsi dans une logique purement descriptive. Ce qui nous importe ici, c'est de connaître la position d'un point, sa vitesse ou son accélération, tout comme il peut être intéressant de décrire sa trajectoire, autrement dit, la suite de points qu'il occupe lorsque le temps varie. Précisons bien en effet, que nous allons nous intéresser à des points en mouvement. Par conséquent, les positions, vitesses ou accélérations s'entendent toujours comme des variables du temps.

## Fiche 1

# Rappel sur les vecteurs

## Notations

On considère l'espace à trois dimensions muni d'un repère orthonormé  $(O, x, y, z)$ , les axes étant respectivement munis des vecteurs unitaires  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  et  $\vec{k}$ . Soit  $M$  un point de l'espace repéré par ses coordonnées :  $M(a, b, c)$  et  $M'(a', b', c')$ . Le vecteur  $\overrightarrow{MM'}$  est défini par :

$$\overrightarrow{MM'} = (a' - a)\vec{i} + (b' - b)\vec{j} + (c' - c)\vec{k}$$

On utilise préférentiellement la notation suivante qui lui est strictement équivalente :

$$\overrightarrow{MM'} = \begin{pmatrix} a' - a \\ b' - b \\ c' - c \end{pmatrix}$$

La norme d'un tel vecteur  $\overrightarrow{MM'}$  est définie par :

$$\|\overrightarrow{MM'}\| = \sqrt{(a' - a)^2 + (b' - b)^2 + (c' - c)^2}$$

## Opérations sur les vecteurs

Soit  $\vec{U}$  et  $\vec{V}$  deux vecteurs de l'espace définis par :

$$\vec{U} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ et } \vec{V} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

### Remarque

$a$ ,  $b$  et  $c$  sont appelées les composantes du vecteur  $\vec{U}$ . On utilise aussi parfois le terme de coordonnées.

## Combinaisons linéaires

On a :

$$\lambda \vec{U} + \mu \vec{V} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a + \mu x \\ \lambda b + \mu y \\ \lambda c + \mu z \end{pmatrix}$$

En particulier :  $\vec{U} + \vec{V} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + x \\ b + y \\ c + z \end{pmatrix}$  et  $\lambda \vec{U} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda b \\ \lambda c \end{pmatrix}$

## Produit scalaire

On a :

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = ax + by + cz$$

Comme son nom l'indique, le produit scalaire n'est pas un vecteur.

Le produit scalaire de deux vecteurs est nul si et seulement si les deux vecteurs sont orthogonaux.

## Produit vectoriel

On a :

$$\vec{W} = \vec{U} \wedge \vec{V} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bz - cy \\ cx - az \\ ay - bx \end{pmatrix}$$

Par ailleurs :

- $\|\vec{W}\| = \|\vec{U}\| \times \|\vec{V}\| \times \left| \sin(\widehat{\vec{U}, \vec{V}}) \right|$
- $\vec{W}$  est toujours orthogonal aux deux vecteurs donnés  $\vec{U}$  et  $\vec{V}$ .
- La base de vecteurs  $(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W})$  est de sens direct. Cela signifie qu'on peut déterminer le sens de  $\vec{W}$  en « faisant tourner » le vecteur  $\vec{U}$  sur le vecteur  $\vec{V}$  et en utilisant la règle du tire-bouchon (figure 1.1).
- Deux vecteurs colinéaires possèdent un produit vectoriel nul.
- Le produit vectoriel est distributif par rapport à l'addition :  $\vec{U} \wedge (\vec{V}_1 + \vec{V}_2) = \vec{U} \wedge \vec{V}_1 + \vec{U} \wedge \vec{V}_2$ .
- Il est compatible avec la multiplication par un scalaire :  $\lambda(\vec{U} \wedge \vec{V}) = \lambda\vec{U} \wedge \vec{V} = \vec{U} \wedge \lambda\vec{V}$ .
- Enfin, il est antisymétrique (ou anticommutatif) :  $\vec{V} \wedge \vec{U} = -\vec{U} \wedge \vec{V}$

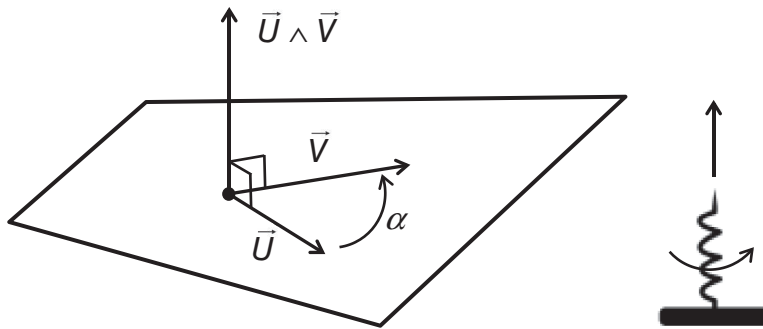


Figure 1.1

On retiendra en particulier, concernant les vecteurs unitaires de la base orthonormée  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , les égalités suivantes :

$$\begin{cases} \vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k} \\ \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i} \\ \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j} \end{cases}$$

### Produit mixte

Soit  $\vec{U}$ ,  $\vec{V}$  et  $\vec{W}$ , trois vecteurs de l'espace. Le produit mixte correspond à l'égalité suivante :

$$(\vec{U} \wedge \vec{V}) \cdot \vec{W} = \vec{U} \cdot (\vec{V} \wedge \vec{W})$$

## Dérivée d'un vecteur

Si on s'intéresse à un vecteur  $\vec{V}$  dont les coordonnées  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  dépendent du temps, on peut écrire :  $\vec{V}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ . On définit la dérivée du vecteur par rapport au temps par :

$$\frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{pmatrix}$$

### Remarque

On a l'habitude, en mécanique, de noter  $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$  et ce, afin d'alléger les écritures. Soit :

$$\frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}. \text{ De même, pour la dérivée seconde de } x, \text{ on notera } \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}.$$

## Fiche 2

# Définitions fondamentales

Dans l'espace à trois dimensions muni d'un repère orthonormé  $(O, x, y, z)$ , on considère un objet ponctuel représenté par un point M et en mouvement, dont les coordonnées  $(x, y, z)$  varient au cours du temps.

### Remarque importante

En mécanique du point, nous nous intéresserons la plupart du temps à des points mobiles, donc dont les coordonnées varient avec le temps. Pour alléger les notations, nous n'écrirons pas  $x(t)$  mais simplement  $x$  en partant du principe que toutes les variables géométriques sont des variables du temps.

## Vecteur position

Le vecteur  $\overrightarrow{OM}$  est le vecteur position du point M, possédant pour composantes les coordonnées du point M.

Soit :

$$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Cette position s'entend à un instant  $t$  donné, les coordonnées du point M étant supposées être variables au cours du temps.

### Vecteur vitesse instantanée

On définit à chaque instant la vitesse du point M en mouvement par la dérivée du vecteur position :

$$\overrightarrow{v_M}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$$

### Vecteur accélération instantanée

On définit à chaque instant l'accélération du point M en mouvement par la dérivée du vecteur vitesse instantanée :

$$\overrightarrow{a_M}(t) = \frac{d\overrightarrow{v_M}(t)}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}$$

## Fiche 3

# Systèmes de coordonnées

Le système de coordonnées cartésiennes  $(O, x, y, z)$  utilisé jusqu'à présent est sans nul doute celui qui nous est le plus familier. Néanmoins, selon la géométrie des systèmes que nous étudierons, il pourra s'avérer plus pratique et plus simple d'utiliser d'autres systèmes de coordonnées.

### Coordonnées cylindriques

Considérons un point M de l'espace comme indiqué sur la figure 1.2. Soit M' sa projection sur le plan  $(O, x, y)$ . Les coordonnées cylindriques consistent à repérer le point M dans l'espace par la distance  $r$  qui sépare M' du point O (autrement dit  $r = \|\overrightarrow{OM'}\|$ ), par l'angle  $\theta$  que forme le vecteur  $\overrightarrow{OM'}$  avec l'axe Ox et par l'ordonnée  $z$  de M. Les coordonnées cylindriques de M sont donc :  $M(r, \theta, z)$ .

On notera que le couple  $(r, \theta)$  correspond aux coordonnées polaires de la projection de M dans le plan  $(O, x, y)$ .

#### Remarque

On notera que  $r$  est toujours positif et que  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ .